ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Note sur quelques problèmes proposés dans les Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 96-100
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__96_0>

Note sur quelques problèmes proposés dans les Annales;

Extraite d'une lettre au Rédacteur;

Par M. ***

La démonstration donnée par M. Lenthéric, à la pag. 379 du XX.me volume des Annales, de la divisibilité par *soixante* du produit des trois côtés de tout triangle rectangle, en nombres entiers, semble réclamer un léger complément au défaut duquel elle manquerait de généralité. Il est très-vrai que tout triangle dont les trois côtés sont

$$m^2+n^2\ ,\qquad m^2-n^2\ ,\qquad 2mn\ ;$$

est rectangle, quels que puissent être les deux nombres entiers m et n; mais comme tout triangle semblable à un triangle rectangle est rectangle lui-même, il s'ensuit que le triangle dont les trois côtés sont

$$\lambda(m^2+n^2)\ ,\qquad \lambda(m^2-n^2)\ ,\qquad 2\lambda mn\ ;$$

sera également rectangle, quels que soient les trois nombres entiers m, n, λ, qu'on peut bien prendre tels que le second triangle ne puisse pas rentrer dans la première forme; comme il arrive, par exemple, en prenant $m=2$, $n=1$, $\lambda=3$; d'où résulte un triangle dont les trois côtés sont 15, 9, 12. Mais, comme le produit des trois côtés du second triangle n'est autre que le produit des trois côtés du premier, multiplié par le facteur λ^3, il s'ensuit que, si le produit des trois côtés du premier est divisible par *soixante*, le produit des trois côtés du second le sera à plus forte raison, de sorte que le raisonnement de M. Lenthéric s'applique à celui-ci comme à l'autre.

Du reste, dans un intéressant mémoire faisant partie du tom. V.e des *Anciens mémoires de l'Académie royale des sciences* (1666—1699), Frenicle s'était déjà occupé de ce sujet. Il avait remarqué que, lorsque les trois côtés d'un triangle rectangle, en nombres entiers, ne sont pas premiers entre eux, en les divisant par leur plus grand commun diviseur, on obtient pour quotiens les trois côtés de ce qu'il appelle le *triangle rectangle primitif* qui rentre nécessairement dans la première des deux formes ci-dessus.

En classant les nombres, suivant leurs formes diverses, comme le fait Euler, en plusieurs endroits, et notamment dans son *Algèbre* (tom. I, chap. 6 et tom. II, chap. 5) (*). Frenicle

---

(*) Ceci me rappelle que, dans les *Œuvres de Leibnitz*, que je n'ai pas présentement sous la main, on rencontre une lettre de cet illustre géomètre à l'un de ses amis, où il s'exprime à peu près en ces termes : « Je viens » de découvrir une propriété fort singulière des nombres premiers plus grands » que *trois*. Elle consiste en ce que ces nombres, augmentés ou diminués » d'une unité, deviennent nécessairement divisibles par *six*. Bien que je » n'ai pu me démontrer cette propriété, je l'ai vérifiée sur tant de nombres » premiers, que je ne fais aucun doute de sa généralité. Il est seulement » fâcheux que des nombres qui ne sont pas premiers la partagent avec ceux » qui le sont ; car autrement on aurait là un moyen bien simple de distinguer les nombres qui sont premiers de ceux qui ne le sont pas » Il est vraiment surprenant qu'un homme de la force de Leibnitz n'ait pas aperçu, sur-le-champ, que tout nombre entier est de l'une des quatre formes $6n$, $6n\pm1$, $6n\pm2$, $6n\pm3$: et que les nombres premiers plus grands que 3 sont nécessairement des nombres de la seconde forme, qui deviennent tous divisibles par 6 en leur ajoutant ou en leur retranchant une unité.

J. D. G.

avait aussi reconnu que, dans tout triangle rectangle, en nombres entiers, 1.° l'un des côtés de l'angle droit doit être divisible par 4; 2.° l'un des côtés de l'angle droit doit être aussi divisible par 3; enfin, l'un des trois côtés doit être divisible par 5. Or, les trois nombres 3, 4, 5 étant premiers entre eux, il en résulte évidemment que le produit des trois côtés doit être divisible par leur produit, c'est-à-dire, par 60.

