

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GEORGES GEORGESCU

**Une généralisation du théorème d'omission des types
dans les algèbres polyadiques**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 73, série *Mathématiques*, n° 21 (1982), p. 67-74

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__73_21_67_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**UNE GENERALISATION DU THEOREME D'OMISSION DES TYPES
DANS LES ALGEBRES POLYADIQUES**

Georges GEORGESCU

Institut de Mathématiques

Str. Academiei 14

BUCAREST, Roumanie

Le théorème d'omission des types pour les algèbres cylindriques est démontré en [7]. Une démonstration du théorème d'omission des types formulé dans les algèbres polyadiques est donnée en [3]. Le but de ce papier est de généraliser le résultat de [3]. Il en résulte, comme un cas particulier, un théorème d'omission des types pour les modèles booléens. Pour les définitions et les résultats sur les algèbres polyadiques, voir [2] et [4] .

Toutes les algèbres polyadiques de ce papier seront localement finies, de degré infini.

Soit (A, I, S, \exists, E) une algèbre polyadique avec égalité. Pour tout $p \in A$ nous noterons par J_p le support minimal de p . On sait [2] que l'ensemble

$$E(A) = \{ p \in A \mid J_p = \emptyset \}$$

est une algèbre de Boole. Un ensemble $\Gamma \subset E(A)$ est dit *consistant* si le filtre de l'algèbre de Boole $E(A)$ engendré par Γ est propre.

Nous allons généraliser cette notion de la manière suivante : si B est une algèbre de Boole complète, alors une fonction partielle $f : \text{dom}(f) \subseteq E(A) \rightarrow B$ est dite *consistante* (en A) s'il existe un morphisme booléen $g : E(A) \rightarrow B$ tel que $g|_{\text{dom}(f)} = f$.

Remarque : Si A est l'algèbre de Lindenbaum-Tarski d'un langage du premier ordre avec égalité, nous retrouvons la notion de fonction partielle consistante dans la théorie des modèles booléens (voir [6], [9]).

Un élément p de $E(A)$ est *consistant* avec la fonction partielle f si la fonction partielle $g : \text{dom}(f) \cup \{p\} \rightarrow B$ donnée par $g|_{\text{dom}(f)} = f$ et $g(p) = 1$ est consistante.

Nous utiliserons le résultat suivant de Shorb (voir [6],[9]) :

Lemme 1. Soient B, C deux algèbres de Boole, B complète et $f : \text{dom}(f) \subseteq C \rightarrow B$ une fonction partielle. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) il existe un morphisme booléen $g : C \rightarrow B$ tel que $g|_{\text{dom}(f)} = f$.

(b) pour tous $p_1, \dots, p_n \in \text{dom}(f)$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$

nous avons

$$\bigwedge_{t=1}^n \varepsilon_t \cdot p_t = 0 \Rightarrow \bigwedge_{t=1}^n \varepsilon_t \cdot f(p_t) = 0.$$

Remarque. Si $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, alors $\varepsilon p = p$ si $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon p = \neg p$ si $\varepsilon = -1$.

Lemme 2. Soient A, A' deux algèbres polyadiques avec égalité telles que A est une sous-algèbre de A' et B une algèbre de Boole complète. Si $f : \text{dom}(f) \subseteq E(A) \rightarrow B$ est une fonction partielle, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) f est consistante en A .

(b) f est consistante en A' .

Preuve. On applique le résultat bien connu : une algèbre de Boole complète est injective dans la catégorie des algèbres de Boole [5].

Un *type* de l'algèbre polyadique A est un sous-ensemble $\Sigma(i)$ de A tel que chaque élément p de $\Sigma(i)$ est de support minimal $J_p = \{i\}$.

Une fonction partielle f consistante en A omet le type $\Sigma(i)$ si nous avons

(*) pour tout $p \in A$, tel que $J_p \subseteq \{i\}$, et $\exists(i)p$ est consistant avec f , il existe $q \in \Sigma(i)$ tel que $\exists(i)(p \wedge \neg q)$ est consistant avec f .

Si $X \neq \emptyset$, considérons l'algèbre polyadique $F(X^I, B)$ des fonctions $p : X^I \rightarrow B$.

Rappelons la définition des opérations de $F(X^I, B)$ (voir [5]) :

$$\exists (J) p(x) = \bigvee \{p(y) \mid y|_{I,J} = x|_{I,J}\}$$

$$S(\sigma) p(x) = p(x\sigma),$$

pour tous $p \in F(X^I, B)$, $J \subseteq I$, $\sigma \in I^I$ et $x \in X^I$. L'égalité canonique E_0 de $F(X^I, B)$ est donnée par

$$E_0(i,j)(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = x_j \\ 0, & \text{si } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Un morphisme polyadique $\Phi : A \rightarrow F(X^I, B)$ sera nommé une *B-représentation*.

