ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GÉRARD LETAC

La théorie de Karamata en bref

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 43, série *Mathématiques*, nº 6 (1970), p. 169-175

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1970__43_6_169_0>

LA THEORIE DE KARAMATA EN BREF

Gérard LETAC

En 1930, J. Karamata publiait un remarquable article [3] où il prouvait, entre autres, que toute fonction lente, c'est-à-dire telle que :

$$(1) \qquad f(x+t) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \forall t \in R$$

et localement intégrable, est en fait la somme d'une fonction absolument continue dont la dérivée tend vers zéro et d'une fonction qui tend vers une limite, le tout quand $x \to +\infty$. Un corollaire de ce théorème de représentation était que la limite de (1) est uniforme par rapport à t sur tout compact. Dans [4] nous montrions que l'hypothèse de mesurabilité seule peut être substituée à celle de locale intégrabilité. Utilisant les mêmes méthodes (relevant davantage de l'analyse harmonique que de la théorie de la mesure) nous allons donner une preuve directe du fait que la limite de (1) est uniforme. Cette remarque permet de court circuiter de façon notable la preuve du théorème fondamental dont le théorème de représentation n'est qu'un corollaire.

Pour le lecteur informé, précisons que Karamata parle de fonctions à variation lente, c'est-à-dire strictement positives et telles que

$$\frac{L(xt)}{L(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \qquad \forall t > 0 .$$

La transformation $f(x) = \text{Log}\, L(e^x)$ montre qu'il est équivalent de parler de fonctions lentes. Nous préférons ce mode d'exposition d'abord parce qu'il est commode que les fonctions lentes forment un espace vectoriel, ensuite parce qu'il est plus agréable de travailler avec le groupe additif des réels plutôt qu'avec celui, multiplicatif, des réels positifs.

Signalons enfin qu'on trouvera dans le livre de W. FELLER [1] un exposé récent et accessible de la théorie, auquel nous nous réfèrerons souvent.

1) Convergence uniforme

R désigne l'ensemble des nombres réels et $R^+ = \{x : x > 0\}$. Une fonction lente est une fonction de R dans R satisfaisant à (1). Si $f(y)\, g(x-y)$ est intégrable par rapport à y pour tout x, on note par :

$$f * g(x) = \int_R f(y)\, g(x-y)\, dy$$

le produit de convolution de f et g.

Si A et B sont des parties de R, $A+B$ note $\{x : x = y+z,\ y \in A,\ z \in B\}$ et $\mathbb{1}_A(x)$ la fonction indicatrice de A. Enfin un semi-groupe S de R est une partie de R telle que $S + S \subset S$.

Nous débutons par une proposition technique assez classique :

Proposition 1

Soient $I = (0, a]$, A_n et B_n deux suites croissantes de parties mesurables de I telles que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = I$. Alors pour tout α de I il existe N tel que $n > N$ entraîne $[\alpha, a] \subset A_n + B_n$.

Preuve. Posons $f_n = \mathbb{1}_{A_n} * \mathbb{1}_{B_n}$ et $f = \mathbb{1}_I * \mathbb{1}_I$. Comme

$$\lim_n \mathbb{1}_{A_n} = \lim_n \mathbb{1}_{B_n} = \mathbb{1}_I,$$

par le théorème de la convergence dominée, $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ pour tout x de R. Comme $f(x) > 0$ sur I, quel que soit $x \in I$, il existe n tel que

$f_n(x) > 0$. Or $f_n(x)$, étant la convolution d'une fonction intégrable et d'une fonction mesurable bornée, est continue (voir [5], page 3). Un argument de compacité montre alors facilement que si $\alpha \in I$, pour n assez grand, $[\alpha, a]$ est contenu dans l'ouvert $O_n = \{x : f_n(x) > 0\}$. Comme $O_n \subset A_n + B_n$, on a la conclusion désirée.

Bien que nous n'en ayions pas besoin dans la suite, mentionnons que cette proposition donne immédiatement la preuve du résultat suivant, généralisé par C. Ionescu-Tulcea dans [2] :

<u>COROLLAIRE</u>

Si g et h sont des fonctions mesurables de R^+ dans R et si f est tel que

$$f(x+y) \leqslant g(x) + h(y) \quad \forall x, y \in R^+$$

f est localement bornée supérieurement sur R^+.

<u>Preuve</u>. Il suffit d'appliquer la proposition 1 à $A_n = \{x : g(x) \leqslant n\}$ et $B_n = \{x : h(x) \leqslant n\}$.

<u>THEOREME 1</u>

Si f est une fonction lente et mesurable $f(x+t) - f(x)$ tend vers zéro uniformément par rapport à t sur tout compact quand $x \to +\infty$.

<u>Preuve</u>. Le nombre positif ε étant fixé, considérons la famille croissante d'ensembles $(S_n(\varepsilon))_{n=1}^{\infty}$ définie par :

$$S_n(\varepsilon) = \{t > 0 : |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon \ t \quad \forall x > n\}.$$

La fonction f étant lente, $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = R^+$. Comme elle est mesurable, S_n

est mesurable. Enfin S_n est un semi-groupe de R, car si t_1 et t_2 sont dans S_n, alors :

$$|f(x+t_1+t_2) - f(x)| \leqslant |f(x+t_1+t_2) - f(x+t_1)|$$
$$+ |f(x+t_1) - f(x)| \leqslant \varepsilon\ (t_1+t_2), \forall x > n.$$

Donc, si K est un compact de R^+, d'après la proposition 1, il existe $N(\varepsilon)$ tel que $n \geqslant N(\varepsilon)$ entraîne $K \subset S_n(\varepsilon)$.

