ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
*Série Mathématiques*

J. PELLAUMAIL

# L'intégrale stochastique considérée comme une intégrale par rapport à une mesure vectorielle

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 58, série *Mathématiques*, n° 12 (1976), p. 20-29

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_20_0>

# L'INTEGRALE STOCHASTIQUE CONSIDEREE COMME UNE INTEGRALE PAR RAPPORT A UNE MESURE VECTORIELLE

J. PELLAUMAIL , Université de Rennes

## INTRODUCTION -

Le but de cet exposé est de donner les éléments de base de la construction de l'intégrale stochastique (cf. [ ] et []) considérée comme intégrale vectorielle (cf.[ ]). Pour alléger la présentation, on se limite au cas où on veut donner un sens au symbole $\int YdX$ où Y et X sont des processus réels : l'intégrale stochastique est alors définie comme intégrale du processus Y, considéré comme fonction réelle, par rapport à une "mesure vectorielle" définie sur la tribu des prévisibles et associée au processus X.

Au paragraphe A, on indique quelques notions élémentaires sur l'intégration vectorielle. Au paragraphe B, on donne les hypothèses et notations utilisées par la suite. Au paragraphe C, on construit l'intégrale stochastique. Au paraphe D, on étudie le cas où l'on intègre par rapport à une martingale de carré intégrable. Enfin, au paragraphe E on indique quelques résultats dans le prolongement de ce qui précède.

## A - PRELIMINAIRE SUR L'INTEGRATION VECTORIELLE

### A - 1 : POSITION DU PROBLEME

Soit $\Omega'$ un ensemble et $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de $\Omega'$. Le problème général de l'intégration vectorielle est de donner un sens au symbole $\int ydx$ où y ( resp. x) est une fonction définie sur $\Omega'$ ( resp. $\mathcal{A}$) et à valeurs dans un espace vectoriel (ou même un groupe !), x étant simplement additive. Si x et y sont à valeurs dans des espaces de Banach, on peut trouver une étude d'une telle intégrale dans [ ] .

Bien entendu, une telle intégrale doit satisfaire a quelques propriétés, notamment elle doit être bilinéaire et si $y = a \cdot 1_A$, avec A élément de $\mathcal{A}$, on doit avoir $\int ydx = a.x\,(A)$. On en déduit que, si $y = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 1_{A(k)}$, avec, pour tout k, $A_{(k)}$ élément de $\mathcal{A}$, (y fonction $\mathcal{A}$-étagée), on doit avoir $\int ydx = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x\,(A(k))$. Le problème est d'étendre la définition de l'intégrale à une classe de fonctions plus vaste que celle des fonctions $\mathcal{A}$-étagées.

Dans la suite de cet exposé, nous n'aurons besoin de cette intégrale que si y est une fonction à valeurs réelles et si x est dans l'un des deux cas étudiés ci-dessous. On notera $\mathcal{F}'$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

## A - 2 : PREMIER CAS

x est à valeurs dans un espace de Banach E dont la norme sera notée $||.||$ et il existe une mesure positive m, définie et $\sigma$-additive sur $\mathcal{A}$ et telle que, pour tout élément A de $\mathcal{A}$, $||x(A)|| \leqslant m(A)$.

On vérifie alors immédiatement qu'on peut définir une intégrale $\int ydx$ pour toutes les fonctions y appartenant à $L_1\ (\Omega', \mathcal{F}', m)$ et que $|| \int ydx || \leqslant \int |y|.d\,m$.

