

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

D. TIBI

Seuils de percolation en dimension deux

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 78, série *Probabilités et applications*, n° 2 (1984), p. 57-132

http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1984__78_2_57_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SEUILS DE PERCOLATION

EN DIMENSION DEUX

D. TIBI

Je tiens à remercier Monsieur F. LEDRAPPIER sous la direction duquel j'ai effectué ce travail, constituant ma thèse de troisième cycle, ainsi que les différentes personnalités scientifiques que j'ai eu la chance de rencontrer et qui m'ont aidée à mieux connaître la percolation, en particulier Messieurs H. KESTEN et L. RUSSO.

INTRODUCTION.

Introduite en 1957 par Broadbent et Hammersley ([4]), la notion de percolation a fourni un modèle pour décrire de nombreux systèmes, pour la plupart proposés par la physique (voir [6], [11], [23] pour une série d'exemples), et présentant en particulier des liens étroits avec la question des transitions de phase en mécanique statistique (cf [1], [5], [8], [17]).

Indépendamment de ses multiples illustrations en physique, en chimie ou en biologie, la percolation suscite l'intérêt des mathématiciens par sa formulation relativement simple; cependant, malgré certaines techniques devenues classiques (comme la dualité entre graphes, les inégalités F.K.G. (cf [9], [10]) ou les arguments de Peierls...), cette théorie n'a aujourd'hui à son acquis qu'un nombre assez restreint de résultats rigoureux, qui suivent à des années d'intervalle ceux obtenus par la physique (c'est le cas du résultat $p_c = \frac{1}{2}$ concernant le modèle de percolation des liens dans \mathbb{Z}^2 , démontré en 1980 par Kesten [15]).

La formulation du problème en termes de «percolation des liens» (voir par exemple [7] ou [11] pour la «percolation des sites») est la suivante : il s'agit d'étudier la structure des composantes connexes (amas) d'un graphe aléatoire obtenu à partir d'un graphe donné G (connexe, infini dénombrable) en supprimant des liens (dits alors fermés) suivant une certaine loi de probabilité. On précise parfois «percolation indépendante» pour signifier que l'état des différents liens (fermé ou, au contraire, ouvert) est déterminé par des tirages indépendants.

Les questions abordées sont de plusieurs sortes :

* détermination des seuils critiques de percolation (c'est-à-dire de présence d'amas infinis; cf [2], [14], [15], [16], [19], [20], [26], [27], [28]), et comparaison de ce seuil avec diverses autres valeurs critiques (cf [13], [24]).

* étude de la régularité de la fonction probabilité de percolation (probabilité pour un point donné de faire partie d'un amas infini; cf [16], [19], [20]), question reliée (dans [3]) à celle du nombre d'amas infinis (cf [7], [14], [17], [18]).

* recherche d'équivalents au voisinage du point critique pour diverses quantités comme la fonction de percolation, la taille moyenne des amas, ou leur densité moyenne (cf [12], [13] pour cette dernière); c'est le problème des exposants criti-

ques (ces quantités se comportant comme des puissances de $|p - p_c|$, où p est la probabilité pour chacun des liens d'être ouvert) (cf [16], [25]).

* étude de la percolation avec évolution dans le temps («First passage percolation» en Anglais) (cf [24]).

Cette thèse de 3ème cycle s'inscrit dans le cadre du premier type de questions, et, en particulier, des articles de L. Russo [19], [20] et [21].

Ces articles établissent la relation $p_c + p_c^* = 1$ entre le seuil de percolation p_c d'un graphe périodique plan \mathcal{G} et celui, p_c^* , de son graphe dual \mathcal{G}^* , lorsque les liens sont ouverts avec même probabilité.

[Ce résultat signifie que fermer dans \mathcal{G}^* les liens duaux des liens ouverts dans \mathcal{G} donne : si $p > p_c^*$ absence presque sûre d'amas infini dans \mathcal{G}^*
si $p < p_c^*$ présence presque sûre d'un tel amas].

Ceci permet de retrouver, par auto-dualité, la valeur $p_c = \frac{1}{2}$ pour \mathbb{Z}^2 .

Il est légitime de se demander ce que devient ce résultat lorsque les états des différents liens sont déterminés par des tirages encore indépendants, mais cette fois avec une probabilité d'ouverture variant d'un lien à un autre.

Peut-on alors avoir des indications, pour un graphe auto-dual (\mathbb{Z}^2), sur le domaine critique (qui est ici une partie de $[0,1]^L$ où L est l'ensemble des liens) ?

L'analogie du résultat de Russo serait l'existence d'une hypersurface \mathcal{A} dans $[0,1]^L$ (la surface critique) hors de laquelle les configurations présenteraient avec probabilité 1, un et un seul des 2 types d'amas infini :
amas infini dans \mathcal{G} pour p au-dessus de \mathcal{A} dans $[0,1]^L$
amas infini dans \mathcal{G}^* pour p au-dessous de \mathcal{A} dans $[0,1]^L$.

