ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

LOUIS MARIE LE NY

Forme produit pour des réseaux multiclasses à routages dynamiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 76, série *Probabilités et applications*, n° 1 (1983), p. 17-34

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1983__76_1_17_0>

FORME PRODUIT POUR DES RESEAUX MULTICLASSES A ROUTAGES DYNAMIQUES

Louis Marie LE NY

I.N.S.A. de Rennes

RESUME

Dans cet article, nous donnons un exemple de réseau de files d'attente à serveur central où les probabilités de routage dépendent de l'état du réseau.

Grâce à la notion de station échangeable (cf. [3] et [4]) nous obtenons une expression analytique de la probabilité stationnaire.

ABSTRACT

Asymptotic probability is stated for a central serveur queueing network with several classes of customers and state dependent routing.

PLAN

A - RAPPELS - NOTION DE STATION ECHANGEABLE

A1 - Etat fondamental

Soit $\bar{R}$ un réseau fermé markovien irréductible composé de m+1 stations $(S_i)_{o\leq i\leq m}$.

On suppose que les clients sont répartis en K classes et qu'ils ne changent pas de classe.

Dans chaque classe k, le nombre de clients est donc fixe et noté n_k.

On pose $n = (n_1,\ldots,n_k,\ldots,n_K)$, $\hat{n} = \sum_{k=1}^{K} n_k$, $[o,m] = \{0,1,2,\ldots,m\}$ et $[1,k] = \{1,2,\ldots,K\}$.

Dans toute la suite on appellera état fondamental du réseau $\bar{R}$ tout (m+1)-uple $e = (e_o,e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_m)$ où $(e_i)_{o\leq i\leq m}$ caractérise l'état de la station S_i. L'ensemble des états est noté E.

Suivant les disciplines de service et suivant les stations, ce vecteur e_i pourra, ou non, dépendre de l'ordre d'arrivée des clients dans la station S_i.

Les disciplines de service dans les stations et l'ensemble d'états choisi seront toujours supposés tels que :

(A.1.1) On ne fait pas de distinction entre les éléments d'une même classe.

(A.1.2) Pour tous les indices i et k, on différencie deux états qui ne correspondent pas à un même nombre de clients de classe k dans la station S_i.

(A.1.3) Pour tout sous-réseau ouvert R' extrait du réseau initial et en partant d'un état e' quelconque de R', si un client de classe k quitte le réseau R' en partant de la station S_i ou rentre dans le réseau R' en allant dans la station S_i, l'état de R' atteint est unique.

Etant donné un état e d'un réseau ouvert R, on note symboliquement $e + f_{ik}$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k quitte la station S_i et le réseau R, on atteint l'état e ; si p est une probabilité, $p(e + f_{ik})$ désignera donc la probabilité de cet ensemble d'états.

De façon analogue, on notera $e - f_{ik}$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k rentre dans le réseau ouvert R et dans la station S_i, on atteint l'état e.

De même, on note $e - f_{ik} + f_{jk}$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k va de la station S_j à la station S_i, l'état atteint est e.

$\hat{e}_i$ est le nombre de clients dans la station S_i .

A2 - Taux de départ et taux de service d'une classe k

Si $D_{ik}(t,t+dt)$ désigne l'évènement " un client de classe k quitte la station S_i entre les instants t et t+dt" , on définit le *taux de départ* de la station S_i pour la classe k par l'égalité :

$$h_{ik}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[D_{ik}(t,t+dt)]}{dt}$$

De même, si l'on note $S_{ik}(t)$ l'évènement " un client de classe k est en cours de service dans la station S_i à l'instant t" , le *taux de service* $\mu_{ik}(e)$ de S_i pour la classe k est défini par

$$\mu_{ik}(e) = \lim_{dt \to 0} . \frac{1}{dt} \, P[D_{ik}(t,t+dt) | \, S_{ik}(t)]$$

A3 - Sous-réseau propre

Un sous-réseau R d'un réseau fermé $\bar{R}$ est dit *propre* si l'évolution interne de ce sous-réseau ne dépend que de l'état du sous-réseau, c'est-à-dire si les 3 conditions suivantes sont réalisées :

a - pour ce sous-réseau, les taux de probabilité de transfert à l'intérieur du sous-réseau R ne dépendent que de l'état du sous-réseau R.

b - pour ce sous-réseau, les taux de probabilité pour un client de quitter R ne dépendent que de l'état de R.

c - pour ce sous-réseau R, quand un client rentre dans ce sous-réseau, la probabilité, pour ce client, d'aller dans telle ou telle station de R, ne dépend que de l'état R.

