ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

G. PERENNOU

Reconnaissance des formes. Apprentissage et approximation stochastique

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 58, série *Mathématiques*, n° 12 (1976), p. 30-33

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_30_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RECONNAISSANCE DES FORMES

APPRENTISSAGE ET APPROXIMATION STOCHASTIQUE

G. PERENNOU , Université de Toulouse

1 - GENERALITES SUR LA RECONNAISSANCE DES FORMES

1-1- Une forme, en général, peut se décomposer en formes partielles liées entre elles par des relations. Une forme élémentaire est celle qui ne se subdivise pas en formes partielles. Par exemple un graphisme représentant un A pourra s'analyser en formes élémentaires, qui sont des segments et des points de rencontre de segments, liées entre elles par des relations d'incidence et d'inclusion.

Selon le type de traitement effectué sur des formes, celles-ci peuvent tantôt apparaître comme élémentaires, tantôt comme complexes.

1-2- Reconnaître une forme élémentaire c'est

1° en détecter la présence,

2° lui associer une classe

(l'un des deux aspects pouvant être négligeable ou implicite : par exemple associer à un graphisme une des 26 lettres de l'alphabet ou détecter la présence de segments de droites dans une image).

Reconnaître ou interpréter une forme complexe, c'est en quelque sorte créer une "image homomorphe" d'une forme". Par exemple, en reconnaissance de la parole, il s'agit d'associer à un signal sonore une phrase écrite.

En fait pour être plus précis, il est possible de dire :

1) on dispose d'observations sur un mécanisme qui met en correspondance γ les formes de F et l'espace des classes R (par exemple : lecture humaine),

2) avec d'autres moyens, ignorant tout ou partie du mécanisme précédant, on veut recréer au mieux γ, ce qui se ramène souvent à ceci

trouver $x \in C : \gamma_x = \gamma$ "au mieux",

où x est le paramètre ajustable dans un ensemble C, γ_x est la correspondance associée à x (dans l'exemple il s'agira de faire un lecteur automatique).

Précisons encore, mais en particularisant le problème : soient
$(F,\mathcal{F},P)$: l'espace probabilisé des formes,
C : un sous-ensemble convexe dans un espace vectoriel donné,
λ : une application de R x R dans $\mathbb{R}$.

Trouver $x \in C$ tel que : $\gamma = \gamma_x$ au mieux, pourra consister à fixer x de manière que :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\left(\lambda(\gamma_x(\cdot), \gamma(\cdot))\right) \leqslant E\left(\lambda(\gamma_y(\cdot), \gamma_x(\cdot))\right) \\ \text{pour tout } y \in C. \end{array} \right.$$

λ peut alors s'interpréter comme une fonction de perte.

Tout problème de reconnaissance des formes comporte une phase d'analyse, dont le but est de déterminer γ_x (ainsi, évidemment, que les moyens pour mettre en oeuvre γ_x).

C'est surtout pour la reconnaissance des formes élémentaires que l'on peut aboutir à une formulation du type précédent (qui soit exploitable).

1-3- <u>L'apprentissage</u> consiste à déterminer $x \in C$ en tenant compte des observations que l'on peut effectuer sur γ. Il s'y associe en général une idée d'amélioration progressive, au fur et à mesure que l'on prend en compte les informations sur γ.

<u>L'approximation stochastique</u> est une source d'algorithmes d'apprentissage.

2 - L'APPROXIMATION STOCHASTIQUE

Soient $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espace de probabilité, H un espace de Hilbert séparable et supposons que $g(x,.)$ soit, pour tout $x \in H$, une variable aléatoire à valeur dans H (en abrégé v.a.H) de norme intégrable.
Nous poserons $M(x) = E\, g(x,.)$.

Considérons alors le processus de Robbins Monro défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_o \ : \text{ v.a.H arbitraire,} \\ X_{n+1} = X_n - a_n Y_n \quad n = 0,1,2,\ldots, \end{array} \right.$$

où

1° Y_n a la même distribution que $g(x,.)$ quand $X_n = x$,

2° $a_n \geqslant 0$, $\sum a_n = \infty$, $\sum a_n^2 < \infty$.

$(X_n)_{\mathbb{N}}$ est alors appelé processus d'approximation stochastique par Robbins Monro.