Un argument simple permet de constater que ce résultat est faux dans $[0,1]^L$ tout entier (les domaines d'existence presque sûre de chacun des 2 types d'amas infinis sont l'un et l'autre négligeables dans $[0,1]^L$ muni du produit des mesures de Lebesgue sur $[0,1]$).

Il est vrai si l'on se restreint à l'ensemble des distributions de probabilités aux différents liens qui sont périodiques et symétriques par rapport à des axes de coordonnées convenablement choisis; et il s'étend par densité aux distributions limites périodiques et symétriques par rapport aux axes.

Ceci constitue le résultat principal de cette thèse et est établi au chapitre II, théorème 2.

Remarque : on raisonne dans ce chapitre sur la percolation des liens dans \mathbb{Z}^2 ; on aurait pu (comme le fait Kesten dans [16]) étudier le problème plus général (cf [7] ou [11]) de la percolation des sites dans un graphe périodique plan quelconque, mais ceci aurait nécessité des définitions un peu plus générales, et alourdi les démonstrations.

Le chapitre III donne quelques conséquences : on montre en particulier que, par auto-dualité, $p_1 + p_2 = 1$ est la surface critique pour le modèle de percolation des liens de \mathbb{Z}^2 où l'on ouvre les liens horizontaux avec probabilité p_1 et les liens verticaux avec probabilité p_2 (ce qui est aussi établi par Kesten dans [16]).

Le cas du réseau triangulaire dont les liens sont ouverts, selon leur direction, avec probabilité p_1 , p_2 ou p_3 reste non résolu dans cas général, à cause de l'exigence de symétries; il est déduit du théorème 2 dans le cas où $p_2 = p_3$, la courbe critique est alors $p_1 + 2p_2 - p_1 p_2^2 = 1$ (voir aussi dans [16]).

La méthode de démonstration suit dans ses grandes lignes celle de Russo [19], [20] et [21], et la plupart des résultats intermédiaires sont des généralisations au cas périodique qui nous intéresse de lemmes établis dans ces articles pour le problème à 1 paramètre. En particulier, pour généraliser la méthode utilisée dans [21] au paragraphe : «An application to percolation theory», on est conduit à établir une extension de la loi-zéro un approchée au cas de probabilités de Bernoulli quelconques; ceci fait l'objet du chapitre I et constitue ici le seul résultat qui ne requiert aucune hypothèse ni de périodicité, ni de symétrie.

BIBLIOGRAPHIE.

- 1) Aizenman, M., Delyon, F., Souillard, B. :
Lower bounds on the cluster size distributions.
J. Stat. Phys. 23 267-280 (1980).
- 2) Van den Berg, J. :
A note on percolation theory.
J. Phys. A : Math. Gen. 15 605-610 (1982).
- 3) Van den Berg, J., Keane, M. :
On the continuity of the percolation probability function.
Preprint.
- 4) Broadbent, S.R., Hammersley, J.M. :
Percolation processes. I, II.
Proc. Cambridge Philos. Soc. 53, 629-641 and 642-645 (1957).
- 5) Coniglio, A., Nappi, C.R., Peruggi, F., Ruso, L. :
Percolation and phase transitions in the Ising model.
Comm. Math. Physics 51, 315-329 (1976).
- 6) De Gennes, P.G. :
La percolation : un concept unificateur.
La recherche n° 72 p.919 (Novembre 1976).
- 7) Fisher, M.E. :
Critical probabilities for cluster size and percolation problems.
J. Math. Phys. 2, 620-627 (1961).
- 8) Fortuin, C.M., Kasteleyn, P.W. :
On the random cluster model I. Introduction and relation to other
models.
Physica 57, 536-564 (1972).
- 9) Fortuin, C.M. :
On the random cluster model II. The percolation model.
Physica 58, 393-418 (1972).

- 10) Fortuin, C.M., Kasteleyn, P.W., Ginibre, J. :
Correlation inequalities on some partially ordered sets.
Comm. Math. Phys. 22, 89-103 (1971).
- 11) Frish, H.L., Hammersley, J.M. :
Percolation processes and related topics.
S.I.A.M. J. 11, 894-918 (1963).
- 12) Grimmett, G.R. :
On the number of clusters in the percolation model.
J. London. Math. Soc. 13, 346-350 (1976).
- 13) Grimmett, G.R. :
On the differentiability of the number of clusters per vertex in
the percolation model.
J. London. Math. Soc. 23, 372-384 (1982).
- 14) Harris, T.E. :
A lower bound for the critical probability in a certain percolation
process.
Proc. Cambridge. Philos. Soc. 56, 13-20 (1960).
- 15) Kesten, H. :
The critical probability of bond percolation on the square lattice
equals $1/2$.
Comm. Math. Phys. 74, 41-59 (1980).
- 16) Kesten, H. :
Percolation theory for mathematicians.
Birkhauser, Boston (1982).
- 17) Kunz, H., Souillard, B. :
Essential singularity in percolation problems and asymptotic beha-
vior of cluster size distribution.
J. Stat. Phys. 19, 77-106 (1978).
- 18) Newman, C.M., Schulman, L.S. :
Infinite clusters in percolation models.
J. Stat. Phys. 26, 613-628 (1981).

