BARY

Géométrie élémentaire. Note sur la détermination du volume du segment sphérique à deux bases parallèles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 326-328

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__326_1>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur la détermination du volume du segment sphérique à deux bases parallèles ;

Par M. Bary.

Pour fixer les idées, supposons que les deux bases du segment à mesurer soient situées du même côté du grand cercle dont le plan leur est parallèle. Soient a la plus grande base, p la distance de son plan au centre de la sphère, b la plus petite base, q la distance de son plan au centre de la sphère, r le rayon de cette sphère; nous aurons d'abord

$$r^2=a^2+p^2=b^2+q^2\ , \qquad (1)$$

d'où nous tirerons encore

$$a^2-b^2=q^2-p^2=(p+q)(q-p)\ ;$$

de sorte qu'en nommant h la hauteur du segment, ce qui donnera

$$q-p=h\ , \qquad (2)$$

nous aurons

$$a^2-b^2=(p+q)h\ ,$$

et, conséquemment,

$$p+q=\frac{a^2-b^2}{h}\ , \qquad (3)$$

et alors les équations (2) et (3) donneront

$$p=\frac{a^2-b^2}{2h}-\frac{h}{2}\ , \qquad q=\frac{a^2-b^2}{2h}+\frac{h}{2}\ . \qquad (4)$$

Cela posé, soit V le volume du segment ; ce segment est la différence de deux autres, ayant pour base commune le grand cercle parallèle à ses bases et se terminant à ses mêmes bases, et dont les hauteurs sont conséquemment q et p. Soient Q et P respectivement les volumes de ces deux segmens, nous aurons

$$V=Q-P\ . \qquad (5)$$

Les deux segmens Q et P sont respectivement composés de deux cônes ayant b et a pour rayons de leurs bases et q et p pour hauteurs et de deux secteurs terminés par des zônes sphériques dont les hauteurs sont également q et p ; de sorte qu'on a

$$Q=\tfrac{1}{3}\varpi b^2q+\tfrac{2}{3}\varpi r^2q\ , \qquad P=\tfrac{1}{3}\varpi a^2p+\tfrac{2}{3}\varpi r^2p\ ,$$

ou bien (1)

$$Q=\tfrac{1}{3}\varpi b^2q+\tfrac{2}{3}\varpi(b^2+q^2)q=\varpi b^2q+\tfrac{2}{3}\varpi q^3\ ,$$

$$P=\tfrac{1}{3}\varpi a^2p+\tfrac{2}{3}\varpi(a^2+p^2)p=\varpi a^2p+\tfrac{2}{3}\varpi p^3\ ,$$

ce qui donnera, en substituant dans (5),

$$V=\varpi(b^2q-a^2p)+\tfrac{2}{3}\varpi(q^3-p^3)=\varpi(b^2q-a^2p)+\tfrac{2}{3}\varpi(q-p)(p^2+pq+q^2);$$

c'est-à-dire (2),

$$V=\varpi(b^2q-a^2p)+\tfrac{2}{3}\varpi h(p^2+pq+q^2)\ . \qquad (6)$$

Mais les valeurs (4) donnent

$$b^2q-a^2h=\frac{(a^2+b^2)h}{2}-\frac{(a^2-b^2)^2}{2h}\ ;$$

$$p^2+pq+q^2=\frac{3(a^2-b^2)^2}{4h^2}+\frac{h^2}{4}\ ;$$

substituant ces valeurs dans (6) et réduisant, il viendra finalement

$$V=h\,\frac{\varpi a^2+\varpi b^2}{2}+\tfrac{1}{6}\varpi h^3\ ,$$

qui est précisément le résultat donné par M. Legendre.

Si, du volume de ce segment, on retranche le volume du tronc du cône qui se termine à ses deux bases, lequel a, comme l'on sait, pour expression

$$\varpi\,\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)\ ,$$

on obtiendra, pour le volume du corps engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre qui lui est extérieur,

$$\frac{\varpi h}{6}\left\{(a-b)^2+h^2\right\}\ .$$

Mais, si l'on représente par c la corde du segment générateur, on aura

$$(a-b)^2+h^2=c^2\ ,$$

ce qui donnera, en substituant, pour le volume cherché,

$$\frac{\varpi hc^2}{6}\ ;$$

expression remarquable par sa simplicité.