ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Analyse transcendante. Essai sur une méthode générale d'intégration

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 73-83
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__73_0>

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Essai sur une méthode générale d'intégration ;

Par M. Le Barbier.

Nous avons présenté, à la pag. 117 du précédent volume, l'essai d'une méthode générale d'intégration qui, appliquée aux fonctions qui sont le produit de deux facteurs, nous a conduit à des séries régulières, desquelles nous avons déduit, pour le cas de $m=1$, les fonctions finies dont elles sont le développement. On peut en inférer, à ce qu'il nous paraît, que cette méthode ne peut sembler illusoire, dans certains cas, que parce qu'on ne sait pas généralement remonter d'une série à sa fonction génératrice, ou bien parce que la série à laquelle on parvient n'est pas convergente ; mais ces inconvéniens ne sont pas particuliers à cette méthode, puisqu'en général les intégrales qui sont du genre des transcendantes ne peuvent s'obtenir que par des séries.

Pour faire mieux apprécier ce qu'on peut se promettre de cette méthode, nous allons en présenter encore ici quelques nouvelles applications.

Reprenons la formule du bas de la page 122 du précédent volume ; savoir :

$$\frac{\mathrm{d}^m.PQ}{\mathrm{d}x^m}=P\frac{\mathrm{d}^mQ}{\mathrm{d}x^m}+\frac{m}{1}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-1}Q}{\mathrm{d}x^{m-1}}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{\mathrm{d}^{m-2}Q}{\mathrm{d}x^{m-2}}+\ldots ;\quad(1)$$

en y changeant le signe de m, elle deviendra

$$\int^m PQ\mathrm{d}x^m = P\int^m Q\mathrm{d}x^m - \frac{m}{1}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\int^{m+1} Q\mathrm{d}x^{m+1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}\int^{m+2} Q\mathrm{d}x^{m+2} + \ldots\ldots \quad (2)$$

Si l'on pose

$$P=(x+a)^r\ ; \qquad Q=(x+b)^r\ ;$$

on aura

$$\frac{\mathrm{d}^\mu (x+b)^r}{\mathrm{d}x^\mu} = r^{\mu|-1}.(x+b)^{r-\mu}\ ;$$

si, dans cette dernière formule, on change le signe de μ, en se rappelant que

$$r^{-\mu|-1} = \frac{1}{(r+\mu)^{\mu|-1}}\ ;$$

il viendra

$$\int^\mu (x+b)^r \mathrm{d}x^\mu = \frac{(x+b)^{r+\mu}}{(r+\mu)^{\mu|-1}}\ ;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = r(x+a)^{r-1}\ ;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}^2x} = r(r-1)(x+a)^{r-2} = r^{2|-1}(x+a)^{r-2}\ ;$$

$$\frac{\mathrm{d}^3P}{\mathrm{d}x^3} = r(r-1)(r-2)(x+a)^{r-3} = r^{3|-1}(x+a)^{r-3}\ ;$$

. . . . ;

Il viendra donc, en remplaçant successivement μ par m, $m+1$, $m+2$, ... et substituant dans (2),

$$\int^m \{(x+a)(x+b)\}^r dx^m = \frac{1}{(r+m)^{m|-1}}(x+a)^r(x+b)^{r+m}$$

$$-\frac{m}{1}\,\frac{r}{(r+m+2)^{m+1|-1}}(x+a)^{r-1}(x+b)^{r+m+1}$$

$$+\frac{m}{1}\,\frac{m+1}{2}\,\frac{r^{2|-1}}{(r+m+2)^{m+2|-1}}(x+a)^{r-2}(x+b)^{r+m+2}$$

$$-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\,\frac{r^{3|-1}}{(r+m+3)^{m+3|-1}}(x+a)^{r-3}(x+b)^{r+m+3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad (3)$$

ou bien encore

$$\int^m \{(x+a)(x+b)\}^r dx^m = \frac{(x+a)^r(x+b)^{r+m}}{(r+m)^{m|-1}}\left\{1-\frac{mr}{r+m+1}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\,\frac{r^{2|-1}}{(r+m+2)^{2|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^2-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\,\frac{r^{3|-1}}{(r+m+3)^{3|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^3+\ldots\ldots\right\}. \qquad (4)$$

