ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. JAJTE

Quelques résultats dans la théorie non-commutative des probabilités

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 58, série *Mathématiques*, n° 12 (1976), p. 11-17

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_11_0>

QUELQUES RESULTATS DANS LA THEORIE NON-COMMUTATIVE DES PROBABILITES

R. JAJTE , Université de Lodz (Pologne)

1. Cet exposé est consacré à l'étude des propriétés d'une généralisation de la notion d'espérance mathématique conditionnelle. Cette généralisation a été suggérée par K.R. Parthasarathy dans le travail [6]. Un cas particulier était considéré dans [3]. Il s'agit d'espérance mathématique conditionnelle d'une observable en mécanique quantique.

On connaît d'autres versions non-commutatives de la notion d'espérance mathématique conditionnelle données par M. Umegaki [7], S. Gudder et J.P. Marchand [2].

Ces auteurs considèrent la situation très générale en utilisant la théorie des algèbres de Von Neumann.

La définition due à K.R. Parthasarathy qui fait l'objet de notre intérêt, concerne la situation assez élémentaire mais très intéressante du point de vue de la théorie de la mesure.

2. Considérons un triplet (X, S, m), où X est un espace de Hilbert séparable, S une lattice de projecteurs orthogonaux dans X, et m - la mesure de Gleason sur S. En vertu du théorème de Gleason, on a

$$m(P) = \text{trace } MP \qquad \text{pour} \qquad P \in S ,$$

où M est un opérateur symétrique, non-négatif de trace égale à 1. Désignons par f_1, f_2, ... le système orthonormal dans X constitué des vecteurs propres de M et par λ_1, λ_2 , ... les valeurs propres correspondantes. Donc

$M f_k = \lambda_k f_k$ avec $\lambda_k \geqslant 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$

Désignons par L_m^r l'ensemble formé des opérateurs linéaires A dans X (non-nécessairement bornés) pour lesquels des conditions suivantes (i), (ii) sont vérifiées :

(i) $f_k \in D_A$ (où D_A - domaine de A) pour k = 1, 2, ...

(ii) $||A||_{L_m^r} < \infty$ où, par définition

$$||A||^r_{L_m^r} = \sum_k \lambda_k \quad ||A f_k||^r .$$

On dit que les opérateurs de L_m^1 sont m-intégrables.
En identifiant les opérateurs A et B si $||A - B||_{L_m^r} = 0$, nous pouvons traiter L_m^r pour $r \geqslant 1$ comme un espace de Banach (de Hilbert pour r = 2).

Soit maintenant $A \in L_m^1$, Q (.) une mesure spectrale, B l'opérateur auto-adjoint correspondant à cette mesure, c'est-à-dire $B = \int f \, Q \, (dt)$.

Nous définissons l'espérance mathématique conditionnelle E_m (A / Q) d'observable m - intégrable A par rapport à la mesure spectrale Q (ici "observable"est synonyme 'opérateur auto-adjoint) comme l'opérateur $f\,(B) = \int f\,(s)\; Q\,(ds)$, où f est la dérivée de Radon-Nikodym $\frac{dn_1}{dn_2}$ de la mesure $n_1\,(.) = \sum_k \lambda_k \,(A\, f_k \;,\; Q\,(.)\, f_k)$ par rapport à la mesure $n_2\,(.) = \sum_k \lambda_k \,||Q\,(.)\, f_k||^2$. Plus précisément, l'espérance conditionnelle est ici la classe des opérateurs f (B) où f parcourt la classe des fonctions n_2-équivalentes.

Dans [3] on a considéré le cas de la mesure "pleine" de Gleason, ce qui garantit l'unicité de l'espérance conditionnelle définie ci-dessus.

3. Désignons maintenant par $\mathcal{L}_m$ (Q) l'espace linéaire des opérateurs auto-adjoints Q - mesurable, c'est-à-dire de la forme $\int$ f (s) Q (ds) pour lesquels

$$|||A|^{\frac{1}{2}}||^2_{L^2_m} < \infty \quad .$$

On vérifie aisément que E_m (. / Q) est une application linéaire de L^1_m sur $\mathcal{L}_m$ (Q) et on a l'inégalité :

$$||E_m\ (A/Q)||_{\mathcal{L}_m(Q)} \leqslant 2\ ||A||_{L^1_m} \qquad \text{(cf. [3])}$$

Remarquons ici, qu'en général l'opérateur E_m (A/Q) n'appartient pas à L^1_m comme le prouve l'exemple 3. On peut traiter l'opération linéaire E_m (. / Q) comme le prolongement de la projection orthogonale dans L^2_m (au sous-espace de L^2_m Q des opérateurs Q-mesurable et de carré m-intégrable). Donc on peut traiter l'espérance conditionnelle de A comme la meilleure approximation dans l'état m de l'observable A par un observable mesurable en même temps avec $B = \int s\ Q(ds)$ (cf. [1] et [3]).