- 19) Russo, L. :
A note on percolation.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 43, 39-48 (1978).
- 20) Russo, L. :
On the critical percolation probabilities.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 56, 229-237 (1981).
- 21) Russo, L. :
An approximate zero-one law.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 61, 129-139 (1982).
- 22) Seymour, P.D., Welsh, D.J.A. :
Percolation probabilities on the square lattice.
Ann. Discrete Math. 3, 227-245 (1978).
- 23) Shante, V.K.S., Kirkpatrick, S. :
An introduction to percolation theory.
Adv. Phys. 20, 325-356 (1971).
- 24) Smythe, R.T., Wierman, J.C. :
First passage percolation on the square lattice.
Lecture Notes in Math. Vol 671 Springer (1978).
- 25) Stauffer, D. :
Scaling theory of percolation clusters.
Phys. Reports 54 N° 1, 1-74 (1979).
- 26) Sykes, M.F., Essam, J.W. :
Exact critical percolation probabilities for site and bond problems
in two dimensions.
J. Math. Physics 5, 1117-1132 (1964).
- 27) Wierman, J.C. :
On critical probabilities in percolation theory.
J. Math. Physics 19, 1979-1982 (1978).
- 28) Wierman, J.C. :
Bond percolation on honeycomb and triangular lattices.
Adv. Appl. Prob. 13 293-313 (1981).

I EXTENSION DE LA LOI ZERO-UN APPROCHÉE DE RUSSO.

Ce chapitre reprend les notations de [7] "An approximate zero-one law" et consiste à étendre, étape par étape, les résultats de Russo au cas de probabilités de Bernoulli quelconques.

Rappelons qu'on travaille sur l'espace $\Omega = \{-1, +1\}^L$ où L est un ensemble dénombrable, et que l'on note :

\mathcal{B} la tribu sur Ω engendrée par les événements $E_k^+ = \{\omega \in \Omega / \omega(k) = +1\}$ $k \in L$
 (on note aussi $E_k^- = \{\omega \in \Omega / \omega(k) = -1\}$ $k \in L$)

\mathcal{B}_K (où $K \subset L$) la tribu engendrée par les événements E_k^+ , $k \in K$

\mathcal{B}_∞ la tribu $\bigcap_{K \text{ fini } \subset L} \mathcal{B}_{L/K}$

\mathcal{B}_{\neq} la famille d'évènements : $\mathcal{B}_{\neq} = \bigcup_{K \text{ fini } \subset L} \mathcal{B}_K$

Appelons S_i (pour tout i dans L) l'application de Ω dans lui-même qui change en son opposée la coordonnée d'indice i .

Notons, pour tout i dans L et tout A dans \mathcal{B} :

$$\delta_i^I A = \{\omega \in \Omega / S_i(\omega) \notin A\}, \quad \delta_i^E A = \{\omega \notin A / S_i(\omega) \in A\}, \quad \delta_i A = \delta_i^I A \cup \delta_i^E A$$

$$\text{et} \quad \delta^I A = \bigcup_{i \in L} \delta_i^I A, \quad \delta^E A = \bigcup_{i \in L} \delta_i^E A, \quad \delta A = \delta^I A \cup \delta^E A$$

Pour tout ω dans Ω $C_A(\omega) = \{i \in L / \omega \in \delta_i A\}$ est dit ensemble des indices critiques de ω pour A .

L'ensemble Ω est muni de l'ordre partiel défini par :

$\omega \leq \omega'$ si et seulement si, pour tout i dans L , on a $\omega(i) \leq \omega'(i)$

Un évènement A de \mathcal{B} est dit positif si sa fonction caractéristique (notée χ_A) est croissante.

L'extension annoncée consiste à travailler avec la loi de probabilité sur Ω :

$$\mu_x = \prod_{i \in L} \nu_{x_i} \quad \text{où } x = (x_i)_{i \in L} \in [0,1]^L$$

et ν_{x_i} est la loi de probabilité sur $\{-1, +1\}$ telle

$$\text{que } \begin{cases} \nu_{x_i} \{+1\} = x_i \\ \nu_{x_i} \{-1\} = 1 - x_i \end{cases}$$

Alors le résultat de [7] se généralise en :

Théorème 1 : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

si $x \in [0,1]^L$ vérifie $\sup_{i \in L} x_i = 1$ et $\inf_{i \in L} x_i \geq \epsilon$

et si $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ est positif et vérifie $\max_{i \in L} \mu_{t,x}(\delta_i A) < \eta$
 $t \in [0,1]$

alors il existe $t_{x,A} \in [0,1]$ tel que $\begin{cases} t \leq t_{x,A} - \epsilon \implies \mu_{t,x}(A) \leq \epsilon \\ \text{et } t \geq t_{x,A} + \epsilon \implies \mu_{t,x}(A) \geq 1 - \epsilon \end{cases}$

(autrement dit, la fonction $\det \mu_{t,x}(A)$ devient très rapidement proche de 1 dès qu'elle s'éloigne légèrement de 0).