L'intérêt de ces processus tient essentiellement aux résultats du type suivant :

<u>Théorème</u>

X_n <u>converge presque sûrement vers</u> x^* <u>tel que</u> : $\langle M(x), x-x^* \rangle \geqslant 0$

<u>pourvu que</u> :

(i) $E\, \|g(x,.)\|^2 \leqslant c + d_1\|x\| + d_2\|x\|^2 \quad (d_1, d_2 \in \mathbb{R}_+)$

(ii) <u>pour tout</u> $(\alpha, r) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $\alpha \leqslant r$ <u>on peut trouver</u> $e(\alpha,r) > o$ <u>tel que</u>

$\langle x-x^*, M(x) \rangle \geqslant e(\alpha, r)$ dès que $\alpha \leqslant \| x-x^* \| \leqslant r$.

Si de plus

(iii) $E\| g(x,.) - M(x)\|^2 \leqslant K < \infty$

alors X_n converge aussi fortement en moyenne quadratique vers x^* : $E\|X_n - x^*\|^2 \to o$.

Lorsque C=H l'utilisation de tels résultats pour l'apprentissage est immédiat, sous réserve de (i), (ii) (et éventuellement de (iii)), en posant :

$$g(x,.) = \operatorname{grad}_x \left(\lambda(\gamma(.),\gamma_x(.))\right), \quad \text{(sous réserve d'existence)}$$

Lorsque C $\neq$ H on peut envisager deux types de solutions :

1° Se ramener au cas où C=H par l'introduction de fonctions de pénalités.

2° Utiliser un processus de Robbins Monro modifié

$$\begin{cases} X_0 \text{ v.a.C (à valeur dans C) arbitraire,} \\ X_{n+1} = \Pi_C(X_n - a_n Y_n) \ , \ n = 0,1,2,\ldots \ , \end{cases}$$

où a_n et Y_n sont définis comme précédemment et Π_C est le projecteur sur C.

L'étude de ces deux types de méthodes est effectuée au Laboratoire C.E.R.F.I.A.. Pour la première on peut, à propos de la détermination d'un jeu de masques pour la lecture automatique consulter (1) ainsi que (3) et (4).

Pour la seconde on peut consulter (3) et (4).

Dans (2) on pourra par ailleurs trouver un exposé plus général des aspects statistiques de la reconnaissance de forme.

En ce qui concerne le travail d'autres équipes françaises sur des sujets voisins signalons plus particulièrement : (5),(6) et (7).

Pour un exposé systématique de l'approximation stochastique et une bibliographie approfondie on peut voir (8) et (9).

1 - DAUBEZE, Pierre (1974). Contribution à l'étude de masques pour la lecture automatique des caractères imprimés, Doctorat de spécialité - Université Paul Sabatier - TOULOUSE- n° 1662.

2 - PERENNOU, Guy (1973). Aspects statistiques de la reconnaissance des formes. 4ème Journée d'études de la "communication parlée" - (BRUXELLES).

3 - PERENNOU,Guy (1974). Convergence presque sûre et en moyenne des processus d'approximation stochastique - 1ère partie - Processus de Dvoretsky - (Actuellement sous forme de rapport interne C.E.R.F.I.A.).

4 - PERENNOU, Guy (1974). Convergence presque sûre et en moyenne des processus d'approximation stochastique - 2ème partie - Processus de Robbins Monro généralisés. (Actuellement sous forme de rapport interne C.E.R.F.I.A.).

5 - BERTRAN, Jean-Pierre (1973). Optimisation stochastique dans un espace de Hilbert. Méthode de série divergente. Colloque d'analyse Numérique - La colle sur Loup - 1973-.

6 - HIRIART-URRUTY, Jean-Baptiste (1974). Algorithmes stochastiques de résolution d'équations et d'inéquations variationnelles. (Université de Clermont-Ferrand - Département de Mathématique Appliquée - B.P. 45 - 63170 AUBIERE - FRANCE).

7 - MACCHI, César (1971). Thèse de Doctorat d'Etat es-Sciences mathématiques - Université de Paris VI - n° C.N.R.S. AO 7150 -

8 - SCHMETTERER L. - (1972). Approximation stochastique - Cours AEA. DEA de mathématiques appliquées - Université de Clermont-Ferrand.

9 - WASAN, M.T. (1969).Stochastic approximation. (Cambridge University Press).