Dans le cas où l'on considère un tel sous-réseau propre R, on note $a_{ik}(e)$ (resp. $b_{ik}(e)$) le taux de probabilité qu'un client de classe k quitte la station S_i pour aller dans une autre station (resp. à l'extérieur) du sous-réseau R quand l'état de R est e.

Dans ce cas, si l'on note $A_{ik}(t,t+dt)$ l'évènement, " un client de classe k quitte la station S_i de R entre t et t+dt pour aller dans une autre station de R si l'état de R est e" , on a :

$$a_{ik}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[A_{ik}(t,t+dt)]}{dt}$$

De même, si $B_{ik}(t,t+dt)$ désigne l'évènement " un client de classe k quitte la station S_i de R entre t et t+dt pour aller à l'extérieur de R si l'état de R est e" , on a :

$$b_{ik}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[B_{ik}(t,t+dt)]}{dt}$$

On utilise également $C_{ik}(e)$: probabilité pour un client de classe k d'aller dans la station S_i de R sachant qu'il rentre dans le sous-réseau R et que ce sous-réseau est dans l'état e. On pose :

$$a_i(e) = \sum_{k=1}^{K} a_{ik}(e) \quad , \quad b_i(e) = \sum_{k=1}^{K} b_{ik}(e) \quad , \quad c_i(e) = \sum_{k=1}^{K} c_{ik}(e)$$

Enfin si l'on considère l'évènement $D_{ij,k}(t,t+dt)$: " un client de classe k va de la station S_i de R dans la station S_j de R entre t et t+dt sachant que l'état du sous-réseau R est e" , on définit le taux

$$d_{ij,k}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[D_{ij,k}(t,t+dt)]}{dt}$$

et

$$d_{ij}(e) = \sum_{k=1}^{K} d_{ij,k}(e)$$

On a $\forall\, k \in [1,K] \qquad \sum_{i \in [o,m]} c_{ik}(e) = 1 \qquad$ et $\qquad \sum_{j \in [o,m]} d_{ij}(e) = a_i(e).$

La somme $a_{ik}(e) + b_{ik}(e)$ est égale au taux de départ $h_{ik}(e)$ de la classe k de la station S_i de R.

Le rapport $\frac{d_{ij,k}(e)}{(a_{ik}+b_{ik})(e)}$ est noté $r_{ij,k}(e)$ et est appelé probabilité de répartition pour la classe k de la station S_i vers la station S_j ou encore probabilité de routage.

A4 - Station échangeable par classes

Soit R un sous-réseau propre et une station S_j telle que $R \cup S_j = \bar{R}$.

On note $$W_k(e) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} p(e+f_{ik}) b_{ik}(e+f_{ik})$$

$W_k(e)$ est le taux de probabilité pour le réseau $\bar{R}$ d'atteindre l'état e par arrivée d'un client de classe k dans la station S_j.

Définition : une station S_j est dite *échangeable par classes* dans $\bar{R}$ si

A4.1. $(\forall\, e \in E) \quad (\forall\, k \in [1,K]) \quad W_k(e) = p(e)\, h_{jk}(e).$

Cette égalité A4.1 signifie que pour tout état e de E et $\forall\, k \in [1,K]$, le taux de probabilité d'atteindre l'état e par arrivée d'un client de classe k dans S_j est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de classe k de la station S_j.