Pour établir ce théorème, on étudie séparément chaque direction x (vérifiant $\sup x_i = 1$ et $\inf x_i > 0$), et on montre que les résultats intermédiaires obtenus dans [7] pour $x = (1)$ se généralisent.

On suppose désormais $\epsilon > 0$ et x vérifiant $\sup x_i = 1$ et $\inf x_i \geq \epsilon$ fixés; on montre alors :

Proposition : si $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ est positif, $t \in [0,1]$, $\mu_{t,x}(A) \geq \epsilon$ et $\mu_{t,x}(\delta^I A) < \epsilon^4$
 alors $\mu_{(t+\epsilon)x}(A) \geq 1 - \epsilon$

ceci en utilisant le lemme suivant (où l'on suppose $L = \mathbb{N}^*$) :

Lemme 1 : si ν est une loi de probabilité sur (Ω, \mathcal{B})

si $C \in \mathcal{B}$ vérifie $\nu(C) \geq 1 - \epsilon$

et pour tout $\omega \in C$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\nu(E_k^+ | \omega^{(k-1)}) \leq x_k$

alors $\nu \leq \mu_x$

[où $\nu \leq \mu$ signifie qu'il existe une représentation jointe m de ν et μ sur $\Omega \times \Omega$ telle que $m\{(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega / \omega \leq \omega'\} \geq 1 - \varepsilon$

et $\omega^{(k)}$ désigne le cylindre $\{\omega' \in \Omega / \forall i \leq k \ \omega'(i) = \omega(i)\}$ et $\omega^{(0)} = \Omega$.

On considère ensuite pour $A \in \mathcal{B}$ les variables aléatoires suivantes :

$$n_A^x(\omega) = \sum_{i \in L} x_i \chi_{\delta_i A}(\omega) \quad n_A^I(\omega) = \sum_{i \in L} \chi_{\delta_i^I A}(\omega) \quad n_A^E(\omega) = \sum_{i \in L} \chi_{\delta_i^E A}(\omega)$$

Alors le théorème se déduit de la proposition en utilisant :

Lemme 2 : si $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ est positif, alors pour tout $t \in [0, 1]$ $E_{tx}(n_A^x) = \frac{d}{dt} \mu_{tx}(A)$

Lemme 3 : si $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ non vide, alors pour tout $y \in [0, 1]^L$ tel que

$$y' = \inf_{i \in L} [\min(y_i, 1 - y_i)] > 0$$

$$E_y(n_A^x | A) \geq \varepsilon \cdot \log_y \mu_y(A)$$

Lemme 4 : pour tous $x, \alpha, \beta \in]0, 1[$ et pour tout $y \in]0, x'[$

$$(\text{avec } x' = \inf_{i \in L} [\min(x_i, 1 - x_i)])$$

$$\log_y [x\alpha + (1-x)\beta] \leq \frac{x\alpha}{x\alpha + (1-x)\beta} \log_y \alpha + \frac{(1-x)\beta}{x\alpha + (1-x)\beta} \log_y \beta + \frac{x' \cdot |\alpha - \beta|}{x\alpha + (1-x)\beta}$$

puis, en définissant $\mathcal{A} = \{S \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \text{ pouvant s'écrire } S = A \setminus B \text{ avec } A, B \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \text{ positifs}\}$

Lemme 5 : si $0 < \alpha < \beta < 1$ et $S \in \mathcal{A}$ alors, $\int_{\alpha}^{\beta} \mu_{tx}(S) dt \leq 2 \left[\inf_{t \in [\alpha, \beta]} E_{tx}(n_S^x | S) \right]^{-1}$

Lemme 6 : si $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ est positif alors pour tout entier $k > 0$

$$\Delta_k^I A = \{\omega \in A / n_A^I(\omega) = k\} \quad \text{et} \quad \Delta_k^E A = \{\omega \notin A / n_A^E(\omega) = k\} \quad \text{sont dans } \mathcal{A}.$$

Lemme 7 : pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ positif :

$$\int_{\alpha}^{1-\alpha} \mu_{tx}(\delta A) dt \leq \frac{4}{\varepsilon} [\log_{\alpha\varepsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{où } \eta = \max_{\substack{t \in [0, 1] \\ i \in L}} \mu_{tx}(\delta_i A)$$

Démonstrations : Les lemmes 2 à 6 servent à établir le lemme 7, qui avec la proposition entraîne le théorème.

J'omettrai les démonstrations des lemmes 1 et 6, ce dernier étant démontré dans [7], et le premier n'étant qu'une généralisation immédiate du lemme 1 de [7].

Démonstration de la proposition : on veut appliquer le lemme 1 aux deux mesures

$\nu = \mu_{tx}(\cdot | A)$ et $\mu_{(t+\epsilon)x}$, et à l'ensemble $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$

où $C_k = \{\omega \in \Omega / \mu_{tx}(\delta_k^I A | \omega^{(k-1)}) \leq \epsilon \cdot x_k \cdot \mu_{tx}(A | \omega^{(k-1)})\}$.

