ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

L. SCHMETTERER

Sur quelques résultats asymptotiques pour le processus de Robbins-Monro

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 58, série *Mathématiques*, nº 12 (1976), p. 166-176

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_166_0>

SUR QUELQUES RESULTATS ASYMPTOTIQUES POUR LE PROCESSUS DE ROBBINS-MONRO.

L. SCHMETTERER , Université de Vienne (Autriche)

I - Soient H un hilbert séparable et $\{X_i\}$ et $\{Y_i\}$ deux suites d'éléments aléatoires qui prennent leurs valeurs dans H. On suppose que $E(||Y_n||)$ existe pour $n \geqslant 1$ où $||\bullet||$ désigne la norme de H. Par $<\bullet,\bullet>$ on désigne le produit scalaire dans H.

Soit $E(Y_i|X_1,\dots, X_i) = M(X_i)$, $i \geqslant 1$, p.s. où M est une application mesurable de H dans H.

Soit $\{a_n\}$ une suite de réels positifs. Si la relation :

$$X_{n+1} = X_n - a_n Y_n \tag{1.1}$$

est satisfaite pour tous les $n \geqslant 1$ alors $\{X_n\}$ est appelée processus de Robbins-Monro.

Les propriétés de ce processus ont été étudiées presque toujours sous la condition :

$$C_n = E(||Y_n - M(X_n)||^2) \leqslant c_1 \text{ (1)} \quad , \quad n \geqslant 1 \tag{1.2}$$

Il est vrai que dans un travail de Gladyšev [1] on suppose que :

$E(||Y_n-M(X_n)||^2 \mid X_1,\dots, X_n) \leqslant c_2 + c_3 ||X_n|| + c_4 ||X_n||^2$, p.s. mais Gladyšev montre au cours de ce travail que $E(||X_n||^2) \leqslant c_5$ c'est à dire qu'on est ramené à la condition (1.2).

Souvent on choisit $a_n = n^{-1}$ de sorte que la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \tag{1.3}$$

(1) c_1, c_2,... désignent toujours des constantes positives.

est satisfaite. Nous étudierons quelques propriétés asymptotiques du processus défini par (1.1) pour des suites $\{C_n\}$ et $\{a_n\}$ qui ne satisfont la condition (1.2.) respectivement la condition (1.3). Nous considérons surtout le comportement à l'infini de la suite $P\,(||X_n|| \geqslant \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$. Pour cela on s'occupera de la convergence de $\{X_n\}$ en moyenne en rappelant quelques résultats qui se trouvent déjà dans [2] . Puis nous comparerons ces résultats à des théorèmes que l'on peut obtenir en utilisant une légère extension d'une méthode due à Révész [3], [4]. Dans nos développements nous utiliserons quelques idées qui appartiennentà l'analyse classique, notamment à la théorie de sommabilité des suites. Soit $\mathcal{B}$ une matrice infinie.

Soit :

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ une suite de nombres réels.}$$

Si $t = \mathcal{B}.\, s$ existe et si $\{t_n\}$ converge, alors s est dite $\mathcal{B}$-sommable. $\mathcal{B}$ est nommée permanente si toute suite $\{s_n\}$ convergente vers une limite finie est $\mathcal{B}$-sommable et si de plus $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. Si c'est vrai aussi pour $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ alors $\mathcal{B}$ est appelée totalement permanente.

Soit $\{a_n\}$ une suite positive satisfaisant à la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad , \quad 0 < a_i < 1,\ i \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Il est facile de voir que la matrice $\mathcal{G}_1 = \left\{ a_i \prod\limits_{j=i+1}^{n} (1-a_j) \right\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ n\geqslant 1}}$ est permanente. Si on remplace a_i par $\alpha\, a_i$, $i \geqslant 1, \alpha > 0$ on obtient la matrice $\mathcal{G}_\alpha$ qui est aussi naturellement permanente. Puisque les éléments de $\mathcal{G}_\alpha$ sont positifs, $\mathcal{G}_\alpha$ est totalement permanente. Il est facile de démontrer qu'il existe une matrice σ_α qui est permanente telle que $\mathcal{G}_\alpha = \sigma_\alpha\, \mathcal{G}_1$. Il en découle que toute suite $\mathcal{G}_1$-sommable est aussi $\mathcal{a}_\alpha$- sommable pour un α positif quelconque.