A5 - Station échangeable [4]

Définition : une station S_j est dite échangeable dans $\bar{R}$ si

A5.1. $\forall\, e \in E, \quad \sum_{k=1}^{K} W_k(e) = p(e) \sum_{k=1}^{K} h_{jk}(e)$.

Cette condition (A5.1) signifie que pour tout état e, le taux de probabilité d'atteindre l'état e par arrivée d'un client est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de la station S_j.(Voir [4]).

A6 - Stations échangeables et équations de balance globale.

Dans un réseau markovien irréductible, la probabilité stationnaire p est l'unique probabilité satisfaisant aux équations de balance globale [1].

Si les conditions de balance locale par classes [1] sont vérifiées, on en déduit par sommation les équations de balance globale.

Or, dire que toutes les stations sont échangeables par classes, c'est dire que les équations de balance locale par classes sont vérifiées.

Dans nos raisonnements ultérieurs, nous utiliserons fréquemment cette remarque.

De même, pour démontrer les égalités de balance globale, on démontrera que toutes les stations sont échangeables.

B - PROBABILITE STATIONNAIRE D'UN RESEAU A SERVEUR CENTRAL ET A ROUTAGES DEPENDANT DE L'ETAT

B1 - Caractéristiques du réseau

Soit le réseau fermé représenté ci-dessous (fig. 1).

Les stations $(S_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ sont en parallèle et ne peuvent contenir plus de $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ clients. On pose $M = \sum_{i=1}^{m} M_i$.

Les probabilités de répartition (ou routages) entre la station S_o et chaque station S_i sont définies comme suit :

$$\forall\ i = 1,\dots,m\ ,\quad r_{oi}(e) = \frac{M_i - \hat{e}_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} (M_i - \hat{e}_i)} \qquad \text{si } S_i \text{ n'est pas saturée.}$$

$$r_{oi}(e) = 0 \qquad \text{si } S_i \text{ est saturée .}$$

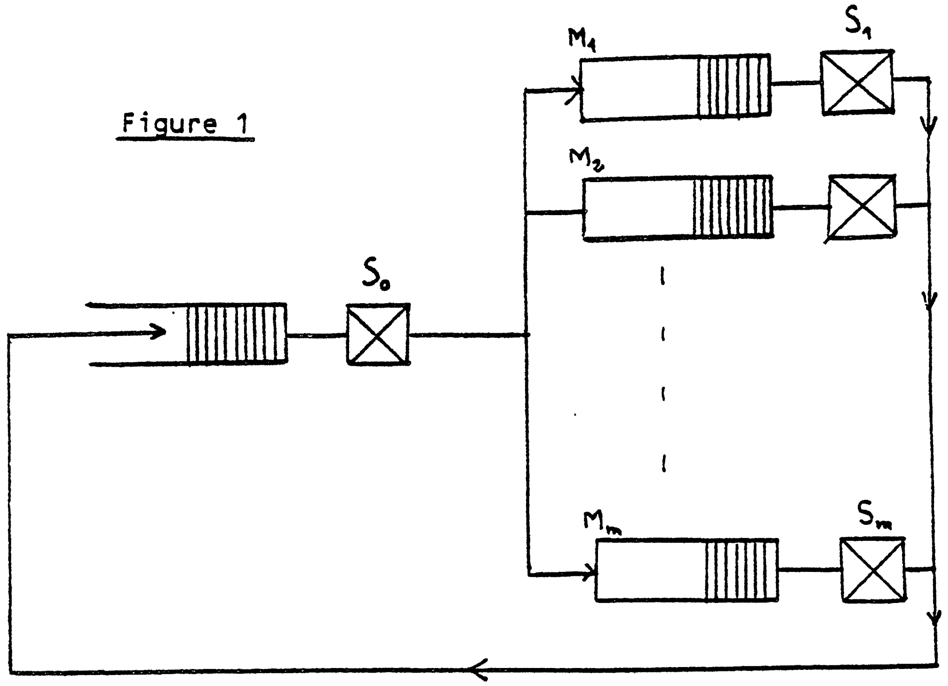
Si toutes les stations S_i sont saturées, la station S_o bloque son service. Tout client qui quitte l'une des stations $(S_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ se dirige ensuite vers S_o.