## A - 3 : DEUXIEME CAS

x est à valeurs dans un espace de Hilbert H, il existe une mesure positive m définie et $\sigma$-additive sur $\mathcal{A}$ et les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) si A et B appartiennent à $\mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$, x(A) est orthogonal à x(B)

(ii) si A appartient à $\mathcal{A}$, $||x(A)||^2 = m(A)$. On vérifie alors facilement que l'intégrale $\int ydx$ peut-être définie, de façon unique, comme une isométrie linéaire de $L_2\ (\Omega', \mathcal{F}', m)$ dans H (l'intégrale étant toujours définie comme indiquée en A-1 pour les fonctions étagées). Il suffit, en effet, de vérifier que $|| \int ydx ||^2 = \int |y|^2\, dm$ pour toute fonction $\mathcal{A}$-étagée : or, si $y = \sum_{i \in I} a_i \cdot 1_{A(i)}$ avec, pour tout i, A(i) élément de $\mathcal{A}$, on a

$$|| \int ydx ||^2 = || \sum_{i \in I} a_i \cdot x[A(i)] ||^2 = \sum_{i \in I} a_i^2 \cdot || x(A_i) ||^2 = \int y^2 \cdot dm$$

Notons que, dans ces deux cas, l'intégrale vectorielle construite satisfait au "théorème de convergence dominée" : notamment, l'application $A \rightsquigarrow \int_A dx = \int 1_A \cdot dx$ est $\sigma$-additive.

## A - 4 : SEMI-VARIATION

Dans le cas général, il est commode d'utiliser la norme de la semi-variation qui est définie par :

$|||x||| = \text{Sup} . \| \int y . dx \|$, cette borne supérieure étant prise pour toutes les fonctions réelles $\mathcal{A}$-étagées uniformément bornées par 1.

## B - DONNEES ET NOTATIONS

*Pour toute cette étude on se donne :*

- *un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *dont la famille des ensembles de mesure nulle sera notée* $\mathcal{N}$.
- *un intervalle* $T$ *de* $R$ *: pour alléger la présentation on suppose* $T$ *fermé soit* $T = [0, 1]$.
- *une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *qui contiennent toutes* $\mathcal{N}$.

*On pose :*

- $T' = T \setminus \{0\}$ *et* $\Omega' = \Omega \times T'$
- $\mathcal{B}$ = *famille des "rectangles" de la forme* $(H \times ]s, t])$ *où* $s$ *et* $t$ *dont deux éléments de* $T$ *avec* $s < t$ *et* $H$ *est un élément de* $\mathcal{F}_s$ *; les éléments de* $\mathcal{B}$ *sont donc des parties de* $\Omega'$.
- $\mathcal{A}$ = *algèbre de parties de* $\Omega'$ *engendrée par* $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{F}'$ = *tribu de parties de* $\Omega'$ *engendrée par* $\mathcal{A}$.
- $L_0(\Omega, \mathcal{F}', P)$ = *ensemble* $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}', P)$ *des fonctions réelles* $\mathcal{F}'$*-mesurables quotienté par la relation d'équivalence associée à l'égalité P.p.s.*

*Par convention :*

- *si* $V$ *est la partie vide de* $T$, *on pose* $\inf. \{t : t \in V\} = 1$
- *quand on parlera de processus, ce sera toujours par rapport à la base de processus* $(\Omega, \mathcal{F}', P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$.

*Si* $\sigma$ *et* $\sigma'$ *sont deux temps d'arrêt, on notera* $]\sigma, \sigma']$ *(resp.* $[\sigma, \sigma']$, $[\sigma, \sigma'[$ *(intervalle stochastique) l'ensemble des couples* $(\omega, t)$ *tels que* $\sigma(\omega) < t \leqslant \sigma'(\omega)$ *(resp.* $\sigma(\omega) \leqslant t \leqslant \sigma'(\omega)$, $\sigma(\omega) \leqslant t < \sigma'(\omega)$*)* *(*$]\sigma, \sigma']$ *est donc une partie de* $\Omega'$*). Par abus de notation, si* $s$ *et* $t$ *sont deux éléments de* $T$, $]s, t]$ *pourra désigner, suivant les cas, soit une partie de* $T$, *soit la partie* $(\Omega \times ]s, t])$ *de* $\Omega'$ *(*$s$ *et* $t$ *étant alors considérés comme des temps d'arrêt constants).*