Posant $m=1$, il vient

$$\int\{(x+a)(x+b)\}^r dx = \frac{(x+a)^r(x+b)^{r+1}}{r+1}\left\{1-\frac{r}{r+2}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)+\frac{r^{2|-1}}{(r+3)^{2|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{r^{3|-1}}{(r+4)^{3|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^3+\frac{r^{4|-1}}{(r+5)^{4|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^4+\ldots\ldots\right\}. \qquad (5)$$

Dans le cas particulier de $r=-\frac{1}{2}$, on trouve

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\frac{1}{7}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3+\ldots\ldots\right\},$$

ou bien encore

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\left\{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{7}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{7}{2}}+\ldots\ldots\right\}. \quad (6)$$

Or on a, dans le système Népérien,

$$\text{Log.}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)=2\left(\frac{u}{1}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+\ldots\ldots\right);$$

posant donc

$$\frac{1+u}{1-u}=z, \quad \text{d'où} \quad u=\frac{z-1}{z+1};$$

on aura

$$\text{Log.}z=2\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7+\ldots\right\};$$

donc, si l'on pose

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{z+1}; \quad (7)$$

on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=\text{Log.}z;$$

mais on tire de la formule (7)

$$z=\frac{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{x+a}};$$

donc finalement

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=\text{Log.}\frac{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{x+a}}. \quad (8)$$

La formule (5) peut encore être écrite ainsi

$$\int\{(x+a)(x+b)\}^r \mathrm{d}x = \frac{\{(x+a)(x+b)\}^r(x+b)}{r+1}\left\{1-\frac{r}{r+2}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)+\frac{r^{2|-1}}{(r+3)^{2|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{r^{3|-1}}{(r+4)^{3|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^3+\frac{r^{4|-1}}{(r+5)^{4|-1}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^4-\ldots\ldots\right\}.$$

Si l'on change, dans cette dernière formule, d'abord $x+b$ en $-(x+b)$, puis ensuite b en $-b$, et qu'on pose en outre $r=-\frac{1}{2}$, elle deviendra

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}=-2\left\{\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{7}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{\frac{7}{2}}+\ldots\ldots\right\};$$

or, on a généralement

$$x=\mathrm{Tang.}x-\tfrac{1}{3}\mathrm{Tang.}^3x+\tfrac{1}{5}\mathrm{Tang.}^5x-\tfrac{1}{7}\mathrm{Tang.}^7x+\ldots.;$$

donc

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}=-2\,\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Tang.}=\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\right). \qquad (9)$$

On voit que cette méthode d'intégration s'applique immédiatement aux deux différentielles

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}\,;\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}\,;$$

par un simple changement de signe, tandis que les méthodes ordinaires exigent un procédé propre pour chacune d'elles.

On peut remarquer en outre que les formules (4) et (5) renferment une infinité de cas particuliers qu'il ne serait pas facile de traiter sans le secours de la formule (2); car r est une grandeur quelconque, et m un nombre entier positif quelconque. De plus, la formule (4) finit toujours par devenir convergente. En effet, ses termes des $(\mu+1)^{ieme}$ et $(\mu+2)^{ieme}$ rangs sont respectivement

$$\frac{m^{\mu|1}}{1^{\mu|1}} \cdot \frac{r^{\mu|-1}}{(r+m+\mu)^{\mu|-1}} \cdot \left(\frac{x+b}{x+a}\right)^{\mu},$$

$$\frac{m^{\mu+1|1}}{1^{\mu+1|1}} \cdot \frac{r^{\mu+1|-1}}{(r+m+\mu+1)^{\mu+1|-1}} \left(\frac{x+b}{x+a}\right)^{\mu+1};$$

