

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

JOSÉ ANTONIO CUENCA MIRA

Sur la théorie de structure des H^* -algèbres de Jordan non commutatives

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 97, série *Mathématiques*, n° 27 (1991), p. 143-152

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1991__97_27_143_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA THEORIE DE STRUCTURE DES
H*-ALGEBRES DE JORDAN NON COMMUTATIVES**

José Antonio CUENCA MIRA

Nous exposerons ici les traits fondamentaux de la théorie de structure des H*-algèbres de Jordan non commutatives. Le développement complet de cette théorie a été présenté dans [7].

Il est bien connu que le concept de H*-algèbre a été introduit dans le cas associatif par Ambrose qui en a établi la théorie de structure [3]. Soit V une algèbre non associative complexe munie d'une involution $x \rightarrow x^*$ (c'est à dire une application $*$: $V \rightarrow V$ vérifiant $(x+y)^* = x^*+y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$, $(x^*)^* = x$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x,y \in V$); V sera appelée une *semi-H*-algèbre* si elle est un espace de Hilbert complexe de produit scalaire (|), vérifiant

$$(xy|z) = (x|zy^*) = (y|x^*z)$$

quels que soient $x,y, z \in V$. Si de plus $*$ est multiplicative ($(xy)^* = y^*x^*$ si $x,y \in V$), alors V sera dite *H*-algèbre*.

Notre théorie de structure se développe selon les étapes suivantes : tout d'abord nous ramenons l'étude des semi-H*-algèbres à celle des semi-H*-algèbres d'annulateur zéro, ensuite nous établissons que chaque semi-H*-algèbre d'annulateur zéro est la fermeture de la somme orthogonale d'une famille de semi-H*-algèbres topologiquement simples, enfin la troisième

étape est consacrée à la détermination des semi- H^* -algèbres de Jordan non commutatives topologiquement simples.

1. ANNULATEUR. SEMI- H^* -ALGÈBRES D'ANNULATEUR ZERO.

On rappelle que l'annulateur d'une semi- H^* -algèbre V est l'ensemble suivant :

$$\text{Ann}(V) = \{x \in V ; xy = 0 = yx \text{ pour chaque } y \in V\}.$$

$\text{Ann}(V)$ est un idéal fermé de V . La semi- H^* -algèbre V est dite *topologiquement simple* si elle a un produit non nul et n'a pas d'autres idéaux que 0 et V . Une partie S de la semi- H^* -algèbre V est appelée *auto-adjointe* si $S^* \subset S$ (donc $S^* = S$). Les sous-algèbres fermées et auto-adjointes de la semi- H^* -algèbre (resp. H^* -algèbre) V sont appelées *semi H^* -sous-algèbres* (resp. *H^* -sous-algèbre*) de V .

Proposition 1. [7] Soit V une semi- H^* -algèbre. Alors V est la somme orthogonale

$$V = U \perp \text{Ann}(V),$$

où U est un idéal de V qui est une semi- H^* -algèbre d'annulateur zéro par rapport à la restriction du produit scalaire et à une involution convenablement choisie. Si de plus V est à involution continue, alors U est une semi- H^* -sous-algèbre de V . Si V est une H^* -algèbre alors U est aussi une H^* -algèbre.

Dans [10], MacCrimmon a établi le concept de radical de Jacobson pour les algèbres de Jordan non commutatives. Cet idéal est noté $\text{Rad}(A)$. La relation avec l'annulateur est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2. [6] Si V est une H^* -algèbre de Jordan non commutative, alors

$$\text{Ann}(A^+) = \text{Rad}(V).$$

Théorème 1. [7] Soit V une semi- H^* -algèbre d'annulateur zéro. Alors V

est la fermeture de la somme orthogonale de la famille $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de ses idéaux fermés minimaux

$$V = \overline{\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha} .$$

Chacun des idéaux I_α est une semi- H^* -sous-algèbre topologiquement simple.

Le théorème 1 était déjà connu dans quelques cas particuliers (pour V associative, Jordan ou Lie [3], [14], [13]). La preuve du théorème 1 avec la généralité énoncée (sans hypothèse sur des identités algébriques) peut être faite en utilisant des techniques de géométrie des espaces normés.

On peut démontrer que les semi- H^* -algèbres de Jordan non commutatives topologiquement simples sont des H^* -algèbres [7, Remark 1]. D'après la proposition 1 et le théorème 1, la théorie de structure des semi- H^* -algèbres de Jordan non commutatives est achevée avec la classification des H^* -algèbres de Jordan non commutatives topologiquement simples. D'abord nous ramenons cette classification aux cas associatif et commutatif. Pour arriver à ces résultats il faut étudier plus en détail quelques classes particulières de H^* -algèbres.

