ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Géométrie transcendante. Application du calcul différentiel à la recherche des rayons de courbure

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 22 (1831-1832), p. 31-36

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1831-1832__22__31_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1831-1832, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Application du calcul différentiel à la recherche des rayons de courbure;

Par M. LE BARBIER.

LORSQU'ON a bien saisi la métaphysique du calcul différentiel, c'est-à-dire, lorsqu'on a rapproché la méthode des infiniment petits de Leibnitz de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, on peut employer la considération des infiniment petits des différens ordres comme un instrument commode dans les applications des calculs différentiel et intégral à la géométrie et à la mécanique. On parvient même, par cette voie, à des résultats plus simples qui semblent propres aux considérations géométriques et auxquels l'analyse seule ne conduirait que difficilement.

Par exemple, l'expression du rayon de courbure qui n'est autre chose que le rayon du cercle osculateur au point de la courbe que l'on considère, se déduit, comme cas particulier, de la théorie générale des courbes osculatrices; théorie qui est extrêmement rigoureuse puisqu'elle repose sur le développement des fonctions en séries (*). Aussi cette méthode doit-elle être préférée dans l'enseignement du calcul différentiel, parce qu'elle y traite ce

(*) Voy. LACROIX, Traité élémentaire, pag. 103.

calcul d'une manière purement algébrique, but principal que s'est proposé Lagrange dans son Traité des fonctions analytiques.

Nous nous proposons, dans cet article, d'appliquer la méthode où l'on considère les infiniment petits des ordres supérieurs comme nuls, par rapport à ceux des ordres moins élevés, à la recherche de diverses expressions du rayon de courbure des courbes.

Puisqu'une courbe peut être considérée comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits. Soient mm', $m'm''$ deux côtés infiniment petits d'une courbe AB (fig. 5). Concevons deux droites nC, n'C, respectivement perpendiculaires sur les milieux n, n' de ces côtés, et concourant en C. Il est clair que si, de leur point de concours C comme centre, et avec sa distance au point m pour rayon, on décrit une circonférence, elle passera par les trois points m, m', m''. La partie de cette circonférence comprise entre les deux points extrêmes coïncidera avec la partie correspondante de la courbe, dont elle mesurera, pour ainsi dire, la courbure au point m'; car, ne pouvant faire passer qu'un cercle unique par les trois mêmes points, celui qui passe par les trois points m, m', m'' approche le plus possible de l'arc m, m', m'' de la courbe. Ce cercle unique s'appelle, comme l'on sait, le *cercle osculateur*, et son rayon est dit le *rayon de courbure.*

Soient OX, OY deux axes rectangulaires auxquels la courbe soit rapportée; soient np, $n'p'$ les ordonnées des points n, n' que l'on peut supposer sur la courbe; soit nq une perpendiculaire du point n sur $n'q'$; et soit enfin désigné par φ l'angle $nn'q$, ou l'angle que fait la tangente au point n avec l'ordonnée $n'p'$.

L'angle que font entre elles les tangentes à la courbe aux points n, n' sera la différentielle de l'angle φ ou dφ. C'est aussi l'angle que font entre eux les deux rayons nC, n'C, de sorte qu'on aura

$$d\varphi = \text{Sin}.d\varphi = \text{Tang}.d\varphi = \frac{nn}{Cn} = \frac{ds}{R},$$

en désignant par s l'arc An et par R le rayon de courbure nC. On aura donc

$$R = \frac{ds}{d\varphi} . \tag{1}$$

Mais le triangle $nn'q$, dans lequel l'angle $nn'q = \varphi$, $nn' = ds$, $nq = dx$ et $n'q = dy$, fournit les égalités suivantes,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Sin.}\varphi = \dfrac{dx}{ds} , & \text{Cos.}\varphi = \dfrac{dy}{ds} , \\[2ex] \text{Tang.}\varphi = \dfrac{dx}{dy} , & \text{Cot.}\varphi = \dfrac{dy}{dx} , \\[2ex] \text{Séc.}\varphi = \dfrac{ds}{dy} , & \text{Coséc.}\varphi = \dfrac{ds}{dx} . \end{array}\right\} \tag{2}$$

En différentiant les six expressions (2), on a

$$\left.\begin{array}{ll} d\varphi = \dfrac{ds.d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{dy} , & d\varphi = -\dfrac{ds.d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{dx} , \\[3ex] d\varphi = \dfrac{dy^2.d\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}{ds^2} , & d\varphi = -\dfrac{dx^2.d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{ds^2} , \\[3ex] d\varphi = \dfrac{dy^2.d\left(\dfrac{ds}{dy}\right)}{dsdx} , & d\varphi = -\dfrac{dx^2.d\left(\dfrac{ds}{dx}\right)}{dsdy} . \end{array}\right\} \tag{3}$$