de sorte que le quotient de la division du second par le premier est

$$\frac{m^{\mu+1|1}}{m^{\mu|1}} \cdot \frac{1^{\mu|1}}{1^{\mu+1|1}} \cdot \frac{r^{\mu+1|-1}}{r^{\mu|-1}} \cdot \frac{(r+m+\mu)^{\mu|-1}}{(r+m+\mu+1)^{\mu+1|-1}} \left(\frac{x+b}{x+a}\right);$$

or, on trouve aisément

$$\frac{m^{\mu+1|1}}{m^{\mu|1}} = m+\mu,$$

$$\frac{1^{\mu|1}}{1^{\mu+1|1}} = \frac{1}{\mu+1},$$

$$\frac{r^{\mu+1|-1}}{r^{\mu|-1}} = r-\mu,$$

$$\frac{(r+m+\mu)^{\mu|-1}}{(r+m+\mu+1)^{\mu+1|-1}} = \frac{1}{r+m+\mu+1};$$

au moyen de quoi ce quotient se réduit simplement à

$$\frac{m+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{r-\mu}{r+m+\mu+1} \cdot \frac{x+b}{x+a},$$

or, on peut toujours prendre μ assez grand pour qu'on ait

$$(1+\mu)(r+m+\mu+1) > (m+\mu)(r-\mu);$$

car, en développant et réduisant, cette inégalité revient à

$$2\mu^2+2(m+1)\mu+(m+r-mr)>0\ ;$$

à laquelle on peut toujours satisfaire par une détermination convenable de μ, quels que soient m et r.

La série (4) est celle qu'il conviendra d'employer de préférence si l'on a $a>b$; car alors on aura $\frac{x+b}{x+a}<1$; mais, si le contraire a lieu, il faudra substituer a cette série celle qu'on en déduit en y mettant a pour b et b pour a.

M. Wronski, dans son *Introduction à la philosophie des mathématiques*, publiée en 1811, a présenté les formules (1) et (2) comme renfermant la loi fondamentale, l'une du calcul différentiel et l'autre du calcul intégral ; nous ignorons si une branche de calcul, quelle qu'elle soit, peut avoir d'autre loi fondamentale que sa définition ; mais du moins est-il vrai de dire que si, sous le rapport des applications, un usage trop exclusif de ces formules semble devoir entraîner souvent dans des calculs beaucoup plus longs que ceux qu'exigent les autres procédés connus, ces mêmes formules n'en résolvent pas moins une infinité de cas qu'il serait très-difficile, pour ne pas dire impossible, de traiter par les procédés connus.

Pour montrer mieux encore l'usage de ces formules, nous en ferons deux autres applications. Nous prendrons pour la première la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt[x]{e}} \quad \text{ou} \quad e^{-\frac{1}{x}}dx\ ;$$

traitée par M. Wronski, dans son dernier ouvrage publié en 1816, ayant pour objet le *Développement des lois des séries*. Posons $x=\frac{1}{y}$, il en résultera

$$\frac{1}{x}=y\ ,\qquad dx=-\frac{dy}{y^2}\ ;$$

et par conséquent

$$e^{-\frac{1}{x}}dx=-\frac{1}{y^2}e^{-y}dy=-y^{-2}.e^{-y}dy.$$

Posant alors

$$P=y^{-2}\ ,\qquad Q=e^{-y}\ ,$$

nous aurons d'une part

$$\frac{dP}{dy}=-2y^{-3}\ ,$$

$$\frac{d^2P}{dy^2}=+2.3y^{-4}\ ,$$

$$\frac{d^3P}{dy^3}=-2.3.4y^{-5}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^\mu P}{dy^\mu}=(-1)^\mu.2^{\mu|1}.y^{-(\mu+2)}\ . \qquad (10)$$