Une B-représentation Φ omet le type $\Sigma(i)$ si pour tout $u \in X$ et $x \in X^I$ avec $x_i = u$, il existe $q \in \Sigma(i)$, tel que $\Phi(\neg q)(x) = 1$.

Théorème 1. Soient $(A, I, S, \exists E)$ une algèbre polyadique telle que $\text{card}(A) = \text{card}(I) = \omega_0$, B une algèbre de Boole complète, $f : \text{dom}(f) \subseteq E(A) \rightarrow B$ une fonction partielle consistante et $\Sigma(i)$ un type de A . Si f omet le type $\Sigma(i)$ alors il existe une B-représentation

$\Phi : A \rightarrow F(X^I, B)$ telle que

(i) Φ omet le type $\Sigma(i)$

(ii) $\Phi(p)(x) = f(p)$ pour tout $p \in \text{dom}(f)$ et $x \in X^I$.

Preuve. Considérons une extension libre $A(K)$ de A (voir [2], p. 93), où K est dénombrable. Alors $A(K)$ est aussi dénombrable. Nous allons démontrer la propriété suivante :

(**) Pour tout $r \in A(K)$, si $J_r = \emptyset$ et $p \in A(K)$, $J_p \subseteq \{i\}$, si $r \wedge \exists(i) p$ est consistant avec f en $A(K)$, alors il existe $q \in \Sigma(i)$ tel que $r \wedge \exists(i)(p \wedge \neg q)$ est consistant avec f en $A(K)$.

Soit $s = r \wedge p$, donc $r \wedge \exists(i) p = \exists(i) s$. Rappelons que s a la forme $p = S(\tau) t$, avec $t \in A$, où τ est la bijection $(k_1, i_1) \circ \dots \circ (k_n, i_n)$ et s indépendant de $\{i_1, \dots, i_n\}$ (voir [2], p. 87). De même, nous avons $s = k_1(i_1) \dots k_n(i_n)t$. De l'inégalité (voir [5])

$$\exists(i) s = \exists(i) k_1(i_1) \dots k_n(i_n) t \leq \exists(i) \exists(i_1, \dots, i_n) t$$

il résulte que $\exists(i) \exists(i_1, \dots, i_n) t$ est consistant avec f en $A(K)$. Mais $t \in A$, donc il existe $q \in \Sigma(i)$ tel que

$$\exists(i) \exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q \text{ est consistant avec } f \text{ en } A.$$

Si $\exists (i)(s \wedge \neg q)$ n'est pas consistant avec f en $A(K)$, alors la fonction $g : \text{dom}(f) \cup \{\exists(i)(s \wedge \neg q)\} \rightarrow B$ définie par $g|_{\text{dom}(f)} = f$ et $g(\exists(i)(s \wedge \neg q)) = 1$ n'est pas consistante. Par le lemme 1, on peut trouver $u_1, \dots, u_m \in \text{dom}(f)$ tel que

$$\begin{aligned} \exists (i)(s \wedge \neg q) \wedge \varepsilon_1 u_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m u_m &= 0 \\ \varepsilon_1 f(u_1) \wedge \dots \wedge \varepsilon_m f(u_m) &\neq 0. \end{aligned}$$

De la première relation on obtient

$$\exists (i)(s \wedge \neg q \wedge \varepsilon_1 u_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m u_m) = 0,$$

donc $s \wedge \neg q \wedge \varepsilon_1 u_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m u_m = 0$. Mais $t = S(\tau)s$ (voir [2], p. 87), donc

$$t \wedge \neg q \wedge \varepsilon_1 u_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m u_m = S(\tau)(s \wedge \neg q \wedge \varepsilon_1 u_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m u_m) = 0.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \exists (i)(\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q) \wedge \varepsilon_1 u_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m u_m &= \\ = \exists (i) \exists (i_1, \dots, i_n)(t \wedge \neg q \wedge \varepsilon_1 u_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m u_m) &= 0. \end{aligned}$$

$\exists (i)(\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q)$ est consistant avec f en A , donc, en appliquant le lemme 1 pour la fonction h telle que :

$$\begin{aligned} h : \text{dom}(f) \cup \{\exists(i)(\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q)\} &\longrightarrow B \\ h|_{\text{dom}(f)} = f ; h(\exists(i)(\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q)) &= 1 \end{aligned}$$

il résulte $\varepsilon_1 u_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m u_m = 0$. Cette contradiction implique la consistance de $r \wedge \exists(i)(p \wedge \neg q) = \exists(i)(s \wedge \neg q)$ avec f en $A(K)$. La propriété (**) est démontrée.

On peut en déduire qu'il existe une extension riche et dénombrable A^* de A tel que A^* vérifie la condition (**). Cette affirmation est donnée par l'observation que la construction de Halmos pour les extensions riches préserve la condition (**).

