GERGONNE

Arithmétique. Note sur un théorème d'arithmétique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 83-86
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__83_1>

ARITHMÉTIQUE.

Note sur un théorème d'arithmétique ;

Par M. GERGONNE.

EN considérant que, dans un demi-cercle, la perpendiculaire abaissée de l'un quelconque des points de la demi-circonférence sur le diamètre est moyenne par quotient entre les deux segmens qu'elle détermine sur ce diamètre, tandis que le rayon du cercle est moyen par différence entre ces deux mêmes segmens, on voit, sur-le-champ, que la moyenne par quotiens, entre deux grandeurs inégales, est constamment moindre que la moyenne par différences entre les mêmes grandeurs, et d'autant moindre, par rapport à l'autre, qu'elles sont plus inégales. On aperçoit aussi, fort aisément, à l'aide des mêmes considérations géométriques, qu'il suffit que ces deux grandeurs ne soient pas très-inégales pour que la moyenne par quotient entre elles soient très-sensiblement égale à la moyenne par différence.

Il est connu, en effet, et on démontre même facilement (tom. XVII, pag. 150), que, lorsque la différence entre deux nombres entiers a moins de la moitié des chiffres du plus petit, la moyenne par différences entre eux n'excède pas la moyenne par quotient d'une demi-unité. Mais il ne paraît pas qu'il ait été remarqué jusqu'ici que cet excès n'est pas même *d'un huitième d'unite ;* et voici à peu près comment M. Lenthéric démontre cette proposition.

Soient a et b les deux nombres dont il s'agit, et soit $a>b$. Par hypothèse, le nombre des chiffres de $a-b$ est moindre que la moitié du nombre des chiffres de b ; or, comme le quarré d'un nombre a au plus le double du nombre de ses chiffres, il s'ensuit que $(a-b)^2$ n'aura pas autant de chiffres que b ; de sorte qu'on aura

$$(a-b)^2<b \; . \qquad (1)$$

Cela posé, à cause de $b<a$, on a $\sqrt{b}<\sqrt{a}$, d'où $\sqrt{a}+\sqrt{b}>2\sqrt{b}$; d'où, en quarrant, divisant par 4 et renversant

$$b<\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 ; \qquad (2)$$

donc, en comparant (1) à (2),

$$(a-b)^2<\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 ,$$

et par suite

$$a-b<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} ,$$

ou encore

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} ;$$

ce qui donne, en simplifiant,

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\tfrac{1}{2} , \qquad (3)$$

puis en quarrant

$$a-2\sqrt{ab}+b<\tfrac{1}{4}\ ;$$

inégalité qui, en divisant par 2, peut être ensuite écrite comme il suit :

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{1}{8}\ ;$$

ce qui démontre le théorème annoncé.

Ce théorème s'applique évidemment à deux nombres décimaux dans lesquels le nombre des chiffres décimaux serait le même, et qui, abstraction faite de la virgule, tomberaient dans le cas des deux nombres entiers dont il vient d'être question ; l'excès de leur demi-somme sur la racine quarrée de leur produit serait moindre que *le huitième* d'une unité décimale du dernier ordre.

L'inégalité (3) prouve, en passant, que lorsqu'on a à extraire la racine quarrée d'un nombre, on peut modifier des chiffres sur la droite de ce nombre, sans altérer la racine d'une demi-unité du dernier ordre, pourvu que le nombre des chiffres modifiés soit moindre que la moitié du nombre total des chiffres du nombre dont il s'agit.

Il résulte encore de tout ceci que si l'on a à extraire la racine quarrée d'un nombre exprimé par l'unité, plus une fraction décimale, dans laquelle le premier chiffre décimal significatif est précédé d'autant de zéros au moins qu'il a de chiffres décimaux significatifs, on aura cette racine avec le même degré d'approximation qu'offre le nombre proposé, en remplaçant simplement la partie décimale par sa moitié. En effet, extraire, par exemple, la racine quarrée de 1,000512, c'est extraire la racine quarrée du produit $1{,}000512\times1{,}000000$, laquelle, par ce qui précède, sera, à moins d'un *huitième* de millionième près, la même chose que la moitié de 2,000512, c'est-à-dire, 1,000256.

Donc, plus généralement, pour extraire la racine $(2^n)^{ieme}$ d'un tel nombre, il suffira de diviser sa partie décimale par 2^n. Cette remarque peut recevoir une utile application dans la construction des tables de logarithmes.