Il faut pour cela vérifier que, sous les hypothèses de la proposition :

$$1) \mu_{tx}(C | A) \geq 1 - \epsilon$$

$$2) \forall \omega \in C \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mu_{tx}(E_k^+ | \omega^{(k-1)} \text{ et } A) \leq (t + \epsilon) \cdot x_k$$

Or :

$$1) \mu_{tx}(A) \geq \epsilon \implies \mu_{tx}(\Omega \setminus C | A) \leq \frac{1}{\epsilon} \cdot \mu_{tx}(A \cap \Omega \setminus C) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{tx}(A \cap D_k)$$

$$\text{où } D_k = \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} C_i \right] \cap [\Omega \setminus C_k] \quad (\text{donc } \Omega \setminus C = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \text{ union disjointe})$$

et par définition des C_k :

$$\begin{aligned} \mu_{tx}(\delta_k^I A | D_k) &> \epsilon \cdot x_k \cdot \mu_{tx}(A | D_k) \quad (x_{D_k} \text{ n'étant fonction que de } \omega^{(k-1)}) \\ &\geq \epsilon^2 \cdot \mu_{tx}(A | D_k) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mu_{tx}(\Omega \setminus C | A) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{tx}(\delta_k^I A \cap D_k) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{tx}(\delta_k^I A \cap D_k)$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2} \mu_{tx}(\delta^I A) < \epsilon$$

$$2) \forall \omega \in C \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N} \quad \mu_{tx}(A \cap \omega^{(k-1)}) > 0 \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} \mu_{tx}(E_k^+ | \omega^{(k-1)} \cap A) &= [\mu_{tx}(\omega^{(k-1)} \cap A)]^{-1} \times [\mu_{tx}(E_k^+ \cap (A \setminus \delta_k^I A) \cap \omega^{(k-1)}) \\ &\quad + \mu_{tx}(E_k^+ \cap \delta_k^I A \cap \omega^{(k-1)})] \end{aligned}$$

$$\text{or } A \text{ positif } \implies \delta_k^I A \subset E_k^+$$

D'autre part E_k^+ et $(A \setminus \delta_k^I A) \cap \omega^{(k-1)}$ sont μ_{tx} -indépendants (E_k^+ ne dépend que de ω_k ; $\omega^{(k-1)}$ ne dépend que de $\omega_1, \dots, \omega_{k-1}$ et $A \setminus \delta_k^I A$ que des $\omega_i, i \neq k$, puisque : $\omega \in A \setminus \delta_k^I A \iff S_k(\omega) \in A \setminus \delta_k^I A$)

$$\begin{aligned} \text{donc } & \mu_{tx}(E_k^+ | \omega^{(k-1)} \cap A) \\ &= [\mu_{tx}(\omega^{(k-1)} \cap A)]^{-1} \cdot [tx_k \cdot \mu_{tx}((A \setminus \delta_k^I A) \cap \omega^{(k-1)}) + \mu_{tx}(\delta_k^I A \cap \omega^{(k-1)})] \\ &\leq tx_k + \frac{\mu_{tx}(\delta_k^I A \cap \omega^{(k-1)})}{\mu_{tx}(A \cap \omega^{(k-1)})} \leq (t+\epsilon)x_k \quad \text{puisque } \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \end{aligned}$$

Pour les $\omega \in C$ tels que $\mu_{tx}(A \cap \omega^{(k-1)}) = 0$ on a aussi

$$\mu_{tx}(E_k^+ | \omega^{(k-1)} \cap A) \leq (t+\epsilon)x_k \quad \text{en choisissant pour } \mu_{tx}(\cdot | \omega^{(k-1)} \cap A) \text{ la mesure } \mu_{(t+\epsilon)x}, \text{ ou bien } \mu_{tx} \dots$$

(on est libre de prendre n'importe quelle mesure puisque $\omega^{(k-1)}$ est à valeurs dans $\{-1, +1\}^{k-1}$ fini).

D'après le lemme 1, on conclut que $\mu_{tx}(\cdot | A) \leq \mu_{(t+\epsilon)x}$
donc, A étant positive, $\mu_{tx}(A | A) \leq \mu_{(t+\epsilon)x}(A) + \epsilon \iff \mu_{(t+\epsilon)x}(A) \geq 1 - \epsilon$.

Remarque : on utilise ici : A positif et $v \leq \mu \implies v(A) \leq \mu(A) + \epsilon$

$$\begin{aligned} \text{en effet } & v(A) = m(A \times \Omega) \\ & \mu(A) = m(\Omega \times A) \quad \text{et } m(\{(\omega, \omega') / \omega \leq \omega'\}) \geq 1 - \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mu(A) \geq m(A \times A) = m(A \times \Omega) - m(A \times (\Omega \setminus A)) \geq v(A) - \epsilon$$

$$\text{car } A \geq 0 \implies A \times (\Omega \setminus A) \subset \{(\omega, \omega') \in \Omega^2 / \omega \not\leq \omega'\} \text{ ensemble de mesure } (m) \leq \epsilon$$

Démonstration du lemme 2 : il résulte immédiatement de la formule de dérivation :

$$\text{pour } A \in \mathfrak{F} \quad A \text{ positif} \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \mu_x(A) = \mu_x(\delta_k^I A) \quad \text{démontrée dans [6] lemme 3}$$

$$\text{(car alors } \frac{d}{dt} \mu_{tx}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mu_{tx}(\delta_k^I A) = E_{tx}(n_A^x).$$

Remarque : la somme intervenant dans ce 2ème membre est en fait finie puisque $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ donc $\mu_x(A)$ est fonction d'un nombre fini de x_k .