Sauf indication contraire, l'état e est tel que

$$e_i = (e_{i1}, \dots, e_{ik}, \dots, e_{iK})$$

où e_{ik} est le nombre de clients de classe k dans S_i.

Figure 1



B2 - Disciplines de service

Nous supposerons en général que le taux de départ $h_{ik}(e)$ pour toute classe k de la station S_i est de la forme :

$$h_{ik}(e) = f_i(\hat{e}_i)\, g_{ik}(e_{ik})$$

où f_i est une fonction du nombre total $\hat{e}_i$ de clients dans la station S_i et g_{ik} est une fonction du nombre e_{ik} de clients de classe k dans S_i.

Ces fonctions ont les expressions suivantes dans le cas des disciplines de service usuelles :

<u>Type 1</u> : Premier arrivé, premier servi (FIFO, FCFS)

$$h_{ik}(e) = \frac{e_{ik}}{\hat{e}_i} \mu_i(\hat{e}_i)$$

où le taux de service $\mu_i(\hat{e}_i)$ est supposé indépendant de la classe du client en cours de service.

<u>Type 2</u> : Processeur partagé (PS), Dernier arrivé, premier servi avec préemption (LCFSPR)

$$h_{ik}(e) = \frac{e_{ik}}{\hat{e}_i} \beta_{ik}(e_{ik}) \gamma_i(\hat{e}_i)$$

<u>Type 3</u> : Infinité de serveurs ou délai pur (SI)

$$h_{ik}(e) = e_{ik} \quad \mu_{ik}$$

Dans chaque cas, les lois de service sont exponentielles.

B3 - <u>Théorème B3.1</u>

1. *Dans l'hypothèse où les disciplines de service sont de types 2 ou 3, la probabilité stationnaire d'état du réseau décrit ci-desus (B1, B2 et fig. 1) a pour expression*

$$\text{(F1)} \qquad \boxed{p(e) = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o} \frac{1}{f_o(j)} \prod_{k=1}^{K} G_k(e)}$$

où $$G_k(e) = \prod_{j=1}^{e_{ok}} \frac{1}{g_{ok}(j)} \prod_{i=1}^{m} H_{ik}(e)$$

et $$H_{ik}(e) = \frac{A_{M_i}^{\hat{e}_i}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o} \prod_{j=1}^{\hat{e}_i} f_i(j) \prod_{j=1}^{e_{ik}} g_{ik}(j)}$$

avec f,g définies dans B2.

2. *Toutes les stations sont échangeables par classes.*

A_M^p est le nombre d'arrangements de p éléments parmi M.

C est la constante de normalisation. Par convention, on pose $\prod_{j=1}^{0} .. = 1$ et $A_M^0 = 1$

Démonstration Nous traiterons d'abord le cas des deux disciplines:processeur partagé (PS) et infinité de serveurs (SI).

Il suffit de montrer que, pour la probabilité p, toutes les stations sont échangeables par classes.

Examinons d'abord la station S_o et soit une classe quelconque k_o. Pour tout état e tel que $e_{ok_o} = 0$, le taux de probabilité d'atteindre l'état e par arrivée d'un client de classe k_o est nul, ainsi que le taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de classe k_o.

De même, pour tout état e tel que les stations S_i sont toutes saturées.

Soit maintenant un état e tel que $e_{ok_o} \neq 0$.