Donnons une autre définition : soit $\mathcal{B} = (b_{nj})_{\substack{1\leq j\leq n\\ n\geq 1}}$ une matrice triangulaire permanente qui jouit de la propriété suivante :

Soit $b_{nj} \neq 0, 1 \leq j \leq n, n \geq 1$ et soit $0 < \frac{b_{nj}}{b_{n'j}} \leq c_6$, $1 \leq j \leq n' \leq n$. Pour toute suite réelle $\{s_N\}$, pour tout m et tout n avec $m \leq n$, il existe un m' tel que

$\left| \sum_{N=1}^{m} b_{nN}\ s_N \right| \leq \frac{b_{n1}}{b_{m'1}} \left| \sum_{N=1}^{m'} b_{m'N}\ s_N \right|$, $1 \leq m' \leq m \leq n$. Si cette propriété est satisfaite, on dit que $\mathcal{B}$ obéit à un théorème de moyenne. Il est facile de voir qu'une telle matrice $\mathcal{B}$ jouit de la propriété suivante : soit $t = \mathcal{B}s$ et $t_n = o(1)$ (resp. $O(1)$).

Alors $s_n = o\ (\frac{1}{b_{n\,n}})$ (resp. $O\ (\frac{1}{b_{n\,n}})$).

<u>Lemme 1.1</u>

La matrice $\mathcal{a}_1$ et par conséquent toutes les matrices $\mathcal{a}_\alpha$ obéissent à un théorème de moyenne. Donc, si $t = \mathcal{a}_\alpha\ s$ et $t_n = O(1)$ alors $s_n = O\ (\frac{1}{a_n})$.

II - <u>Théorème 2.1</u>

Soient X_n, Y_n, $n \geq 1$ des éléments aléatoires à valeurs en H qui satisfont à la condition (1.1), c'est à dire X_n est un processus de Robbins-Monro. Soit :

$$E(Y_n \mid X_1, \ldots, X_n) = M(X_n),\ n \geq 1,\ \text{p.s.} \tag{2.1}$$

où M est une application mesurable de H dans H qui satisfait aux conditions suivantes : il existe des nombres non-négatifs A, B et un nombre positif K tels que pour tous $x \in H$

$$||M(x)|| \leq A||x|| + B \tag{2.2}$$

et

$$\langle x, M(x)\rangle \geq K\ ||x||^2 \tag{2.3}$$

Nous supposerons que la suite positive $\{a_n\}$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \tag{2.4}$$

$$a_n \to 0$$

Pour un $\gamma > 0$ (2.5)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \gamma a_n + o(a_n), \; n \geq 1 \tag{2.6}$$

Soit $\mathcal{A}_1$ la matrice $\left(a_i \prod_{j=i+1}^{n} (1-a_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ n\geq 1}}$. Si $E(||X_1||^2)<\infty$ et si $2K - \gamma > 0$

alors la $\mathcal{A}_1$-sommabilité de la suite $\{C_n\}$ définie par (1.2) implique que $E||X_n||^2 = O(a_n)$. La $\mathcal{A}_1$-sommabilité de $\{C_n\}$ peut être remplacée par l'hypothèse que la suite :

$$\mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ est bornée.}$$

Si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \; a_n \; C_n = \infty$ alors on peut toujours définir un processus de Robbins-Monro qui satisfait à toutes les autres conditions de ce théorème tel que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \; a_n^{-1} E||X_n||^2 = \infty$.