Démonstration du lemme 3 : elle se fait en 2 temps :

1) si A est un cylindre : $A = \{\omega \in \Omega / \forall i \in \Lambda \omega(i) = \sigma(i)\}$ où $\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \subset L \text{ est fini} \\ \text{et} \\ \sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda \end{array} \right.$
 $\forall y \in [0, 1]^L$ tel que $y' = \inf_{i \in L} [\inf (y_i, 1 - y_i)] > 0$

$$E_y(n_A^x | A) = \sum_{i \in \Lambda} x_i \quad \text{car sur } A, n_A^x \text{ est constante et vaut } \sum_{i \in \Lambda} x_i$$

$$\text{donc } E_y(n_A^x | A) \geq \varepsilon \times |\Lambda|$$

$$\text{Or } \mu_y(A) = \prod_{i \in \Lambda} y_i^{\frac{1}{2}(1+\sigma(i))} \cdot (1 - y_i)^{\frac{1}{2}(1-\sigma(i))} \geq y' \cdot |\Lambda|$$

$$\text{donc } |\Lambda| \geq \log_y \mu_y(A)$$

$$\text{et donc } E_y(n_A^x | A) \geq \varepsilon \cdot \log_y \mu_y(A).$$

2) pour $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ non vide quelconque : on raisonne par récurrence sur $|\Lambda|$ où $A \in \mathcal{B}_\Lambda$

* si $|\Lambda| = 0$ $A = \Omega$ (car $A \neq \emptyset$) donc les 2 membres de l'inégalité voulue sont nuls.

* si $|\Lambda| = 1$ A est un cylindre, donc le résultat est vérifié.

* supposons le résultat démontré jusqu'à l'ordre $|\Lambda| - 1$:

$$\forall i \in \Lambda \quad A \text{ s'écrit de façon unique : } A = (E_i^+ \cap A_i^+) \cup (E_i^- \cap A_i^-)$$

$$\text{où } A_i^+ \text{ et } A_i^- \in \mathcal{B}_{\Lambda \setminus \{i\}}.$$

Si $\forall i \in \Lambda$ A_i^+ ou A_i^- est vide, c'est que A est un cylindre, donc l'inégalité est vraie.

Sinon $\exists i \in \Lambda / A_i^+ \neq \emptyset$ et $A_i^- \neq \emptyset$; alors

$$\forall j \neq i \quad \delta_j^I A = [E_i^+ \cap \delta_j^I A_i^+] \cup [E_i^- \cap \delta_j^I A_i^-],$$

$$\text{et } \delta_i^I A = [E_i^+ \cap (A_i^+ \setminus A_i^-)] \cup [E_i^- \cap (A_i^- \setminus A_i^+)]$$

$\forall y \in [0, 1]^L$ tel que $y' > 0$:

$$\begin{aligned} E_y(n_A^x | A) &= [\mu_y(A)]^{-1} \cdot \sum_{j \in \Lambda} x_j \cdot \mu_y(\delta_j^I | A) \\ &= [\mu_y(A)]^{-1} \cdot \left[\sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} x_j \cdot (y_i \mu_y(\delta_j^I | A_i^+) + (1-y_i) \mu_y(\delta_j^I | A_i^-)) \right. \\ &\quad \left. + x_i (y_i \mu_y(A_i^+ \setminus A_i^-) + (1-y_i) \mu_y(A_i^- \setminus A_i^+)) \right] \end{aligned}$$

(remarque : E_i^+ et $\delta_j^I | A_i^+$ sont μ_y indépendants car

$$A_i^+ \in \mathfrak{B}_{\Lambda \setminus \{i\}} \implies \delta_j^I | A_i^+ \in \mathfrak{B}_{\Lambda \setminus \{i\}} \quad \forall j \in \Lambda \setminus \{i\}$$

de même pour E_i^- et $\delta_j^I | A_i^-$)

$$\begin{aligned} &= [\mu_y(A)]^{-1} \cdot \left[y_i \mu_y(A_i^+) \cdot E_y(n_{A_i^+}^x | A_i^+) + (1-y_i) \cdot \mu_y(A_i^-) E_y(n_{A_i^-}^x | A_i^-) \right. \\ &\quad \left. + x_i (y_i \mu_y(A_i^+ \setminus A_i^-) + (1-y_i) \mu_y(A_i^- \setminus A_i^+)) \right] \end{aligned}$$

$$(\text{car } \mu_y(A_i^+) \cdot E_y(n_{A_i^+}^x | A_i^+) = \sum_{j \in L} x_j \mu_y(\delta_j^I | A_i^+) = \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} x_j \mu_y(\delta_j^I | A_i^+)$$

puisque pour $B \in \mathfrak{B}_{\Lambda}$ on a $\delta_j^I | B = \emptyset$ si $j \notin \Lambda$).