## C - CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE $\int YdX$

### C - 1 : MESURE STOCHASTIQUE

Soit X un processus cadlag. On désignera par $x = \phi(X)$ la fonction simplement additive, à valeurs dans $L_0$, définie sur $\mathcal{A}$ par :

$x(H \times ]s,t]) = 1_H.(X_t - X_s)$ pour $s < t$ et $H \in \mathcal{F}_s$ (on vérifie facilement que ceci définit bien une fonction simplement additive). En fait, on s'intéresse surtout au cas où x est à valeurs dans $L_p$ (avec $p \geqslant 1$) et où x se prolonge (de façon unique) en une mesure vectorielle définie sur la tribu des prévisibles et $\sigma$-additive pour la topologie forte de $L_p$ (mesure stochastique) : s'il en est ainsi, on dira que X est un processus de répartition en moyenne d'ordre p.

## C - 2 : CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE COMME INTEGRALE VECTORIELLE

Le problème est de donner un sens au symbole $\int YdX$ où Y est un processus réel, en général caglad (et donc prévisible), et où X est un processus cadlag. Pour cela, on va considérer Y comme une fonction réelle définie sur $\Omega'$, mesurable par rapport à la tribu des prévisibles, et associer à X la mesure $x = \phi(X)$ comme indiqué au paragraphe précédent : pour tout ensemble prévisible A, si "tout va bien" (c'est-à-dire, par exemple, si Y est uniformément borné et si X est un processus de répartition en moyenne d'ordre p), on sait définir

$$z(A) = \int_A Y.dx = \int (1_A.Y)\, dx$$

en tant qu'intégrale de la fonction réelle Y par rapport à la mesure vectorielle x : l'application $A \rightsquigarrow z(A)$ est alors (si tout va bien) une mesure stochastique.

## C - 3 : PROCESSUS INTEGRALE STOCHASTIQUE

Pratiquement, il est important d'obtenir l'intégrale stochastique sous forme d'un processus. Il reste donc à montrer qu'il existe un processus Z cadlag, unique à l'indistinguabilité près, tel que, pour tout t, $Z_t = \int_{]o,t]} Y.dx$ (Notons qu'on aura aussi $Z_\sigma = \int_{]o,\sigma]} Ydx$ pour tout temps d'arrête $\sigma$).

La première méthode consiste à prouver ce fait uniquement en utilisant les propriétés de z : ceci est une adaptation facile du célèbre théorème de Dod sur l'existence d'une version cadlag d'une martingale (cf. [ ].I-B-3 ou[ ]).

Il y a une deuxième méthode qui consiste à utiliser le fait que X est cadlag et qui repose sur le théorème 1 ci-après (cf. [ ]théorème 4), théorème important en lui-même.

## C - 4 : THEOREME 1

*Soit $(z_n)_{n>o}$ une suite de mesures stochastiques en moyenne d'ordre 1 qui est de Cauchy pour la semi-norme de la semi-variation (cf. A-4) (relativement à la topologie de $L_1$).*

*Alors, cette suite $(z_n)_{n>o}$ converge, pour la semi-norme de la semi-variation, vers une mesure stochastique z en moyenne d'ordre 1 . De plus, si pour tout n, $z_n = \phi(Z_n)$ où $Z_n$ est un processus cadlag, il existe une sous-suite n(k) telle que $Z_{n(k)}$ converge uniformément par trajectoire P.p.s. vers un processus (cadlag) Z tel que $z = \phi(Z)$*

Admettons ce théorème que nous allons d'ailleurs utiliser sous une forme affaiblie.