2. H^* -ALGÈBRES QUADRATIQUES

Soit W une H^* -algèbre anti-commutative de produit \wedge et d'involution isométrique \square . On pose $V = \mathbb{C}e \oplus W$ et l'on identifie chaque élément α de \mathbb{C} avec l'élément $(\alpha, 0)$ de V et tout $x \in W$ avec $(0, x)$. Nous définissons un produit scalaire, un produit et une involution par les égalités suivantes

$$\begin{aligned} (\alpha e + x \mid \beta e + y) &= \alpha \bar{\beta} + (x \mid y) \\ (\alpha e + x)(\beta e + y) &= [\alpha \bar{\beta} + (x \mid y)^\square]e + (\alpha y + \beta x + x \wedge y) \\ (\alpha e + x)^* &= \bar{\alpha}e + x^\square \end{aligned} \quad (1)$$

Ce produit fait de V une algèbre quadratique laquelle est de Jordan non commutative [11, p. 203]. Avec le produit scalaire et l'involution ci-dessus l'algèbre V est une H^* -algèbre, qui est appelée la H^* -algèbre quadratique associée à la H^* -algèbre anti-commutative W . On va montrer que, à un facteur positif du produit scalaire près, toute H^* -algèbre quadratique V de dimension autre que 2 peut être obtenue par ce procédé. L'algèbre V est à

puissances associatives, et la forme bilinéaire $\langle x, y \rangle = (x|y^*) + (y|x^*)$ est une forme trace non dégénérée. D'après [2, p. 320-1], V est une algèbre de Jordan non commutative. En utilisant le théorème d'Osborn [11, p. 203] il existe une algèbre anti-commutative W de produit \wedge et une forme trace $f : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $V = \mathbb{C}e \oplus W$ et permettant d'écrire le produit de V sous la forme :

$$(\alpha e + x)(\beta e + y) = [\alpha\beta + f(x, y)]e + (\alpha y + \beta x + x \wedge y)$$

Si u est un élément auto-adjoint de W alors on a

$$\|u\|^2 = (u|u) = (u^2|e) = f(u, u) \|e\|^2$$

D'où

$$(x|y) = f(x, y^*) \|e\|^2$$

quels que soient $x, y \in W$, car on en déduit aisément que $W^* = W$. En multipliant le produit scalaire par un facteur positif, on peut faire la supposition $\|e\| = 1$. Si on note par \square la restriction de l'involution alors le produit de V prend la forme (1). Puisque V est une algèbre à élément unité, l'involution est isométrique. D'après l'identité $x \wedge y = 1/2(xy - yx)$, W est une H^* -algèbre anti-commutative par rapport aux restrictions du produit scalaire et de l'involution. Chaque idempotent auto-adjoint d'une H^* -algèbre est appelé une *projection*. Soit $\dim V > 2$. On en déduit aisément que les projections $\neq 0, 1$ de la H^* -algèbre V s'écrivent sous la forme $1/2 + u$ où u est un élément auto-adjoint dans W et $f(u, u) = 1/4$. Soit $e_1 = 1/2 + u$ l'un d'eux. Posons $e_2 = 1/2 - u$. Les projections e_1 et e_2 sont *orthogonales* ($e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$) et *irréductibles* (elles ne s'écrivent pas sous la forme d'une somme de deux projections orthogonales non nulles). Les propriétés bien connues de la décomposition de Peirce [1] donnent la décomposition orthogonale suivante :

$$V = V_{11} \perp V_{12} \perp V_{22}$$

où

$$\begin{aligned} V_{ii} &= \{x \in V : x \cdot e_i = x\} = \{x \in V : x e_i = x = e_i x\} \\ V_{12} &= \{x \in V : x \cdot e_1 = 1/2 x = x \cdot e_2\} \end{aligned}$$