<u>Exemple 1</u> (Espérance conditionnelle d'opérateur d'impulsion par rapport à l'opérateur de position).

Considérons l'espace $X = L^2\ (-\infty, \infty)$.

Soit $P = i\ \frac{d}{dt}$ - l'opérateur d'impulsion et $B = \int u\ Q\ (du)$ - l'opérateur de position. En particulier, nous avons $Q\ (Z)\ h = 1_Z\ h$, ou 1_Z - fonction caractéristique de Z , $h \in L^2$. Soit en plus $x \in D_A$, $||x|| = 1$. Posons $m\ (C) = (Cx,\ x)$. Dans cette situation, l'égalité définissant la densité de Radon-Nikodym $f = \frac{dn_1}{dn_2}$ se réduit à la formule

$$i\ \int_Z\ x(t)\ x'(t)\ dt = \int_Z\ f(t)\ x^2(t)\ dt\ ,$$

d'où $E_m\ (P/Q) = f\ (B)$, où $f\ (u) = i\ \frac{x'(u)}{x\ (u)}$.

L'opérateur E_m (P/Q) dans le cas où x (t) $\neq$ 0 presque partout, est donc donné par la dérivée logarithmique de l'état x de l'opérateur de position.

Remarquons, que E_m (E_m (P/Q) / Q) = E_m (P/Q) si E_m (P/Q) $\in L^1_m$. Cette égalité est, comme dans le cas classique, de caractère général et ne concerne pas seulement des opérateurs de position et d'impulsion.

<u>Exemple 2</u> (espérance conditionnelle d'opérateur de position par rapport à l'opérateur d'impulsion).

Considérons les opérateurs P, B = $\int$ u Q (du) et M = x , comme dans l'exemple 1. Maintenant, nous allons calculer l'espérance mathématique conditionnelle E_m (B/P). $\mathfrak{F}$ désigne l'opérateur de Fourier-Plancherel et R (.) - la mesure spectrale d'opérateur P, c'est-à-dire P = $\int$ u R (du). Alors, nous avons

$R(Z) = \mathfrak{F} Q(Z) \mathfrak{F}^*$, l'égalité définissant $f = \frac{dn_1}{dn_2}$ se réduit à

$(Bx, R(Z)\,x) = \int_Z f(u)\, \|R\,du\,(x)\|^2$.

En vertu de l'unitairité de l'opérateur $\mathfrak{F}$ on a

$$(\mathfrak{F}^* Bx,\ Q(Z)\, \mathfrak{F}^* z) = \int_Z f(u)\, (\mathfrak{F}^* x(u))^2\, du$$

Donc

$$\int_Z \mathfrak{F}^* ux(u)\, \mathfrak{F}^* x(u)\, du = \int_Z f(u)\, (\mathfrak{F}^* x(u))^2\, du$$

D'où E_m (B/R) = f(P),

où $f(u) = \dfrac{\mathfrak{F}^* (ux(u))}{\mathfrak{F}^* x(u)}$ (mod. $(\mathfrak{F}^* x(u))^2\, du$).

Exemple 3 (donné par M.A. Paszkiewicz)

Ici, pour chaque mesure m, nous construisons deux opérateurs auto-adjoints A et $B = \int u\, Q\, (du)$ pour lesquels on a $A \in L^1_m$ et $E_m\,(A/Q) \notin L^1_m$ (plus précisément, un des vecteurs propres de M définissant m n'appartient pas au domaine de $E_m\,(A/Q)$).

Soit m la mesure de Gleason donné par l'opérateur $M = \sum\limits_{k=1} a_k \hat{f_k}$ où pour un $x \in X$ nous posons $\hat{x} h = (h, x)x$.

Prenons une suite $(k_n)_{n=0}^{\infty}$ de nombres naturels pour laquelle on a $a_{k_n} \leq 2^{-2n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Posons $g_n = 2^{-n} f_{k_o} + (1 - 2^{-2n})^{1/2} \cdot f_{k_n}$ et définissons par récurrence la suite orthonormale (g_n) ;

$$g_1 = \overline{g_1} \; ; \; g_n = \frac{\overline{g_n} - \tilde{g}_n}{||\overline{g_n} - \tilde{g}_n||} \; ; \text{ où } g_n = \sum_{i=1}^{n-1} (\overline{g_n}, g_i)\, g_i \quad \text{pour } n > 1$$

(Orthonormalisation de Schmidt).