Nous indiquons la démonstration simple. En utilisant la notation $b_n = E||X_n||^2$ on obtient sans la mondre difficulté l'inégalité

$$a_{n+1}^{-1} \; b_{n+1} \leq a_n^{-1} \; b_n \; (1-a_n(2K-\gamma) + o(a_n)) + a_n(2B^2 + o(1) + C_n + o(C_n)) \tag{2.7}$$

Si $1 > a_n(2K-\gamma) + o(a_n)$. On peut donc supposer que cette inégalité est correcte pour tous les $n \geq 1$. Il s'ensuit que :

$$a_n^{-1} \; b_n \leq a_1^{-1} b_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1-a_i(2K-\gamma) + o(a_i))$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} a_i (2B^2 + o(1) + C_i + o(C_i)) \sum_{j=i+1}^{n-1} (1-a_j(2K-\gamma) + o(a_j)) \tag{2.8}$$

Par conséquent si $\{C_n\}$ est $\mathcal{A}_1$-sommable ou si $\mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ est au moins bornée il

s'ensuit que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \quad a^{-1} \; b_n < \infty$.

D'autre part on peut construire sans la moindre difficulté un processus de Robbins-Monro qui satisfait aux conditions (2.1) - (2.6) tel que le signe d'égalité apparaisse toujours dans (2.7). Alors la suite $a_n^{-1} \; b_n$ est essentiellement la $\mathcal{A}_1$-transformée de la suite $\{C_n\}$. Si donc $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \; C_n \; a_n = \infty$ alors la suite $\{a_n^{-1} \; b_n\}$ ne peut pas être bornée (Voir lemme 1.1).

La relation $E(||X_n||^2) = O(a_n)$ implique $P(||X_n|| \geqslant \varepsilon) = O\left(\frac{a_n^2}{\varepsilon^2}\right)$ ou encore

$$P(||X_n|| \geqslant \varepsilon) = O\left(\frac{a_n^{1/2}}{\varepsilon}\right) \tag{2.9}$$

Soit $Z_n = Y_n - M(X_n)$. La condition nécessaire pour la $\mathcal{A}_1$-sommabilité de la suite $\{C_n\}$ s'écrit sous la forme $E(||Z_n||^2) = O(a_n^{-1})$. Cette relation est naturellement remplie si :

$$||Z_n \; a_n^{1/2}|| \leqslant c_7 \quad , \text{ p.s.} \tag{2.10}$$

Nous allons remplacer (2.10) par une condition plus forte à savoir $||Z_n|| = \varepsilon_n \; a_n$, $n \geqslant 1$ où $\{\varepsilon_n\}$ est une suite positive qui converge vers zéro. Nous trouverons que sous cette condition on obtient des résultats meilleurs que dans (2.9) en utilisant la méthode de Revesz mais seulement dans le cas ou les ε_n sont "assez petits".

III - D'abord on montre le

<u>Lemme 3.1</u>

Soit $\{a_n\}$ une suite positive qui satisfait les conditions (2.4) et (2.5). On peut donc supposer que $a_n < 1, n \geqslant 1$. Soit φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty \tag{3.1}$$

et telle que pour $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=\varphi(n)}^{n} a_k^{1/2} \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) \leqslant c_8 \tag{3.2}$$

Si $\{a_n\}$ vérifie de plus la condition (2.6) pour un $\gamma < 1$ alors on peut choisir

$$\varphi(n) = \left[a_n^{-1/2} \right], \; n \geqslant 1 \tag{3.3}$$

La démonstration découle immédiatement du fait que sous l'hypothèse (2.6) la suite $\left\{ a_k^{1/2} \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) \right\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est non-décroissante au moins pour tous les n suffisament grands si $\gamma < 1$.