Si l'on substitue successivement chacune de ces expressions de la différentielle de l'arc φ dans l'expression (1) $\frac{ds}{d\varphi}$ du rayon de courbure, on aura

$$\left.\begin{array}{ll}
R=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)}, & R=-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)}, \\[2ex]
R=\dfrac{\mathrm{d}s^3\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y^2.\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}, & R=-\dfrac{\mathrm{d}s^3\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2.\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)}, \\[2ex]
R=\dfrac{\mathrm{d}s^2\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y^2.\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)}, & R=-\dfrac{\mathrm{d}s^2\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2.\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}.
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Pour avoir les expressions du rayon de courbure relatives aux coordonnées polaires, soit O (fig. 6) un point pris arbitrairement sur le plan de la courbe AB ; soit PQ une droite fixe menée arbitrairement par le point O. Un quelconque n des points de la courbe sera déterminé par l'angle QOn et par la distance On du point O au point n. L'angle QON et la longueur On sont les coordonnées polaires du point n. Les points n, n' étant supposés les analogues de ceux de même dénomination de la figure 5 ; si l'on mène à la courbe des tangentes par ces deux points ; que l'on désigne par φ l'angle que fait la tangente au point n avec le rayon vecteur On, et par φ' l'angle que fait la tangente au point n' avec le rayon vecteur consécutif On', on aura, par les principes du calcul différentiel, $\varphi'=\varphi+\mathrm{d}\varphi$. Soit de plus Ang.QO$n=\omega$; on aura, en désignant par D, le point de concours de Cn et On',

$$Ang.\ \mathrm{ODC}=\mathrm{D}n'\mathrm{C}+\mathrm{DC}n'=90°-\varphi-\mathrm{d}\varphi+\mathrm{DC}n',$$

$$Ang.\mathrm{ODC}=\mathrm{O}n\mathrm{D}+n\mathrm{OD}=90°-\varphi+\mathrm{d}\omega\ ;$$

d'où

$$90°-\varphi-\mathrm{d}\varphi+\mathrm{DC}n'=90°-\varphi+\mathrm{d}\omega,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{DC}n' = \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\omega \ .$$

Ainsi, R désignant le rayon de courbure, on a

$$R = \frac{nn'}{\mathrm{DC}n'} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi+\mathrm{d}\omega} \ . \qquad (6)$$

Menons présentement nq, perpendiculaire sur On', et posons $On=y$, $nq=\mathrm{d}x$; on aura $\mathrm{d}x=y\mathrm{d}\omega$, $qn'=\mathrm{d}y$; au moyen de quoi le rayon de courbure deviendra

$$R = \frac{y\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x+y\mathrm{d}\varphi} \ ; \qquad (5)$$

mais le triangle nqn' fournit les six expressions (2), et par suite les six expressions (3). Substituant donc tour à tour ces six dernières pour $\mathrm{d}\varphi$ dans (6), on aura

$$R = \frac{y\mathrm{d}s\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}s.\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)}, \qquad R = \frac{y\mathrm{d}s\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x^2 - y\mathrm{d}s.\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)},$$

$$R = \frac{y\mathrm{d}s^3}{\mathrm{d}s^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y^2.\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}, \qquad R = \frac{y\mathrm{d}s^3}{\mathrm{d}s^2\mathrm{d}x - y\mathrm{d}x^2\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)},$$

$$R = \frac{y\mathrm{d}s^2\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s\mathrm{d}x^2 + y\mathrm{d}y^2.\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)}, \qquad R = \frac{y\mathrm{d}s^2\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x^2.\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)} \ .$$

Si, pour se conformer aux notations usitées, on remplace y par r, il faudra remplacer $\mathrm{d}x$ par $r\mathrm{d}\omega$ et $\mathrm{d}y$ par $\mathrm{d}r$; et alors les formules ci-dessus deviendront

$$R = \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}s\mathrm{d}\left(\frac{r\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}s}\right)}, \qquad R = \frac{r\mathrm{d}\omega\mathrm{d}s}{r\mathrm{d}\omega^2 - \mathrm{d}s\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)},$$

$$R=\frac{ds^3}{ds^2d\omega+dr^2d\left(\frac{rd\omega}{dr}\right)}\,,\qquad R=\frac{ds^3}{ds^2d\omega-r^2d\omega^2d\left(\frac{dr}{rd\omega}\right)}\,;$$

$$R=\frac{rds^2d\omega}{rdsd\omega^2+dr^2d\left(\frac{ds}{dr}\right)}\,,\qquad R=\frac{ds^2dr}{dsd\omega dr-r^2d\omega^2d\left(\frac{ds}{rd\omega}\right)}\,.$$

Ces expressions du rayon de courbure ne se trouvent pas dans les traités de calcul différentiel , ou du moins on n'y en rencontre que quelques-unes. Comme , suivant les applications que l'on fait du rayon de courbure, telle expression est préférable à telle autre , nous avons pensé qu'il ne serait pas sans utilité d'en offrir ici un tableau complet.