Considérons un ensemble dénombrable $K = \{k_1, k_2, \dots\}$ de constantes de A^* tel que chaque élément de A^* a un témoin ([2], p. 104) et $J \subset K$. Par le lemme 2, f est consistante en A^* . Nous allons définir par induction une suite croissante de fonctions partielles $f_0 = f \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, consistantes (en A^*).

Nous avons $\exists (i) E(i, k_1) = 1$ (voir [2], 10.15), donc $\exists (i) E(i, k_1)$ est consistant avec f_0 . En utilisant (**), il existe $q_1 \in \Sigma(i)$, tel que $\exists (i)(E(i, k_1) \wedge \neg q_1)$ est consistant avec f_0 .

Mais $k_1(i_1) \neg q_1 = \exists(i)(\neg q_1 \wedge E(i, k_1))$ (voir [2], 10.18), donc il existe $f_1 : \text{dom}(f_0) \cup \{k_1(i_1) \neg q_1\} \longrightarrow B$, $f_1|_{\text{dom}(f_0)} = f$ et $f_1(k_1(i_1) \neg q_1) = 1$

telle que f_1 est consistante.

Supposons qu'il existe $q_1, \dots, q_n \in \Sigma(i)$ tels que la fonction partielle f_n telle que

$$f_n : \text{dom}(f) \cup \{k_1(i_1) \neg q_1, \dots, k_n(i_n) \neg q_n\} \longrightarrow B$$

$$f_n|_{\text{dom}(f)} = f ; f_n(k_t(i) \neg q_t) = 1, t = 1, \dots, n$$

est consistante. En appliquant (***) il existe $q_{n+1} \in \Sigma(i)$, tel que

$\bigwedge_{t=1}^n k_t(i) \neg q_t \wedge \exists(i)(E(i, k_{n+1}) \wedge \neg q_{n+1})$ est consistant avec f . Il en résulte l'existence d'une fonction partielle consistante

$$f_{n+1} : \text{dom}(f_n) \cup \{k_{n+1}(i) \neg q_{n+1}\} \longrightarrow B$$

telle que $f_{n+1}|_{\text{dom}(f_n)} = f_n$ et $f_{n+1}(k_{n+1}(i) \neg q_{n+1}) = 1$.

Considérons la fonction partielle $g = \bigcup_{n < \omega} f_n$. Du lemme 1 il résulte que g est

consistante, donc il existe un morphisme $h : E(A^*) \longrightarrow B$ tel que $h|_{\text{dom}(g)} = g$. Soit \sim la relation d'équivalence sur K :

$$k \sim k' \iff h(E(k, k')) = 1.$$

Soient $X = K/\sim$ et \hat{k} la classe d'équivalence de $k \in K$. Pour tout $x \in K^I$ nous désignerons par \hat{x} la fonction $I \rightarrow X$ définie par $i \mapsto \hat{x}(i)$.

Soit $\Psi : A^* \longrightarrow F(X^I, B)$ la fonction donnée par

$$\Psi(p)(\hat{x}) = h(x_{i_1}(i_1) \dots x_{i_n}(i_n) p),$$

où $p \in A^*$, $x \in X^I$ et $\{i_1, \dots, i_n\}$ est un support de p . Nous allons montrer que cette définition est correcte. Il suffit de voir que :

$$k, k' \in K, h(E(k, k')) = 1 \implies h(k(i) p) = h(k'(i) p).$$

En effet, nous avons par le lemme 10.18 de [2] :

$$\begin{aligned} k(i)p \wedge E(k, k') &= k(i)(p \wedge E(i, k')) \\ &= \exists(i)(p \wedge E(i, k) \wedge E(i, k')) \\ &= k'(i) p \wedge E(k, k'). \end{aligned}$$

En appliquant le morphisme h on obtient $h(k(i)p) = h(k'(i)p)$.

Il est évident que Ψ est un morphisme booléien. Nous allons montrer que Ψ préserve les opérations polyadiques.

Soit $p \in A^*$, $\sigma \in I^I$ et $x \in X^I$. Si $\{i_1, \dots, i_n\}$ est un support de p nous avons par [2], p. 103 :

$$\begin{aligned} \Psi(S(\sigma)p)(\hat{x}) &= h(x_{\sigma(i_1)}(\sigma(i_1)) \dots x_{\sigma(i_n)}(\sigma(i_n))p) \\ &= h((x_{\sigma(i_1)}(i_1) \dots x_{\sigma(i_n)}(i_n))p) \\ &= \Psi(p)(\hat{x}_{\sigma}) = S(\sigma) \Psi(p)(\hat{x}). \end{aligned}$$