Le taux de probabilité d'atteindre l'état e par arrivée d'un client de classe k_o vaut

$$E_1 = \sum_{i=1}^{m} p(e - f_{ok_o} + f_{ik_o})\, f_i(\hat{e}_i + 1)\, g_{ik_o}(e_{ik_o} + 1)$$

$$= C \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{\hat{e}_o - 1} \frac{1}{f_o(j)} \prod_{k=1}^{K} G_k(e - f_{ok_o} + f_{ik_o})\, f_i(\hat{e}_i + 1)\, g_{ik_o}(e_{ik_o} + 1)$$

or $\sum_{i=1}^{m} G_{k_o}(e - f_{ok_o} + f_{ik_o})\, f_i(\hat{e}_i + 1)\, g_{ik_o}(e_{ik_o} + 1)$

$$= C \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{e_{ok_o} - 1} \frac{1}{g_{ok_o}(j)} \prod_{l=1}^{m} H_{lk_o}(e - f_{ok_o} + f_{ik_o})\, f_i(\hat{e}_i + 1)\, g_{ik_o}(e_{ik_o} + 1)$$

$$= C \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{e_{ok_o} - 1} \frac{1}{g_{ok_o}(j)} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} H_{lk_o}(e) \left(\frac{A_{M_i}^{\hat{e}_i + 1}}{A_M^{\hat{n} - \hat{e}_o - 1} \prod_{j=1}^{\hat{e}_i + 1} f_i(j) \prod_{j=1}^{e_{ik_o} + 1} g_{ik_o}(j)} \right) f_i(\hat{e}_i + 1)\, g_{ik_o}(e_{ik_o} + 1)$$

$$= C \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{e_{ok_o}} \frac{1}{g_{ok_o}(j)} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} H_{lk_o}(e) \frac{1}{\prod_{j=1}^{\hat{e}_i} f_i(j) \prod_{j=1}^{e_{ik_o}} g_{ik_o}(j)} \frac{A_{M_i}^{\hat{e}_i + 1}}{A_M^{\hat{n} - \hat{e}_o + 1}}\, g_{ok_o}(e_{ok_o})$$

or $\quad A_{M_i}^{\hat{e}_i+1} = A_{M_i}^{\hat{e}_i}\,(M_i - \hat{e}_i)$

et $\quad A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o+1} = A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o}\,(M - \hat{n} + \hat{e}_o)$

d'où, en utilisant le fait que

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} (M_i - \hat{e}_i)}{M - \hat{n} + \hat{e}_o} = \frac{M - \sum_{i=1}^{m} \hat{e}_i}{M - \hat{n} - \hat{e}_o} = 1 \quad ,$$

on obtient

$$E_1 = p(e)\ f_o(\hat{e}_o)\ g_{ok_o}(e_{ok_o})$$

Ce résultat est bien le taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de classe k_o de la station S_o, ce qui montre que la station S_o est échangeable par classes.

Démontrons ce résultat pour une station S_i où $i \in [1,m]$.

Pour tout état e tel que $e_{ik_o} = 0$, les deux taux sont nuls.

Si $e_{ik_o} \neq 0$, le taux de probabilité d'atteindre l'état e par arrivée d'un client de classe k_o dans S_i vaut :

$$E_2 = p(e + f_{ok_o} - f_{ik_o})\ f_o(\hat{e}_o+1)\ g_{ok_o}(e_{ok_o}+1)\ r_{oi}(e + f_{ok_o} - f_{ik_o})$$

$$E_2 = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o+1} \frac{1}{f_o(j)} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k_o}}^{K} G_l(e)\ G_{k_o}(e+f_{ok_o}-f_{i_ok_o})\ f_o(\hat{e}_o+1) g_{ok_o}(e_{ok_o}+1) r_{oi}(e+f_{ok_o}-f_{ik_o})$$

$$E_2 = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o} \frac{1}{f_o(j)} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq k_o}}^{K} G_k(e) \prod_{j=1}^{e_{ok_o}+1} \frac{1}{g_{ok_o}(j)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq i}}^{m} H_{\alpha k_o}(e)\ H_{ik_o}(e+f_{ok_o}-f_{ik_o}) g_{ok_o}(e_{ok_o}+1) r_{oi}(e+f_{ok_o}-f_{ik_o}$$

$$E_2 = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o} \frac{1}{f_o(j)} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq k_o}}^{K} G_k(e) \prod_{j=1}^{e_{ok_o}} \frac{1}{g_{ok_o}j} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq i}}^{m} H_{\alpha k}(e) \frac{A_{M_i}^{\hat{e}_i-1}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o-1} \prod_{j=1}^{\hat{e}_i-1} f_i(j) \prod_{j=1}^{e_{ik_o}-1} g_{ik_o}j} \, r_{oi}(e+f_{ok_o}-f_{ik_o})$$