## C - 5 : CONSTRUCTION DU PROCESSUS INTEGRALE STOCHASTIQUE (2ème METHODE)

Soit Y un processus caglad uniformément borné et X un processus de répartition une moyenne d'ordre 1 (Notons que, si $p > 1$, tout processus de répartition en moyenne d'ordre p est évidemment aussi un processus de répartition en moyenne d'ordre 1). Pour tout n, soit $(\sigma(n,k))_{k>o}$ la suite de temps d'arrêt définie par récurrence par $\sigma(n,1) = o$ et, si $k > 1$,

$$\sigma(n,k+1) = \inf. \left\{ t : t \geqslant \sigma(n,k) \ , \ |Y_t - Y_{\sigma(n,k)}| > \frac{1}{n} \right\}$$

Soit $Y^n$ le processus prévisible défini par

$$Y^n = \sum_{k>o} Y_{\sigma(n,k)} \cdot 1_{]\sigma(n,k),\sigma(n,k+1)]}$$

Soit $Z^n = \int Y^n \, dX$ et $z^n = \phi(Z^n)$. Puisque la suite $(Y^n)$ converge uniformément vers le processus Y, la suite $(z^n)_{n>o}$ converge vers z pour la semi-norme de la semi-variation (on $a|||z - z^n||| \leqslant \frac{1}{n} ||| x |||$) ; d'après le théorème qui précède, on peut trouver une sous-suite n(k) telle que la suite de processus cadlags $Z^{n(k)}$ converge P.p.s. uniformément par trajectoires vers un processus Z cadlag tel que $z = \phi(Z)$.

## C - 6 : REMARQUES

Nous avons donné la démonstration qui précède parce qu'elle fait apparaître deux techniques fondamentales :

- d'une part le fait d'approcher uniformément un processus caglad par des processus prévisibles simples ( σ-étagés en un certain sens) (cf. [ ]).

- d'autre part, le fait que, si $Y^n$ converge vers Y de façon satisfaisante (convergence dominée ou, à fortiori, convergence uniforme), alors $\int Y^n dx$ converge vers $\int Y dx$ pour la semi-norme de la semi-variation et on peut trouver une sous-suite n(k) telle que $Z^{n(k)} = \int Y^{n(k)} dx$ converge P.p.s. uniformément par trajectoires vers $Z = \int Y dx$. En ce qui concerne un très grand nombre de propriétés, il suffit de les prouver pour des processus simples ( $\sigma$-étagés au sens ci-dessus) et de s'assurer que ces propriétés passent à la limite par convergence dominée comme indiqué précédemment.

## D - INTEGRATION D'UNE MARTINGALE CADLAG DE CARRE INTEGRABLE

D - 1 :

Si X est un processus dont la variation forte appartient à $L_1$, il est facile de vérifier que X induit une mesure stochastique en moyenne d'ordre 1. Nous n'insisterons pas sur ce cas où l'intégrale stochastique coïncide, à l'indistinguabilité près, avec l'intégrale par trajectoires (Pour le vérifier, il suffit d'utiliser la technique de convergence indiquée précédemment).

D - 2 : LEMME PRELIMINAIRE

*Soit v une fonction positive définie et simplement additive sur $\mathcal{A}$. Alors v est $\sigma$-additive sur $\mathcal{A}$ si et seulement si v satisfait aux deux conditions suivantes :*

*(i) pour tout élément t de T,*

$$\lim_{s \downarrow t} . \; v(\Omega \times \, ]o,s]) = v\,(\Omega \times ]o,t])$$

*(ii) pour toute suite $(A_n)_{n>o}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ décroissant vers $\phi$ ,*

$$\lim_{n\to\infty} . \left\{ \underbrace{\phantom{xxxxxxxxx}}^{Sup.}_{B \in \mathcal{A},\ B \subset (A_n \times T')} v(B) \right\} = 0$$

Preuve -

La preuve de ce lemme (cf. [ ], I-D-2 p.20) est une généralisation du lemme classique sur la $\sigma$-additivité d'une"mesure" associée à une fonction de répartition cadlag (ce qui correspond au cas déterminine c'est-à-dire au cas où $\Omega$ n'a qu'un seul élément).