D'après [14, p. 297], $V_{11} = \mathbb{C}e_1$, $V_{22} = \mathbb{C}e_2$. Par suite, $W = \mathbb{C}(e_1 - e_2) \perp V_{12}$. Il

suffit de prouver que $\mathbb{C}(e_1 - e_2)$ et $\mathbb{C}(e_1 + e_2)$ sont orthogonales. Comme $\dim V > 2$, on a $V_{12} \neq 0$. Le sous-espace réel S_{12} des éléments auto-adjoints de V_{12} n'est pas zéro, car $V_{12} = S_{12} \oplus (-1)^{1/2} S_{12}$. Soit $v_{12} \in S_{12}$, $v_{12} \neq 0$. On sait que $v_{12}^2 = \|v_{12}\|^2 e$. Donc, pour $u_{12} = v_{12}/\|v_{12}\|$ on a $u_{12}^2 = e$ et $u_{12}^* = u_{12}$. Ceci nous conduit à

$$(e_1 - e_2 | e) = (e_1 - e_2 | u_{12}^2) = ((e_1 - e_2) \cdot u_{12} | u_{12}) = 0 ,$$

ce qui prouve notre affirmation que $\mathbb{C}(e_1 - e_2)$ et $\mathbb{C}(e_1 + e_2)$ sont orthogonales.

3. H^* -ALGÈBRES QUASI-ASSOCIATIVES

Soit F un corps, A une F -algèbre et $\lambda \in F$. Sur l'espace vectoriel sous-jacent à A , on définit une autre multiplication $(\dot{\lambda})$ par

$$x \underset{(\dot{\lambda})}{\cdot} y = \lambda xy + (1 - \lambda)yx$$

Cette algèbre $A^{(\lambda)}$ est dite la λ -mutation de A . On dira que l'algèbre A est *quasi-associative* s'il existe une extension K de F , un élément $\lambda \in K$ et une K -algèbre associative D tels que l'extension par les scalaires A_K coïncide avec $D^{(\lambda)}$. On en déduit aisément que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la λ -mutation de toute H^* -algèbre est une H^* -algèbre avec les mêmes produit scalaire et involution. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3. Soit V une H^* -algèbre quasi-associative non commutative et d'annulateur zéro. Il existe un nombre réel $\lambda \neq 1/2$ et une H^* -algèbre associative D tels que V coïncide avec la H^* -algèbre $D^{(\lambda)}$.

Preuve. D'après [1, p. 583] il existe une \mathbb{C} -algèbre associative D et un $\lambda \in \mathbb{C} - \{1/2\}$ tels que $V = D^{(\lambda)}$. Il suffit de démontrer que λ est réel. Supposons que $\lambda \notin \mathbb{R}$. D'après [7, Proposition 1, (iii)] V est semiprime, donc D est aussi semiprime, car $D = V^{(\mu)}$, $\mu = \lambda/(2\lambda - 1)$. Comme dans [12, Proposition 2.2] on obtient que $\operatorname{Re}(\lambda) = 1/2$ et le produit $\underset{(\dot{\mu})}{\cdot}$ de D vérifie

$(x \underset{(\dot{\mu})}{\cdot} y)^* = x^* \underset{(\dot{\mu})}{\cdot} y^*$ quels que soient $x, y \in D$. En utilisant $\bar{\mu} = 1 - \mu$ on en déduit aisément que

$$\left(x \underset{(\mu)}{\cdot} y | z\right) = \left(x | y \underset{(\mu)}{\cdot} z\right) = \left(y | z \underset{(\mu)}{\cdot} x^*\right) \quad (2)$$

quels que soient $x, y, z \in D$. Soient L_x, R_x les opérateurs de multiplication $L_x : y \rightarrow x \underset{(\mu)}{\cdot} y$ et $R_x : y \rightarrow y \underset{(\mu)}{\cdot} x$. D'après (2) et l'associativité de D , L_x est un opérateur normal. Pour son rayon spectral $r(L_x)$ on a donc $r(L_x) = \|L_x\|$. D'une façon similaire on obtient $r(R_x) = \|R_x\|$. Il est bien connu que si la norme coïncide avec le rayon spectral dans une \mathbb{C} -algèbre associative normée alors elle est commutative (voir [4, Corollaire 15.7 et remarque ci-dessous]). Donc, les ensembles $\{L_x : x \in D\}$ et $\{R_x : x \in D\}$ sont des algèbres commutatives et $L_{[x,y]} = [L_x, L_y] = 0$, $R_{[x,y]} = [R_x, R_y] = 0$ quels que soient $x, y \in D$. Par suite $[x, y] \in \text{Ann}(D) = \text{Ann}(V) = 0$ et D est commutative, ce qui est absurde car D n'est pas commutative. Ceci nous dit que $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. H^* -ALGÈBRES DE JORDAN NON COMMUTATIVES TOPOLOGIQUEMENT SIMPLES

Nous sommes maintenant en mesure de ramener la classification des H^* -algèbres de Jordan non commutatives topologiquement simples aux cas associatif et commutatif.