Alors $\overline{g_n} - \tilde{g}_n \perp \tilde{g}_n$, d'où

$$||\overline{g_n} - \tilde{g}_n|| \leq ||\overline{g_n} - \tilde{g}_n + \tilde{g}_n|| = ||\overline{g_n}|| = 1.$$

Donc

$$g_n = b_n^o f_o + b_n^1 f_{k_1} + \ldots + b_n^n f_{k_n}$$

et aussi

$$b_n^n = \frac{(1 - 2^{-2n})^{1/2}}{||\overline{g_n} - \tilde{g}_n||},$$

d'où

$b_n^n \geq (1 - 2^{-2n})^{1/2}$; mais l'inégalité

$(b_n^o)^2 + (b_n^n)^2 \leq ||g_n||^2 \leq 1$, donne $\frac{1}{2} < b_n^n \leq 1$.

Pour $1 \leq i < n$, on a $(\overline{g}_n, g_i) = 2^{-n}\, b_i^o$.

Donc,

$$||\tilde{g}_n||^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\overline{g}_n, g_i)^2 \leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2n}$$

d'où $||\tilde{g}_n|| \leq \frac{2}{3}\, 2^{-n}$,

$$b_n^o > \frac{2^{-n} - ||\tilde{g}_n||}{||\overline{g}_n - \tilde{g}_n||} \geq \frac{1}{3} \cdot 2^{-n}$$

et

$$b_n^i \leq \frac{||\tilde{g}_n||}{||\overline{g}_n - \tilde{g}_n||} \leq \frac{||\tilde{g}_n||}{1 - ||\tilde{g}_n||} \quad , 1 < i < n$$

Posons maintenant

$$A\, f_{k_i} = 2^{-i}\, a_{k_i}^{-1}\, f_{k_i} \quad , i = 0, 1, 2 \ldots$$

$$Q\,(\{n\}) = \hat{g}_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

et posons $Ax = 0$ pour x orthogonal aux vecteurs f_{k_i} $(i = 0, 1, \ldots)$.

On vérifie aisément que $A \in L_m^1$, et que la dérivée de Radon-Nikodym $\frac{dn_1}{dn_2}$ dans la définition de E_m (A/Q) est donnée par la suite

$$f\,(n) = \frac{\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}\, (b_n^i)^2}{\sum_{i=0}^{n} a_{k_i}\, (b_n^i)^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Nous avons donc

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}\, (b_n^i)^2 > 2^{-n}\, (b_n^n)^2 > \frac{1}{4}\, 2^{-n}$$

et aussi

$$\sum_{i=0}^{n} a_{k_i}\, (b_n^i)^2 < 3 \cdot 2^{-2n}$$

d'où $f\,(n) > \frac{1}{12}\, 2^n$

Les formules précédentes montrent que

$$\int f^2(u)\, ||Q(du)\, f_{k_o}||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,(b_n^o)^2$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{12}\ 2^{-n})^2 \cdot (\frac{1}{3}\ 2^{-n})^2 = \infty$$

et nous concluons que $f_{k_o} \notin \mathcal{D}\, E_m\,(A/Q)$, q.e.d.

Exemple 4. Soit $f_1, f_2, \ldots$ le système orthonormal de Rademacher, $a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombres positifs

$$\sum_k a_k = 1\ ,\ e\,(x) = \sum_k a_k\, f_k\,(x)\ ,\ Q\,(z)\, f = 1_Z\, f\ .$$

Alors $E_m\,(e\,/\,Q) = \int f(u)\, Q(du)$, où $f(u) = e(u) \sum_{k=1} a_k^2\, f_k(u)$.

Dans notre cas, l'opérateur $E_m\,(e/Q)$ est défini uniquement, bien que la mesure m ne soit pas "pleine" (le système de Rademacher n'est pas complet)

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.R. BAHADUR, Measurable subspaces and subalgebras, Proc. Am. Math. Soc., 6/1955, 565-570

[2] S. GUDDER, and I.P. MARCHAND, Noncommutative Probability on von Neumann Algebras, Journal of Math. Phys. 13

[3] R. JAJTE, Conditional expectations of observables. Proc. Symposium to Honour Jerzy Neyman, Warszawa, April 3-10, 1974, to appear

[4] M. LOEVE, Probability theory, Princeton, N. Jersey, 1960.

[5] M. NAKAMURA and H. UMEGAKI, On von Neumann's theory of measurements in quantum statistic, Math. Japan 7, 1962, 151-157.

[6] K.R. PARTHASARATHY, Probability theory on the closed subspaces of a Hilbert space in Russian, translated from a preprint / Matematika, Sbornik pierevodov, 1970, 16 ; 5, 102-123.

[7] H. UMEGAKI, Conditional expectations in an operator algebra I, II, Tohoku Math. J.6, 1954, 401-457 ; 8, 1956, 86-100.