Peut-être à l'heure qu'il est aurez-vous déjà reçu, Monsieur, quelque solution directe, bien élégante, des deux premiers problèmes de la page 315 de votre XX.me volume (*); et j'arriverai, sans doute, trop tard pour faire remarquer que ces deux problèmes se ramènent fort simplement à un autre problème traité par Newton, dans son *Arithmétique universelle* (édit. de Leyde, 1732, pag. 84), problème passé présentement dans les traités élémentaires, notamment dans la *Géométrie analytique* de M. Lefebure, et dont voici l'énoncé :

Connaissant les longueurs des cordes de trois arcs d'un même cercle qui réunis composent la moitié de sa circonférence, déterminer le diamètre de ce cercle ?

Voici comment on en déduit la solution de ces deux problèmes :

1.° Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC; soient OA', OB', OC' les perpendiculaires abaissées respectivement de ce centre sur les directions BC, CA, AB, de ces trois côtés; et supposons que ces perpendiculaires étant seules données, il soit question d'assigner la grandeur du rayon du cercle circonscrit.

Concevons que, sur les rayons OA, OB, OC, pris tour à tour pour diamètres, on décrive trois cercles; ces cercles se couperont évidemment deux à deux aux trois points A', B', C'. Alors OA', OB', OC' deviendront des cordes d'arcs de ces cercles, mesurant

(*) Voy. la pag. 65.

des angles respectivement doubles des angles OBA′, OCB′, OAC′, c'est-à-dire, mesurant respectivement les angles B, C, A du triangle dont il s'agit. Puis donc que ces trois angles sont mesurés par une demi-circonférence, il s'ensuit que les trois droites OA′, OB′, OC′, portées consécutivement comme cordes sur l'une de nos trois circonférences, se trouveront en embrasser la moitié. Ainsi, *le rayon du cercle cherché est le diamètre d'un cercle dans la moitié duquel peuvent être inscrites les trois longueurs données.* On pourra donc, par le problème de Newton, assigner la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle dont il s'agit ; et dès lors la détermination des longueurs de ses côtés n'offrira plus aucune difficulté.

2.° Soit, en second lieu, O le centre du cercle inscrit à un triangle ABC ; soient données les trois longueurs OA, OB, OC, et qu'il soit question de déterminer le rayon du cercle.

Soient A′, B′, C′ les points de contact respectifs de ce cercle avec les côtés BC, CA, AB du triangle ; soient menées B′C′, C′A′, A′B′, coupant respectivement OA, OB, OC, en A″, B″, C″. Si, sur OA′, OB′, OC′, pris tour à tour pour diamètres, on décrit trois cercles, ces cercles se couperont deux à deux aux points A″, B″, C″ ; et OA″, OB″, OC″ seront les longueurs de trois cordes de l'un d'eux, dont les arcs composeront entre eux la moitié de sa circonférence.

Cela posé, soient faits

$$\mathrm{OA}=a\ ,\quad \mathrm{OB}=b\ ,\quad \mathrm{OC}=c\ ,\quad \mathrm{OA'}=\mathrm{OB'}=\mathrm{OC'}=r\ ;$$

il en résultera

$$\mathrm{OA''}=\frac{\overline{\mathrm{OB'}}^2}{\mathrm{OA}}=\frac{r^2}{a}\ ,\quad \mathrm{OB''}=\frac{\overline{\mathrm{OC'}}^2}{\mathrm{OB}}=\frac{r^2}{b}\ ,\quad \mathrm{OC''}=\frac{\overline{\mathrm{OA'}}^2}{\mathrm{OC}}=\frac{r^2}{c}\ ;$$

or, puisque les trois cordes

$$\frac{r^2}{a}\,,\quad \frac{r^2}{b}\,,\quad \frac{r^2}{c}\,,$$

sont inscriptibles à un demi-cercle dont le diamètre est r, les trois cordes

$$\lambda\frac{r^2}{a}\,,\quad \lambda\frac{r^2}{b}\,,\quad \lambda\frac{r^2}{c}\,,$$

doivent être inscriptibles, quel que soit λ, à un demi-cercle ayant λr pour diamètre. Prenant donc $\lambda=\frac{k^2}{r^2}$, k étant une longueur arbitraire, nous pouvons dire que les trois cordes de longueur connue

$$\frac{k^2}{a}\,,\quad \frac{k^2}{b}\,,\quad \frac{k^2}{c}\,,$$

sont inscriptibles à un demi-cercle dont le diamètre est $\frac{k^2}{r}$. Ayant donc déterminé, par le problème de Newton, ce diamètre d, nous aurons $d=\frac{k^2}{r}$; d'où $r=\frac{k^2}{d}$; nous aurons donc, de la sorte, le rayon du cercle inscrit au triangle dont il s'agit, et dès lors la détermination de la longueur de ses côtés n'offrira plus de difficulté.

Rennes, le 25 juin 1830.