D'une autre part, nous aurons

$$\frac{dQ}{dy}=-e^{-y}\ ,$$

$$\frac{d^2Q}{dy^2}=+e^{-y}\ ,$$

$$\frac{d^3Q}{dy^3}=-e^{-y}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^\mu Q}{dy^\mu}=(-1)^\mu.e^{-y}\ ; \qquad (11)$$

en changeant le signe de μ et observant que

$$2^{-\mu|1} = \frac{1}{(2-\mu)^{\mu|1}} ,$$

on trouvera

$$\int^\mu P dy^\mu = \frac{(-1)^\mu}{(2-\mu)^{\mu|1}} y^{\mu-2} , \quad (12) \qquad \int^\mu Q dy^\mu = (-1)^\mu e^{-y} . \quad (13)$$

Au moyen des formules (10) et (13), la formule (2) donnera la série suivante

$$\int^m \frac{e^{-y}}{y^2} dy = (-1)^m e^{-y} \left\{ \frac{1}{y^2} - 2\frac{m}{y^3} + 3\frac{m(m+1)}{y^4} - 4\frac{m(m+1)(m+2)}{y^5} + \ldots\ldots\ldots \right\} ,$$

d'où, en faisant $m=1$

$$\int \frac{e^{-y}}{y^2} dy = -e^{-y} \left\{ \frac{1}{y^2} - \frac{1^{2|1}}{y^3} + \frac{1^{3|1}}{y^4} - \frac{1^{4|1}}{y^5} + \frac{1^{5|1}}{y^6} - \ldots\ldots \right\} ;$$

ou enfin, en remettant pour y sa valeur $\frac{1}{x}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[x]{e}} = \frac{1}{\sqrt[x]{e}} (x^2 - 1.2x^3 + 1.2.3x^4 - 1.2.3.4x^5 + 1.2.3.4.5x^6 - \ldots\ldots) ; \quad (14)$$

cette dernière intégrale avait déjà été traitée par Euler, à la page 282 de son *Calcul intégral*.

Nous prendrons, pour second exemple, la différentielle

$$\frac{dt}{e^{t^2}} \quad \text{ou} \quad e^{t^2} dt ,$$

traitée par Laplace, dans ses réfractions astronomiques (*Mécanique céleste*, tom. IV, pag. 255).

Posons $t^2 = x$, il en résultera

$$t=\sqrt{x}\ ,\quad 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\ ,\quad \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{2t}=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}\ ;$$

et par suite

$$e^{-t^2}\mathrm{d}t=e^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.e^{-x}\mathrm{d}x\ ;$$

posant alors

$$P=x^{-\frac{1}{2}}\ ,\qquad Q=e^{-x}\ ,$$

on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}=+\frac{1.3}{2.2}x^{-\frac{5}{2}}\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3P}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{1.3.5}{2.2.2}x^{-\frac{7}{2}}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^\mu P}{\mathrm{d}x^\mu}=(-1)^\mu\frac{1^{\mu|2}}{2^\mu}x^{-\frac{2\mu+1}{2}}\ ;$$

on aura d'ailleurs

$$\int^\mu Q\mathrm{d}x^\mu=(-1)^\mu e^{-x}\ ;$$

substituant donc dans la formule (2), on aura

$$\tfrac{1}{2}\int^m\frac{\mathrm{d}x^m}{e^x\sqrt{x}}=\frac{(-1)^m}{e^x}\left\{x^{-\frac{1}{2}}-\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}x^{-\frac{5}{2}}-\ldots\right\}\ ;$$

d'où, en posant $m=1$ et en remettant pour x sa valeur t^2,

$$\int e^{-t^2} dt = -e^{-t^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^3} + \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{1}{t^5} - \frac{1.3.5}{2.2.2}\cdot\frac{1}{t^7} + \ldots\ldots\right).$$

Nous pourrons revenir, dans une autre occasion, sur ces sortes d'applications.