Lemme 3.2

Soit $\delta > 0$ un réel arbitraire. On suppose que $\{a_n\}$ est une suite positive satisfaisant aux conditions (2.4) et (2.5). Soit $\{\eta_n\}$ une suite des variables aléatoires réelles qui vérifient les hypothèses suivantes :

$$E(\eta_{i_1} \; \eta_{i_2} \; \ldots \; \eta_{i_j}) = 0, \; i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \; k \geqslant 1 \tag{3.4}$$

$$|\eta_n| \leqslant \varepsilon_n \; a_n^{-1/2} \quad , \; n \geqslant 1 \quad , \quad \text{p.s.} \tag{3.5}$$

où $\{\varepsilon_n\}$ est une suite positive qui converge vers zéro. Soit φ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie dans le lemme 3.1. Soit $\{\tau_n\}$ une suite positive vérifiant les hypothèses :

$$\tau_n \max_{\varphi(n) < k \leqslant n} \varepsilon_k^2 = o\,(1) \tag{3.6}$$

et

$$\tau_n \to \infty \tag{3.7}$$

Alors on a pour $1 \leqslant l \leqslant n$

$$P\left(\sum_{k=l}^{n} \eta_k \; a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) \geqslant \delta \right) \leqslant \exp(-\tau_n \; \delta/2) \tag{3.8}$$

si n est suffisament grand.

Démonstration :

(3.2) et (3.5) impliquent l'existence d'un entier $m(\delta)$ tel que

$$\sum_{k=m(\delta)}^{\varphi(n)} |\eta_k| \, a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) \leqslant \delta/8, \text{ p.s. pour tous les } n \text{ avec } \varphi(n) \geqslant m(\delta).$$

Il s'ensuit de (2.4), (2.5) et (3.5) que $\sum_{k=1}^{m(\delta)-1} |\eta_k| \, a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) \leqslant \delta/8$, p.s.

si n est suffisament grand. Il suffit donc de montrer que pour $l \geqslant \varphi(n)$

$P\left\{ \sum_{l<k\leqslant n} \eta_k \, a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) \geqslant 3\,\delta/4 \right\} \leqslant \exp(-\tau_n \, \delta/2)$. Désignons

$\left\{ \sum_{l<k\leqslant n} \eta_k \, a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) \geqslant 3\,\delta/4 \right\}$ par $M_{n,\delta}$. Alors suivant la méthode de

Revesz on obtient : $P(M_{n,\delta}) = P\left\{ \exp\left(\tau_n \sum_{l<k\leqslant n} \eta_k \, a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j)\right) \geqslant \exp \frac{3\tau_n \delta}{4} \right\}$

$\leqslant \exp\left(-\frac{3\tau_n\delta}{4}\right) \quad E\left(\exp\left(\tau_n \sum_{l<k\leqslant n} \eta_k \, a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j)\right)\right)$. En supposant que

$\max_{\varphi(n)<k\leqslant n} a_k^{1/2} \leqslant \max_{\varphi(n)<k\leqslant n} \varepsilon_k$ pour n suffisament grand (ou en redéfinissant

la suite $\{\tau_n\}$ d'une manière appropriée sans violer (3.6) et (3.7)) on peut supposer que :

$$\tau_n \, |\eta_k| \, a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) \leqslant 1 \text{ pour } \varphi(n) < k \leqslant n.$$

On trouve donc que :

$$P(M_{n,\delta}) \leqslant \exp\left(\frac{-3\tau_n\delta}{4}\right) \; E\left(\prod_{l<k\leqslant n} \left(1 + \tau_n \eta_k a_k \prod_{j=K+1}^{n} (1-a_j) + \tau_n^2 \, \eta_k^2 \, a_k \left(\prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j)^2\right)\right)\right)$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{-3\tau_n\delta}{4}\right) E\left(\prod_{l<k\leqslant n} \left(1 + \tau_n \, \eta_k \, a_k \prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j) + \tau_n^2 \, \varepsilon_k^2 \left(\prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j)^2\right)\right)\right)$$

En tenant compte de (3.5). Utilisant les relations (3.4) on a finalement

$$P(M_{n,\delta}) \leqslant \exp(\frac{-3\tau_n \delta}{4}) \exp(\tau_n^2 \sum_{\varphi(n)<k\leqslant n} \varepsilon_k^2 \; a_k (\prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j))^2).$$

$\mathcal{a}_1$ étant une matrice permanente on obtient que $\sum_{\varphi(n)<k\leqslant n} a_k (\prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j))^2 \leqslant c_g$,

$n \geqslant 1$. Par conséquent on a :

$$\tau_n \sum_{\varphi(n)<k\leqslant n} \varepsilon_k^2 \; a_k \; (\prod_{j=k+1}^{n} (1-a_j))^2 \leqslant \delta/4$$

pour n suffisament grand en tenant compte de (3.6). L'inégalité (3.8) est donc démontrée.