En remarquant que $A_{M_i}^{\hat{e}_i-1} = \dfrac{A_{M_i}^{\hat{e}_i}}{M_i - \hat{e}_i+1}$ et $A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o-1} = \dfrac{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o}}{M-\hat{n}-\hat{e}_o+1}$

on obtient

$$E_2 = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o} \frac{1}{f(j)} \prod_{k=1}^{K} G_k(e) \; f_i(\hat{e}_i) g_{ik_o}(e_{ik_o}) \frac{M-\hat{n}-\hat{e}_o+1}{M_i-\hat{e}_i+1} \; r_{oi}(e+f_{ok_o}-f_{ik_o})$$

or

$$r_{oi}(e+f_{ok_o}-f_{ik_o}) = \frac{M_i-\hat{e}_i+1}{\sum_{i=1}^{m}(M_i-\hat{e}_i)+1} = \frac{M_i-\hat{e}_i+1}{M-\hat{n}-\hat{e}_o+1}$$

d'où $\quad E_2 = p(e)\, f_i(\hat{e}_i)\, g_{ik_o}(e_{ik_o})$

On obtient ainsi le taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de classe k_o de la station S_i.

Si l'on considère maintenant la discipline : dernier arrivé, premier servi (DAPSPR) on obtient le même résultat à condition de considérer un état sous une forme plus précise.

Nous considérons donc ici un état sous la forme :

$e = (e_o, e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_m)$

où $e_i = (k(1), k(2), \ldots, k(j), \ldots, k(\hat{e}_i))$,

$k(j)$ étant la classe du j^e client de la file d'attente.

Rappelons que cette discipline de service est telle que tout client qui arrive dans une station se positionne entête de la file et de ce fait oblige le client précédemment entête à recommencer son service.

Nous supposons que le taux de service $\mu_{ik}(e)$ de la station S_i pour la classe k est de la forme $\beta_{ik}(e_{ik})\ \gamma_i(\hat{e}_i)$ où β_{ik} est une fonction du nombre de clients de classe k dans la file et $\gamma_i(\hat{e}_i)$ est une fonction du nombre total $\hat{e}_i$ de clients.

Dans cette condition toutes les stations sont échangeables par classe pour la probabilité définie par :

$$p(e) = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o} \frac{1}{\gamma_o(j)} \prod_{k=1}^{k} G_k(e)$$

où

$$G_k(e) = \prod_{j=1}^{e_{ok}} \frac{1}{\beta_{ok}(j)} \prod_{i=1}^{m} H_{ik}(e)$$

et

$$H_{ik}(e) = \frac{A_{M_i}^{\hat{e}_i}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o} \prod_{j=1}^{\hat{e}_i} \gamma_i(j) \prod_{j=1}^{e_{ik}} \beta_{ik}(j)}$$

Nous pouvons noter que l'ordre des clients n'a pas d'incidence sur l'expression de $p(e)$.

Si l'on consière un état défini comme en B1, nous obtenons bien la formule F1 du théorème B3.1

B4 - Cas particulier où la discipline de service est de type 1 (FIFO)

Si l'on conserve l'ensemble d'états sous la forme définie en B1, le réseau n'est pas markovien lorsque les disciplines de service sont de type FIFO.

En conséquence, dans ce paragraphe, un état e sera de la forme $e = (e_o, e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_m)$ où $e_i = (k_i(1), \ldots, (k_i(j), \ldots, k_i(\hat{e}_i))$; $k_i(j)$ étant la classe du $j^{\text{ème}}$ client dans la file d'attente de la station S_i.

La station S_i ne peut être échangeable par classes ; il suffit en effet de considérer e_i tel que $k_i(1) = 1$ et $k_i(\hat{e}_i) = 2$.