Théorème 2. [7] Soit V une H^* -algèbre de Jordan non commutative topologiquement simple. Alors V vérifie au moins l'une des alternatives suivantes :

- 1) V est anti-commutative (V^+ a pour produit zéro)
- 2) V est commutative (Jordan, $V^+ = V$)
- 3) A un facteur positif du produit scalaire près, V est la H^* -algèbre quadratique associée à une H^* -algèbre anti-commutative de dimension distincte de 1.
- 4) V est quasi-associative non commutative topologiquement simple ; c'est à dire qu'il existe une H^* -algèbre associative non commutative topologiquement simple D et un nombre réel $\lambda \neq 1/2$ tels que V est la H^* -algèbre $D^{(\lambda)}$.

Preuve. L'ensemble $\text{Ann}(V^+)$ est un idéal fermé dans V^+ et les dérivations de V^+ laissent invariant $\text{Ann}(V^+)$. D'après la flexibilité de V , $[x, y] \in \text{Ann}(V^+)$ quels que soient $x \in V$ et $y \in \text{Ann}(V^+)$. Donc, $\text{Ann}(V^+)$ est un

idéal dans V . On a $\text{Ann}(V^+) = V$ ou $\text{Ann}(V^+) = 0$, car V est topologiquement simple. Dans le premier cas V est anti-commutative. Supposons maintenant $\text{Ann}(V^+) = 0$. D'après la proposition 2, V est semi-simple. On sait que V a des projections $(e_i)_{i \in A}$ telles que $V_1(e_i) = V_1^+(e_i) = \mathbb{C}e_i$ (voir [1] et [14]). Donc, les $V_1(e_i)$ sont des idéaux quadratiques minimaux et le socle de V est non nul. D'après [8, Corollary 1], V est commutative ou quadratique ou V coïncide avec $D^{(\lambda)}$ où D est non commutative associative et $\lambda \in \mathbb{C} - \{1/2\}$. Dans le dernier cas D est une H^* -algèbre et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 3. Si V est commutative on a le cas 2). Il reste à voir le cas où V est quadratique, mais, d'après la section 2, nous sommes dans le cas 3, puisque V simple entraîne $\dim V \neq 2$.

5. H^* -ALGÈBRES DE JORDAN TOPOLOGIQUEMENT SIMPLES

Nous allons maintenant examiner plus en détail le cas commutatif. Commençons par quelques exemples de H^* -algèbres de Jordan topologiquement simples.

Soit V une H^* -algèbre quadratique, commutative et telle que $\dim V \neq 2$. D'après la section 2, V est la H^* -algèbre associée à une H^* -algèbre anti-commutative W . La commutativité entraîne $x \wedge y = 0$ quels que soient $x, y \in W$.

On peut donc écrire le produit de V sous la forme

$$(\alpha e + x)(\beta e + y) = [\alpha\beta + (x|y^\square)]e + \alpha y + \beta x$$

où \square est une involution isométrique de l'espace de Hilbert W . On dira que V est la H^* -algèbre de Jordan quadratique associée à l'espace de Hilbert involutif (W, \square) . On sait que V est simple, puisque $\dim V \neq 2$ [5, p. 217]. "A fortiori" V est topologiquement simple.

Un autre exemple de H^* -algèbre de Jordan topologiquement simple sera donné ci-dessous. Il faut d'abord introduire quelques notations. Soit D_0 une algèbre réelle de composition et sans diviseurs de zéro, S_0 son anti-automorphisme involutif canonique et Q_0 sa forme quadratique. Soit $D = D_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexification de D_0 . Il existe un unique anti-automorphisme involutif s (resp. forme quadratique Q , involution multiplicative \square) tel que $s(x_0 \otimes \lambda) = s_0(x_0) \otimes \lambda$ (resp. $Q(x_0 \otimes \lambda, y_0 \otimes \mu) = \lambda\mu Q_0(x_0, y_0)$),