En utilisant $\mu_y(A) = y_i \mu_y(A_i^+) + (1-y_i) \mu_y(A_i^-)$

$$\begin{aligned} \text{et } x_i (y_i \mu_y(A_i^+ \setminus A_i^-) + (1-y_i) \mu_y(A_i^- \setminus A_i^+)) &\geq \varepsilon \cdot y_i' \cdot \mu_y(A_i^+ \Delta A_i^-) \\ &\geq \varepsilon \cdot y_i' \cdot |\mu_y(A_i^+) - \mu_y(A_i^-)| \end{aligned}$$

(où $y_i' = \min(y_i, 1-y_i)$) on obtient :

$$\begin{aligned} E_y(n_A^x | A) &\geq \\ &\geq [\mu_y(A)]^{-1} \left[y_i \mu_y(A_i^+) E_y(n_{A_i^+}^x | A_i^+) + (1-y_i) \mu_y(A_i^-) E_y(n_{A_i^-}^x | A_i^-) + \varepsilon \cdot y_i' |\mu_y(A_i^+) - \mu_y(A_i^-)| \right] \\ &\geq \varepsilon \cdot \frac{y_i \mu_y(A_i^+) \log_y \mu_y(A_i^+) + (1-y_i) \mu_y(A_i^-) \log_y \mu_y(A_i^-) + y_i' |\mu_y(A_i^+) - \mu_y(A_i^-)|}{y_i \mu_y(A_i^+) + (1-y_i) \mu_y(A_i^-)} \end{aligned}$$

(ceci en appliquant l'hypothèse de récurrence aux événements A_i^+ et A_i^- de $\mathfrak{B}_{\Lambda \setminus \{i\}}$)

$$\geq \varepsilon \cdot \log_y [y_i \mu_y(A_i^+) + (1-y_i) \mu_y(A_i^-)] = \varepsilon \cdot \log_y \mu_y(A)$$

d'après le lemme 4, puisque $y' = \inf_{j \in L} [\min(y_j, 1-y_j)] \leq y_i'$.

Démonstration du lemme 4 : on suppose par exemple que $0 < \beta \leq \alpha$

Il suffit alors de montrer que la fonction f_α définie sur $]0, \alpha[$ par

$$f_\alpha(\beta) = [x\alpha + (1-x)\beta]^{-1} \cdot [x\alpha \cdot \log_y \alpha + (1-x)\beta \cdot \log_y \beta + x'(\alpha - \beta)] - \log [x\alpha + (1-x)\beta]$$

est positive.

$$\begin{aligned} \text{Or } f'_\alpha(\beta) &= [x\alpha + (1-x)\beta]^{-2} \cdot [(x\alpha + (1-x)\beta)((1-x)(\log_y \beta + \frac{1}{\text{Log } y}) - x') \\ &\quad - (1-x)(x\alpha \log_y \alpha + (1-x)\beta \log_y \beta + x'(\alpha - \beta))] - \frac{1-x}{[x\alpha + (1-x)\beta] \text{Log } y} \end{aligned}$$

$$(\text{rappelons que } \log_y \beta = \frac{\text{Log } \beta}{\text{Log } y})$$

$$\begin{aligned} &= [x\alpha + (1-x)\beta]^{-2} \cdot [x(1-x)\alpha \cdot \log_y \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{(1-x)[x\alpha + (1-x)\beta]}{\text{Log } y} - x'\alpha] \\ &\quad - \frac{1-x}{[x\alpha + (1-x)\beta] \text{Log } y} \\ &= [x\alpha + (1-x)\beta]^{-2} \cdot [x(1-x)\alpha \cdot \log_y \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - x'\alpha] \\ &= x'\alpha \cdot [x\alpha + (1-x)\beta]^{-2} \cdot [(1-x') \log_y \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - 1] \end{aligned}$$

f'_α s'annule donc en un unique point de $]0, \alpha[$: $\beta_0 = \alpha \cdot y^{\frac{1}{1-x'}}$

$$(0 < 1-x' < 1 \implies 1 < \frac{1}{1-x'} < +\infty \implies 0 < y^{\frac{1}{1-x'}} < y < 1)$$

de plus $f'_\alpha(\beta) > 0$ sur $]0, \beta_0[$

$f'_\alpha(\beta) < 0$ sur $] \beta_0, \alpha[$

u \longrightarrow $\log_y u$ étant décroissante

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ \beta > 0}} f_\alpha(\beta) = \frac{1}{x\alpha} [x\alpha \log_y \alpha + x'\alpha] - \log_y(x\alpha) = \frac{x'}{x} - \log_y x \geq \frac{x'}{x} - \log_x x \geq 0$$

(car $y \leq x' \implies \log_y \leq \log_{x'}$, sur $]0,1[$)

$$\text{et } \frac{x'}{x} - \log_{x'} x' = \frac{x'}{x} - \frac{\text{Log } x}{\text{Log } x'}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x=x' \text{ i.e. si } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-x}{x} - \frac{\text{Log } x}{\text{Log}(1-x)} = \frac{(1-x) \text{Log}(1-x) - x \text{Log } x}{x \text{Log}(1-x)} \geq 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f_\alpha(\alpha) = \alpha^{-1} \cdot \alpha \log_y \alpha - \log_y \alpha = 0$$

donc f_α est positive sur $]0,\alpha]$, ce qui prouve le lemme.