Par contre, lorsque le taux de service $\mu_i(e_i)$ est indépendant de la classe, nous pouvons montrer (théor. B4.1) que chaque station S_i est échangeable.

Théorème B4.1

1. *Sous les hypothèses données en A_1, A_2, A_5, B_2 et B_3, la probabilité stationnaire du réseau a pour expression :*

$$\text{(F2)} \qquad \boxed{p(e) = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o} \frac{1}{\mu_o(j)} \prod_{i=1}^{m} \frac{A_{M_i}^{\hat{e}_i}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o} \prod_{j=1}^{\hat{e}_i} \mu_i(j)}}$$

2. *Toutes les stations sont échangeables.*

Démonstration

Soit d'abord S_o.

Si S_o est vide, les deux taux de probabilité sont nuls. De même, si toutes les autres stations $(S_i)_{1\leq i\leq m}$ sont pleines.

Si S_o n'est pas vide, pour tout état e, le taux de probabilité d'atteindre l'état e par arrivée d'un client dans S_o vaut

$$E_3 = \sum_{i=1}^{m} p(e - f_{ok} + f_{ik})\ \mu_i(\hat{e}_i + 1)$$

$$E_3 = C \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{\hat{e}_o-1} \frac{1}{\mu_o(j)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq i}}^{m} \frac{A_{M_\alpha}^{\hat{e}_\alpha}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o} \prod_{j=1}^{\hat{e}_\alpha} \mu_\alpha(j)} \cdot \frac{A_{M_i}^{\hat{e}_i+1}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o+1} \prod_{j=1}^{\hat{e}_i+1} \mu_i(j)}\ \mu_i(\hat{e}_i+1)$$

$$E_3 = C \sum_{i=1}^{m} p(e)\ \mu_o(\hat{e}_o)\ \frac{M_i - \hat{e}_i}{M - \hat{n} + \hat{e}_o}$$

or $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (M_i - \hat{e}_i) = M - \sum_{i=1}^{m} \hat{e}_i = M - (\hat{n} - \hat{e}_o) = M - \hat{n} + \hat{e}_o$

d'où

$$E_3 = p(e)\ \mu_o(\hat{e}_o)\ .$$

On obtient bien le taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de S_o.

Soit maintenant une station S_i pour $i \in [1,m]$. Le taux de probabilité d'atteindre un état e par arrivée d'un client dans S_i vaut

$$E_4 = p(e + f_{ok} - f_{ik})\ \mu_o(\hat{e}_o + 1)\ r_{oi}(e + f_{ok} - f_{ik})$$

$$E_4 = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o+1} \frac{1}{\mu_o(j)} \prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m} \frac{A_{M_\alpha}^{\hat{e}_\alpha}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o} \prod_{j=1}^{\hat{e}_\alpha} \mu_\alpha(j)} \quad \frac{A_{M_i}^{\hat{e}_i-1}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o-1} \prod_{j=1}^{\hat{e}_i-1} \mu_i(j)} \mu_o(\hat{e}_o+1) r_{oi}(e+f_{ok}-f_{ik})$$

$$E_4 = p(e) \frac{M-\hat{n}+\hat{e}_o+1}{M_i-\hat{e}_i+1}\ \mu_i(\hat{e}_i)\ r_{oi}(e + f_{ok} - f_{ik})$$

or $$r_{oi}(e + f_{ok} - f_{ik}) = \frac{M_i - \hat{e}_i + 1}{M-\hat{n} + \hat{e}_o+1}$$

d'où $E_4 = p(e)\ \mu_i(\hat{e}_i)$

On obtient donc le taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de la station S_i.

Corollaire B4.1

Dans le cas où un état e est défini comme dans B_1, on obtient

$$\text{(F3)} \qquad \boxed{p(e) = C \prod_{j=1}^{\hat{e}_o} \frac{\prod_{k=1}^{K} C_{\hat{e}_o - \sum_{l=1}^{k-1} e_{ol}}^{e_{ok}}}{\mu_o(j)} \prod_{i=1}^{m} \frac{\prod_{k=1}^{K} C_{\hat{e}_i - \sum_{l=1}^{k-1} e_{il}}^{e_{ik}} \ A_{M_i}^{\hat{e}_i}}{A_M^{\hat{n}-\hat{e}_o} \prod_{j=1}^{\hat{e}_i} \mu_i(j)}}$$

où C_n^p est le nombre de combinaisons de p éléments parmi n.