Le lemme 3.2 permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1

Soit $\{X_n\}$ un processus de Robbins-Monro donné par (1.1). Supposons que les conditions (2.1) - (2.5) soient satisfaites. De plus supposons que :

$$||Z_n|| = \varepsilon_n a_n^{-1/2} \quad , \quad n \geqslant 1, \text{ p.s.} \tag{3.9}$$

où $\{\varepsilon_n\}$ est une suite positive qui converge vers zéro. Soit $\{\tau_n\}$ définie par (3.6) et (3.7). Soit de plus $\log n = o(\tau_n)$ (3.10)

Pour simplifier nous supposons que $\max_{\varphi(n)<k\leqslant n} a_k^{1/2} \leqslant \max_{\varphi(n)<k\leqslant n} \varepsilon_k$ pour tous les

n suffisament grands.

Alors si $||X_1||$ est bornée p.s., on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(||X_n|| \geqslant \varepsilon) \leqslant n \exp(-\tau_n k_1 \varepsilon/8) \tag{3.11}$$

pour tout K_1 satisfaisant à $0 < K_1 < K$ si n est suffisament grand. Donc

$P(||X_n|| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \varepsilon/2$. Il est facile de voir que pour tout K_1 satisfaisant à $0 < K_1 < K$ et pour tous les n suffisament grands les inégalités suivantes sont vraies si $||X_n|| \geqslant \delta$:

$$||X_{n+1}|| \leqslant ||X_n|| \,(1-a_n K_1) + o\,(\frac{a_n}{\delta}) - a_n \frac{<X_n, Z_n>}{||X_n||} \qquad (3.12)$$

Sans restriction de généralité on peut supposer que (3.12) est remplie pour $n \geqslant 1$ et que l'on a toujours $1-a_n K_1 > 0$.

Définissons pour $0 \leqslant l \leqslant n-1$

$$M_l = \{||X_l|| < \delta \ , ||X_{l+1}|| \geqslant \delta, \ldots, ||X_{n-1}|| \geqslant \delta \ , ||X_n|| \geqslant \delta \}.$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$P(||X_n|| \geqslant \varepsilon) = \sum_{l=0}^{n-1} P(M_l) \qquad (3.13)$$

Si $||X_{l+1}|| \geqslant \delta, \ldots, ||X_{n-1}|| \geqslant \delta$ sont remplies, alors (3.12) implique pour $0 \leqslant l < n$ les inégalités

$$||X_n|| \leqslant ||X_{l+1}|| \prod_{j=l+1}^{n-1} (1-a_j K_1) + \frac{1}{\varepsilon} (\sum_{k=l+1}^{n-1} o(a_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} (1-a_j K_1))$$

$$- \sum_{h=l+1}^{n-1} a_k \frac{<X_k, Z_k>}{||X_k||} \prod_{j=k+1}^{n-1} (1-a_j K_1)$$

Il en découle que :

$$P(M_l) \leqslant P(\left\{ - \sum_{k=l+1}^{n-1} a_k \frac{<X_k, Z_k>}{||X_k||} \prod_{j=k+1}^{n-1} (1-a_j K_1) \geqslant \right.$$

$$\left. -||X_{l+1}|| \prod_{j=l+1}^{n-1} (1-a_j K_1) - \frac{1}{\varepsilon} (\sum_{k=l+1}^{n-1} o(a_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} (1-a_j K_1) + ||X_n|| \right\} \cap$$

$$\left\{ ||X_n|| \geqslant \varepsilon \right\} \cap \left\{ ||X_l|| < \delta \right\}) \qquad (3.14)$$

$\mathfrak{a}_{K_1}$ étant une matrice permanente on trouve que $\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=l+1}^{n} o(a_k) \prod_{j=k+1}^{n-1} (1-a_j K_1) \to 0$

pour $n \to \infty$ uniformément en l. De plus $||X_l|| < \delta$ implique

$||X_{l+1}|| \prod_{j=l+1}^{n-1} (1 - a_j k_1) \leqslant 3\,\delta/2$ uniformément pour $1 \leqslant l < n$ si n est suffisament grand.