**D - 3 : THEOREME 2** (cf. [ ] I-D-9 p. 26)

*Soit M une martingale cadlag de carré intégrable.*
*Soit* $m = \phi\ (M)$ *(cf. C-1). Soit* $\hat{m}$ *la fonction simplement additive définie sur* $\mathcal{A}$ *par :*

$$\hat{m}\ (H \times ]s,t]) = E\ [1_H \cdot (M_t^2 - M_s^2)]$$

*si* $s < t$ *et* $H \in \mathcal{F}_s$.

*Alors* $\hat{m}$ *est une mesure positive* $\sigma$*-additive donc* $\hat{m}$ *se prolonge à la tribu des prévisibles. De plus, si* $A \in \mathcal{A}$

$$(||\ m\ (A)\ ||_2)^2 = \hat{m}\ (A)$$ *donc m admet aussi un prolongement* $\sigma$*-additif à la tribu des prévisibles. Enfin, l'application* $Y \rightsquigarrow \int_{]o,1]} Ydm = \int_{]o,1]} YdM$ *est une isométrie de* $L_2\ (\Omega',\mathcal{F}',\ \hat{m})$ *dans* $L^2\ (\ \Omega,\mathcal{F},P)$

Preuve -

$\hat{m}$ définit une fonction simplement additive puisque
$\hat{m} = E\ \ [\ \phi(M^2)]$ (mesure de Doléans : cf. [ ])
Notons ensuite que, pour $s < t$ et $H \in \mathcal{F}_s$ :

$$(||m(H\times]s,t])||_2)^2 = E[1_H(M_t - M_s)^2] = E\ [1_H\ (M_t^{\ 2} + M_s^{\ 2} - 2\ M_tM_s)]$$

mais $H \in \mathcal{F}_s$ donc

$$= E\ \ [1_H\ (M_t^{\ 2} + M_s^{\ 2} - 2M_s^{\ 2})] = E[1_H.(M_t^{\ 2} - M_s^{\ 2})] = \hat{m}(H\times\ ]s,t])$$

donc $\hat{m}$ est positive.

Pour prouver que $\hat{m}$ est $\sigma$-additive, il suffit de prouver les conditions (i) et (ii) du lemme qui précède. La condition (i) résulte de la continuité à droite. Soit A un élément de $\mathcal{F}$ et B un élément de $\mathcal{B}$ avec $B \subset (A \times T)$; il existe temps d'arrêt $\sigma$ (étagé) tel que $B \subset ]\sigma,1] \subset (A\times]o,1])$ (il suffit de prendre pour $\sigma$ le début de B) donc

$$\hat{m}\ (B) \leqslant \hat{m}(]\sigma,1]) = E[1_A(X_1^2 - X_\sigma^2)] \leqslant E(1_A.X_1^2)$$ d'où la condition

(ii) du lemme qui précède.

Par ailleurs, si $A \in \mathcal{A}$, on vérifie facilement qu'il existe une partition finie $(A_i)_{i \in I}$ de A constituée d'éléments de $\mathcal{B}$ : or,

$A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow m(A_i) \perp m(A_j)$ (vérification immédiate)

donc $(\|m(A)\|_2)^2 = \sum_{i\in I} (\| m(A_i)\|_2)^2 = \sum_{i\in I} \hat{m}(A_i)$ v

(d'après ce qui précède) $= \hat{m}(A)$

De même, si A et B sont deux éléments de $\mathscr{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $m(A) \perp m(B)$ puisque $m(A) = \sum_{i\in I} m(A_i)$ et $m(B) = \sum_{j\in J} m(B_j)$ avec, quels que soient i et j, $A_i$ et $B_j$ éléments de $\mathscr{B}$ et $A_i \cap B_j = \emptyset$ donc $m(A_i) \perp m(B_j)$. La fin de la proposition se déduit alors de A-3.

## E - AUTRES RESULTATS

Nous allons, maintenant,indiquer, sans commentaires, quelques résultats que l'on peut obtenir dans le prolongement de ce qui précède.