Démonstration

Il suffit en effet de constater que dans la formule F2, la position des clients dans la file d'attente n'apparaît pas.

Il y a $\prod_{i=0}^{m} \prod_{k=1}^{K} \binom{e_{ik}}{\hat{e}_i - \sum_{l=1}^{k-1} e_{il}}$ états définis en B4 correspondant au même état

$e = (e_0, e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_m)$ avec $e_i = (e_{i1}, \ldots, e_{ik}, \ldots, e_{im})$, e_{ik} étant le nombre de clients de classe k dans S_i.

CONCLUSION

Depuis l'article de J.R. JACKSON [2], de nombreux auteurs se sont intéressés aux réseaux de files d'attente à forme produit (voir l'article très complet de G. PUJOLLE sur le sujet ([6]).

Hélas, les principaux résultats obtenus concernent des réseaux dont les routages sont fixes et dont les stations ont des capacités limitées. C'est pourquoi, les recherches se sont récemment orientées vers les réseaux à routages dépendant de l'état.

Notons, à ce sujet, les travaux de J. PELLAUMAIL [4], B. PITTEL [5], D. TOWSLEY [7], et également LE NY [3] dans le cas multiclasse.

Nous avons présenté ici un exemple de réseau multiclasse à routages dépendant de l'état, certaines stations ayant de plus une capacité limitée.

Le point important de l'article réside dans le fait que nous obtenons des formules exactes pour les probabilités stationnaires d'états.

NOTATIONS

$\bar{R}$	réseau fermé
R	réseau ouvert
S_i	station d'indice i, $0 \leqslant i \leqslant m$
K	nombres de classes de clients
k	indice d'une classe
$[1,K]$	ensemble des indices $\{1,2,\ldots,K\}$ des classes
n_k	nombre de clients de classe k
n	vecteur $(n_1, n_k, \ldots, n_K)$
$\hat{n}$	$\sum_{k=1}^{K} n_k$: nombre total de clients dans $\bar{R}$
e	état du réseau
e_i	état de la station S_i
e_{ik}	nombre de clients de classe k dans S_i
$\hat{e}_i$	nombre de clients dans S_i $(\hat{e}_i = \sum_{k=1}^{K} e_{ik})$
M_i	capacité maximale de la station S_i
M	$\sum_{i=1}^{m} M_i$

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BASKETT, M. CHANDY, R.R. MUNTZ et J.G. PALACIOS - Open, closed and mixed Networks with Different classes of customers, J.A.C.M. Vol. 22, 1975, p. 248-260.

[2] J.R. JACKSON - Jobshop-Like Queueing systems, Management science, Vol. 10, N. 1, Octobre 1963.

[3] L.M. LE NY - Etude analytique de réseaux de files d'attente à routages variables. R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle/ Operations Research, Vol. 14, N. 4, novembre 1980, p. 331-347.

[4] J. PELLAUMAIL - Formule du produit et décomposition de réseaux de files d'attente. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. XV, N. 3, pp. 261-286.

[5] B. PITTEL - Closed exponential networks of queues with blocking : The Jackson-type stationary distribution and its asymptotic analysis. IBM Res. Rep. Aug. 1976.

[6] G. PUJOLLE - Réseaux de files d'attente à forme produit. RAIRO. Recherche opérationnelle / Operations Research. Vol. 14, N. 4, novembre 1980, p. 317-330.

[7] D. TOWSLEY - Queueing Network Models with State-Dependent Routing. JACM, Vol. 27, N. 2, April 1980, pp. 323-337.

Louis Marie LE NY
I.N.S.A.
20, avenue des Buttes de Coësmes
35043 RENNES Cédex