On a aussi $||X_1|| \prod_{j=1}^{n-1} (1-a_j K_1) \leqslant \frac{3\delta}{2}$ pour n suffisament grand.

Définissons $\eta_k = - \frac{<X_k, Z_k>}{||X_k||} 1_{\{||X_k|| > 0\}}$. Il s'ensuit de (2.1) que

$E(Z_n \mid X_1, \dots, X_n) = 0$ et par conséquent que $E(\eta_n \mid X_1, \dots, X_n) = 0$. De plus

η_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $X_1, \dots, X_n$, $n \geqslant 2$.

Il en découle que les η_n vérifient l'hypothèse (3.4). De plus $|\eta_k| \leqslant \varepsilon_k a_k^{-1/2}$, $k > 1$

. Il s'ensuit donc de (3.14) que

$$P(M_l) \leqslant P\left(\sum_{k=l+1}^{n-1} K_1 a_k \eta_k \prod_{j=k+1}^{n-1} (1-a_j K_1) \geqslant 2^{-1} \delta K_1 \right) \text{ pour } 0 \leqslant l < n \text{ si}$$

n est suffisament grand. En utilisant la relation (3.13) et en appliquant le lemme 3.2 on obtient l'assertion (3.11). En tenant compte de (3.10) on obtient $P(||X_n|| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

IV - On voit donc que la méthode de Revesz donne des résultats qui sont moins bons que ceux obtenus dans II. si τ_n est "trop petit", c'est à dire si les ε_n sont "trop grands". C'est aussi vrai pour le cas $a_n = 1/n$ qui a été étudié en détail dans les travaux [3] et [4] sous la condition $\varepsilon_n = n^{-B}$, $0 < B < 1/2$. Mais si on choisit par exemple $\varepsilon_n = (\log \log n)^{-1}$ on n'obtient pas $P(||X_n|| \geqslant \varepsilon) = O(n^{-1/2})$ comme dans (2.9).

Mais si les ε_n sont "assez petits" on obtient des résultats beaucoup plus forts avec la méthode de Revesz. Considérons par exemple le cas où $a_n = n^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ et $\varepsilon_n = n^{-\alpha'}$ $0 < \alpha' < \alpha/2$, $n \geqslant 1$. Cette suite $\{a_n\}$ vérifie les hypothèses (2.4) (2.6) avec $\gamma = 0$. On peut donc choisir $\varphi(n) = [n^{\alpha/2}]$ et par conséquent $\max_{\varphi(n) < k \leqslant n} \varepsilon_n = n^{-\alpha\alpha'/2}$. Il en découle que $\tau_n = o(n^{\alpha\alpha'})$ satisfait aux conditions (3.6) et (3.7). Par conséquent $P(||X_n|| \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp(-b(\varepsilon)n^d$ pour $b(\varepsilon) > 0$ et un d positif quelconque $< \alpha\alpha'$ ∎

B I B L I O G R A P H I E

[1] GLADYŠEV E.G.

On stochastic approximation
Théor. Prob. Appl. 10 (1965) pp. 275-278.

[2] SCHMETTERER L.

L'approximation stochastique
Université de Clermont-Ferrand, cours de D.E.A. A.E.A. de mathématiques appliquées (1969).

[3] REVESZ P.

Robbins-Monro procedure in a Hilbert space and its application in the theory of learning processes I.,
Studia Sc. Math. Hung. 8 (1973) pp. 391-398.

[4] REVESZ P.

Robbins-Monro Procedure in a Hilbert space II
Studia Sc. Math. Hung. 8 (1973) pp. 469-472.