E - 1 : La construction qui précède s'adapte très bien à la "localisation" : en effet, si $Z = \int YdX$, le processus Z arrêté au temps d'arrêt $\sigma$ est le même que le processus $\int (1_{]0,\sigma]} \cdot Y).dX$

E - 2 : La construction qui précède permet de prouver simplement la formule de Ito sans repasser par la décomposition de Doob-Meyer (cf. [ ]) dans le cas réel continu ou [ ] dans le cas réel non continu)

E - 3 : La construction qui précède s'adapte évidemment sans difficultés au cas où X et Y sont des processus à valeurs vectorielles. Si ces processus sont à valeurs hilbertiennes, tous les résultats usuels dans le cas de processus réels s'étendent facilement (cf. [ ] et [ ] ).On peut construire l'intégrale stochastique même si la "mesure stochastique" dX n'est pas $\sigma$-additive et obtenir une formule de Ito dans ce cas pour un processus et une fonction à valeurs dans des espaces de Banach (cf. [ ] ).

E - 4 : Si M est une martingale de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable avec $p > 1$ (resp. une martingale telle que $\sup_{t\in T} |M_t|$ appartient à $L_1$) on peut prouver que $m = \phi(M)$ est une mesure stochastique en moyenne d'ordre p(resp. d'ordre 1). Dans ce cas, on sait qu'on a une "bonne" intégrale, notamment le théorème de convergence dominée (cf. [ ] ). La démonstration utilise une inégalité de Burkholder et le lemme D-2 énoncé précédemment. De plus, si M est à trajectoires continues, M induit une mesure vectorielle forte définie sur la tribu des bien-mesurables (et non pas seulement sur la tribu des prévisibles) (cf. [ ] ou [ ] )

E - 5 : On peut prouver (cf. [ ]), pour les mesures stochastiques, des théorèmes généralisant, en un certain sens, les théorèmes de Riesz et de Paul Levy relatifs aux mesures définies sur $\mathbb{R}$ et aux fonctions caractéristiques associées.

## -BIBLIOGRAPHIE-


[1] R. G. BARTLE : *A general bilinear vector integral.*
Studia Math. 15, p. 337-352 (1956).

[2] D. L. BURKHOLDER : *Martingale transforms.*
Ann. Math. Statist. 37, 1966, p. 1495-1505.

[3] DELLACHERIE : *Capacités et processus stochastiques*
Springer Verlag - 1972.

[4] C. DOLEANS : *Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D).*
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw., 9, 1968, p. 309-314.

[5] C. DOLEANS-DADE et P. A. MEYER : *Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales.*
Séminaires de Probabilités IV. Lecture notes in mathematics - Vol. 124 - Springer Verlag - 1970.

[6] GLORENNEC et J. PELLAUMAIL : *Théorème de Riesz pour des processus réels.*
Séminaires de Rennes - 1974.

[7] B. GRAVEREAUX et J. PELLAUMAIL : *Formule de Ito pour des processus à valeurs dans des espaces de Banach.*
Séminaire de Rennes - 1974.

[8] H. KUNITA et S. WATANABE : *On square integrable martingales.*
Nagoya Math. J. - 30 - 1967 - p. 209-245.

[9] M. METIVIER : *Mesures vectorielles et intégrale stochastique.*
Séminaires de Rennes - juin 1972 - RENNES.

[10] M. METIVIER : *Stochastic integral and vector valued measures.*
Symposium on vector and operator valued measures and applications. University of UTAH, 1973, Academic Press.

[11] M. METIVIER : *Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif.*
Theory of Probability and applications, 1974, t. XIX (3), p. 577-606

[12] S. OREY : *F.-processes*
Proc. Fifth Berkeley Symposium on Stat. and Prob.
$II_1$ , 301-313.

[13] J. PELLAUMAIL : *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer.*
Astérisque n° 9 - Société Mathématique de France - 1973

[14] J. PELLAUMAIL : *Un lemme élémentaire de théorie de la mesure.*
Séminaire de Rennes - 1973.

[15] J. PELLAUMAIL : *Formule de Ito dans le cas non continu.*
Séminaire de Rennes - 1973.