Soit enfin un compact K de R fixé. On peut choisir t_1 dans R^+ assez grand pour que $t_1 - K \subset R^+$. Soit a tel que $t_1 - K \subset (0, a)$.

Alors si $x > N(\frac{\varepsilon}{2a})$, on a pour tout t dans K :

$$|f(x+t_1-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2a}\ (t_1-t) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il s'ensuit qu'il existe $X(\varepsilon)$ tel que si $x > X(\varepsilon)$ et $t \in K$:

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant |f(x+t_1) - f(x+t)| + |f(x+t_1) - f(x)| < \varepsilon.$$

2) Le théorème de Karamata

Le théorème 1 entrainant en particulier qu'une fonction lente et mesurable f est localement bornée sur une demi-droite $[X, \infty)$. Plus précisément, il est démontré dans [4] que pour tout ε positif, il existe $X(\varepsilon)$ tel que $|f(x)| < \varepsilon x$ si $x \geqslant X(\varepsilon)$. Ceci nous permet de considérer les fonctions :

$$f_s(x) = \operatorname{Log} \int_X^x e^{sy + f(y)}\, dy \qquad \text{si } x > X$$
$$= 0 \qquad \text{si } x \leqslant X$$

et

$$f_s^*(x) = \operatorname{Log} \int_x^{+\infty} e^{sy + f(y)}\, dy.$$

Les remarques précédentes montrent que $f_s^*(x)$ est défini pour $s < 0$ et non défini pour $s > 0$ et que $f_s(x) \to +\infty$ si $s > 0$.

Nous empruntons sans démonstration le lemme suivant à W. Feller [1] page 272, dont la preuve est formelle (mais peut cependant être abrégée par la remarque $f_s(x) \to +\infty$ si $s > 0$) :

Lemme. Si f est lente et mesurable, les fonctions $f_s(x) - sx$ si $s \geqslant 0$, et $f_s^*(x) - sx$ si $s < 0$, sont lentes, ainsi que f_0^* si celle-ci existe.

Voici maintenant le grand théorème de Karamata :

THEOREME 2

Si f est lente et mesurable :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + sx - f_s(x) = \text{Log } s \quad \text{si} \quad s \geqslant 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + sx - f_s^*(x) = \text{Log } |s| \quad \text{si} \quad s < 0,$$

ainsi que pour $s = 0$ si f_0^* existe.

Preuve. Si $s \geqslant 0$, $g(x) = f(x) + sx - f_s(x)$ est d'après le lemme, une fonction lente.

Or :

$$\frac{d}{dx} e^{f_s(x)} = e^{sx+f(x)}, \text{ presque-partout.}$$

On a donc l'identité :

$$(2) \qquad e^{g(x)} = \frac{f_s(x+t) - f_s(x)}{\int_0^t e^{g(x+y) - g(x)}\, dy} \; .$$

Mais, d'après le théorème 1), pour tout ε positif il existe $X(\varepsilon)$ tel que $|g(x+y) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in [0, t]$ si $x > X(\varepsilon)$. Comme le numérateur du second membre de (2) tend vers st si $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{g(x)} = s \, ,$$

ce qui donne le résultat désiré. On procède ensuite de la même manière pour f_s^* .

<u>COROLLAIRE</u>

Si f est lente et mesurable, il existe des fonctions mesurables ℓ et h telles que $\lim_{x\to\infty} \ell(x)$ existe et est finie et $\lim_{x\to\infty} h = 0$, et telles que :

$$f(x) = \ell(x) + \int_0^x h(y)\, dy \; .$$

<u>Preuve</u>. D'après le théorème 1, la fonction $g(x) = f(x) + x - f_1(x)$ tend vers zéro si $x \to +\infty$. De plus, l'identité (2) entraîne :

$$\int_{x_0}^{x} e^{g(y)}\, dy = f_1(x) - f_1(x_0) \; .$$

Donc $f(x) = f_1(x_0) + g(x) - x + \int_{x_0}^x e^{g(y)}\, dy$.

En prenant $h(x) = e^{g(x)} - 1$ si $x > x_0$ on a le résultat.

Mentionnons enfin sans démonstration la réciproque du théorème 2, dont la preuve ne présente pas de difficulté (voir [1] page 274).

THEOREME 3

Soit f localement intégrable sur une demi-droite $[X, \infty)$. S'il existe s tel que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) + sx - f_s(x) = \text{Log } c \geqslant -\infty ,$$

alors $f(x) + (s-c)\,x$ est lente.

Un énoncé analogue existe pour f_s^* .

Ajoutons enfin que dans l'appendice de [2] il est montré qu'on peut passer directememt du théorème 1 au corollaire du théorème 2. L'auteur remercie I. Halperin pour cette référence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FELLER, W. (1967), An introduction to probability theory and its applications. Volume 2 - John Wiley, New York.

[2] DE BRUIJN, N.G., Pairs of slowly oscillating functions occuring in asymptotic problems concerning the Laplace transform. Nieuw Archief voor Wiskinde (3) VII, 20-26 (1959).

[3] IONESCU-TULCEA, C.T., Suboperative functions and semi-groups of operators.
Arkiv f. Mat., 4:7 (1960) 55-61.

[4] KARAMATA, J., Sur un mode de croissance régulière, Mathematica (Cluj) Vol. 4 (1930) 38-53.

[5] LETAC, G., On slow variation (à paraître aux Proc. A.M.S.).

[6] RUDIN, W., (1962), Fourier Analysis on groups, Interscience, New York.

Université de Montréal.