Supposons que $\{i, i_1, \dots, i_n\}$ est un support de p . En utilisant la régularité des constantes et la richesse de A^* on obtient

$$\begin{aligned} \Psi(\exists(i)p)(x) &= h(x_{i_1}(i_1) \dots x_{i_n}(i_n) \exists(i)p) \\ &= h(\exists(i) x_{i_1}(i_1) \dots x_{i_n}(i_n) p) \\ &= \bigvee \left\{ h(y(i) x_{i_1}(i_1) \dots x_{i_n}(i_n) p) \mid y \in K^I, y|_{I-\{i\}} = x|_{I-\{i\}} \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \Psi(p)(\hat{y}) \mid \hat{y}|_{I-\{i\}} = \hat{x}|_{I-\{i\}} \right\} = \exists(i) \Psi(p)(\hat{x}). \end{aligned}$$

Pour $i, j \in I, \hat{x} \in X^I$ nous avons

$$\Psi(E(i,j))(\hat{x}) = h(x_i(i) x_j(j) E(i,j)) = h(E(x_i, x_j))$$

donc

$$E_0(i,j)(\hat{x}) = 1 \Leftrightarrow \hat{x}_i = \hat{x}_j \Leftrightarrow h(E(x_i, x_j)) = 1 \Leftrightarrow \Psi(E(i,j))(\hat{x}) = 1.$$

Il en résulte que Ψ préserve l'égalité. Soit maintenant $\Phi = \Psi|_A$. Pour tout $n < \omega$ et $\hat{x} \in X^I$ tel que $\hat{x}_i = \hat{k}_n$ nous avons

$$\Phi(\neg q_n)(\hat{x}) = h(k_n(i) \neg q_n) = 1$$

donc Φ omet le type $\Sigma(i)$. Si $p \in \text{dom}(f) \subseteq E(A^*)$, alors $\Phi(p)(\hat{x}) = h(p) = f(p)$ pour tout $\hat{x} \in X^I$.

Q. E. D.

Soit L un langage dénombrable du calcul des prédicats du premier ordre avec égalité ayant un ensemble non-vide de constantes. Dans tout ce qui suit, T désigne une théorie de L et A_T l'algèbre de Lindenbaum-Tarski de L (modulo T).

Si $\Sigma(x)$ est un type du langage et B une algèbre de Boole complète, alors un modèle B -valué M omet le type $\Sigma(x)$ si pour tout $a \in M$ il existe $\varphi(x) \in \Sigma(x)$ tel que

$$\|\neg \varphi(a)\|_M = 1. \text{ Un type } \Sigma(x) \text{ de } L \text{ donne un type } \Sigma(x) \text{ de } A_T.$$

Corollaire 1. Soit $f : \text{dom}(f) \subseteq E(A_T) \longrightarrow B$ une fonction partielle consistante qui omet $\Sigma(x)$. Alors il existe un modèle B -valué M tel que

- (i) M omet le type $\Sigma(x)$
- (ii) $\|\varphi\|_M = f(\varphi^\sim)$, pour tout $\varphi^\sim \in \text{dom}(f)$.

Remarques. 1. Pour $B = \{0,1\}$ on obtient le théorème d'omission de types formulé dans les algèbres polyadiques [3].

2. En utilisant la démonstration du théorème 1 on obtient une forme polyadique du théorème de complétude de Shorh (pour les modèles booléens) ([6], [9]).

Corollaire 2. Soit (A, I, S, \exists, E) une algèbre polyadique localement finie, de degré infini, B une algèbre de Boole complète et $f : \text{dom}(f) \subseteq E(A) \longrightarrow B$ une fonction partielle consistante.

Alors il existe une B -représentation $\Phi : A \rightarrow F(X^I, B)$ telle que $\Phi(p)(x) = f(p)$ pour tout $p \in \text{dom}(f)$ et $x \in X^I$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.C. CHANG, H.J. KEISLER, *Model theory*, North-Holland, 1973.
- [2] A. DAIGNEAULT, *Théorie des modèles en logique mathématique*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1967.
- [3] G. GEORGESCU, *Asupra unei versiuni poliadice a teoremei de omitere a tipurilor*, St. Cerc. Math., 32, 5, 1980, 505-515.
- [4] P.R. HALMOS, *Algebraic logic*, Chelsea, 1962.
- [5] P.R. HALMOS, *Lectures on Boolean algebras*, Van-Nostrand, 1963.
- [6] G. LOULLIS, *Sheaves and Boolean valued model theory*, J. Symb. Logic, vol. 44, 3, 1979, 153-183.
- [7] J.D. MONK, *Omitting types algebraically*, Ann. Sci. Univ. Clermont, Fasc. 16, 1978, 101-105.
- [8] J.D. MONK, *Some problems in algebraic logic*, Colloque international de Logique de Clermont-Ferrand, Editions du CNRS, 1977.
- [9] A. SHORB, *Contributions to Boolean valued model theory*, Ph. D. Thesis, Univ. of Minnesota, 1969.