$(x_0 \otimes \lambda)^\square = s_0(x_0) \otimes \bar{\lambda}$) quels que soient $x_0, y_0 \in D_0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. L'algèbre D est une algèbre de composition avec forme quadratique Q , et est une H^* -algèbre alternative pour l'involution \square et le produit scalaire défini par

$$(x_0 \otimes \lambda | y_0 \otimes \mu) = Q(x_0 \otimes \lambda, y_0 \otimes \bar{\mu}) \quad ,$$

appelée la H^* -algèbre canonique de composition. Soit \mathcal{A} un ensemble non vide. L'ensemble $M_{\mathcal{A}}(D)$ des $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ -matrices $A = (a_{ij})$ à termes dans D et vérifiant $\sum \|a_{ij}\|^2 < \infty$ est une H^* -algèbre pour le produit scalaire

$$(A | B) = 1/2 \sum_{(i,j) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} (a_{ij} | b_{ij}) \quad ,$$

le produit

$$AB = (c_{ij})$$

avec $c_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{A}} a_{ik} b_{kj}$ et l'involution $A \rightarrow A^* = (a_{ji}^\square)$ (A^* est la matrice obtenue à partir de A en appliquant \square à chaque terme et en transposant). Soit $M_{\mathcal{A}}(D)^+$ l'algèbre symétrisée de $M_{\mathcal{A}}(D)$, c'est à dire l'algèbre de même structure d'espace vectoriel que $M_{\mathcal{A}}(D)$ munie du produit $A \circ B = 1/2(AB+BA)$. L'algèbre $M_{\mathcal{A}}(D)^+$ est une H^* -algèbre pour les mêmes produit scalaire et involution que $M_{\mathcal{A}}(D)$. L'ensemble

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(D, s) = \{A = (a_{ij}) \in M_{\mathcal{A}}(D) : A = (s(a_{ij}))\}$$

est une H^* - sous-algèbre de $M_{\mathcal{A}}(D)^+$, qui est appelée la H^* -algèbre des $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ -matrices s -symétriques à termes dans D . Si, 1) D est associative, ou 2) D est alternative et $\text{card}(\mathcal{A}) = 3$, alors $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(D, s)$ est une H^* -algèbre de Jordan topologiquement simple.

Théorème 3. [7] La H^* -algèbre de Jordan V est topologiquement simple si et seulement si V est, à un facteur positif du produit scalaire près, l'une des H^* -algèbres suivantes :

- 1) \mathbb{C}
- 2) La H^* - algèbre de Jordan quadratique associée avec un espace de Hilbert involutif (W, \square) de dimension plus grande ou égale à 2

3) La H^* -algèbre des $\mathcal{A}\mathcal{A}$ -matrices s -symétriques à termes dans D , $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(D, s)$, où $\text{card}(\mathcal{A}) \geq 3$ et D est une H^* -algèbre canonique de composition, avec D associative si $\text{card}(\mathcal{A}) > 3$.

Un cas particulier du théorème 3 a été établi dans [15]. Pour le démontrer nous avons utilisé un théorème d'introduction des coordonnées pour H^* -algèbres de Jordan [7, Theorem 3], qui joue un rôle analogue à celui que joue l'homonyme de Jacobson [9, p. 133] pour la classification des algèbres de Jordan simples non dégénérées avec des conditions minimales.

REFERENCES

1. A.A. ALBERT, Power associative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 552-593.
2. A.A. ALBERT, A theory of trace-admissible algebras, Proc. Mat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 318-328.
3. W. AMBROSE, Structure theorems for a special class of Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 364-386.
4. F.F. BONSALL and J. DUNCAN, Complete normed algebras, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
5. H. BRAUN and M. KOECHER, Jordan-Algebren, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
6. J.A. CUENCA, Sobre H^* -algebras no asociativas. Teoria de estructura de las H^* -algebras de Jordan no conmutativas semisimples, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Malaga, Malaga, 1984.
7. J.A. CUENCA and A. RODRIGUEZ, Structure theory for noncommutative Jordan H^* -algebras, Journal of Algebra (à paraître).
8. A. FERNANDEZ, Noncommutative Jordan algebras containing minimal inner ideals, Colloque sur les algèbres de Jordan, Montpellier, Oct. 1985.
9. N. JACOBSON, Structure and representations of Jordan algebras, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 39, Providence R.I., 1968.
10. K. McCRIMMON, Noncommutative Jordan rings, Trans. Amer. Math. Soc. 158, n° 1 (1971), 1-33.
11. J.M. OSBORN, Quadratic division algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 202-221.
12. R. PAYA, J. PEREZ and A. RODRIGUEZ, Type I factor representations of

- noncommutative JB^* -algebras, Proc. London Math. Soc. (3), 48 (1984), 428-444.
13. J.R. SCHUE, Hilbert space methods in the theory of Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 68-80.
 14. C. VIOLA DEVAPAKKIAM, Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975), 293-300.
 15. C. VIOLA DEVAPAKKIAM and P.S. REMA, Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 307-319.

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Ciencias
Universidad de Málaga - MALAGA - ESPANA