Démonstration du lemme 5.

Soient $0 < \alpha < \beta < 1$ et $S \in \mathfrak{A}$, donc il existe A et $B \in \mathfrak{B}$ positifs tels que $S = A \setminus B$.

$$\forall i \in L \quad \delta_i^I A \in E_i^+ \quad \text{et} \quad \delta_i^E B \in E_i^- \quad \text{donc} \quad \delta_i^I A \cap \delta_i^E B = \emptyset$$

$$\text{et} \quad \delta_i^I S = (\delta_i^I A \cap S) \cup (\delta_i^E B \cap S)$$

$$\text{donc} \quad \chi_{\delta_i^I S} = \chi_S \left[\chi_{\delta_i^I A} + \chi_{\delta_i^E B} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{d'où pour } \omega \in S \quad n_S^X(\omega) &= \sum_{i \in L} x_i \cdot \chi_{\delta_i^I S} = \sum_{i \in L} x_i \cdot \chi_{\delta_i^I A} + \sum_{i \in L} x_i \cdot \chi_{\delta_i^E B} \\ &= n_A^X(\omega) + n_B^X(\omega) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall t \in [\alpha, \beta] \quad \mu_{tx}(S) \cdot E_{tx}(n_S^X | S) = \mu_{tx}(S) \cdot E_{tx}(n_A^X + n_B^X | S) \leq E_{tx}(n_A^X + n_B^X)$$

$$\implies \inf_{t \in [\alpha, \beta]} E_{tx}(n_S^X | S) \cdot \int_\alpha^\beta \mu_{tx}(S) dt \leq \int_\alpha^\beta \mu_{tx}(S) \cdot E_{tx}(n_S^X | S) dt \leq \left[\mu_{tx}(A) + \mu_{tx}(B) \right]_\alpha^\beta \leq 2$$

l'avant dernière inégalité résultant du lemme 2, A et B étant positifs et dans \mathfrak{B} .

Démonstration du lemme 7.

Appliquons le lemme 5 aux événements $\Delta_k^I A$ et $\Delta_k^E A$, qui sont dans \mathfrak{A} d'après le lemme 6.

$$\forall \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\quad \int_{\alpha}^{1-\alpha} \mu_{\text{tx}}(\Delta_k^I A) dt \leq 2 \left[\inf_{t \in [\alpha, 1-\alpha]} E_{\text{tx}}(n_{\Delta_k^I A}^x \mid \Delta_k^I A) \right]^{-1} \quad (1)$$

$$E_{\text{tx}}(n_{\Delta_k^I A}^x \mid \Delta_k^I A) = [\mu_{\text{tx}}(\Delta_k^I A)]^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} E_{\text{tx}}(n_{\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A}^x \mid \Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A) \cdot \mu_{\text{tx}}(\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A)$$

où $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A = \{\omega \in A / S_i(\omega) \notin A \iff i \in \{i_1, \dots, i_k\}\}$

(ou encore $= \{\omega \in A / C_A(\omega) = \{i_1, \dots, i_k\}\}$)

$$E_{\text{tx}}(n_{\Delta_k^I A}^x \mid \Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A) = E_{\text{tx}}(n_{\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A}^x \mid \Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A)$$

car sur $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A$ les variables $n_{\Delta_k^I A}^x$ et $n_{\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A}^x$ coïncident puis-

que $\forall i \in L \quad \delta_i^I(\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A) = \delta_i^I(\Delta_k^I A)$

(en effet $\forall \omega \in \Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A$ $\left\{ \begin{array}{l} S_i(\omega) \notin \Delta_k^I A \implies S_i(\omega) \notin \Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A \\ \text{et} \\ S_i(\omega) \in \Delta_k^I A \implies S_i(\omega) \in \Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A \end{array} \right.$

la 1ère implication résultant simplement de l'inclusion $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A \subset \Delta_k^I A$, et la

seconde du fait que $\left\{ \begin{array}{l} \omega \leq S_i(\omega) \\ \text{ou} \\ \omega \geq S_i(\omega) \end{array} \right.$ donc, $\omega \rightarrow C_A(\omega)$ étant décroissante sur A

positif, $\left\{ \begin{array}{l} C_A(\omega) \supset C_A(S_i(\omega)) \\ \text{ou} \\ C_A(\omega) \subset C_A(S_i(\omega)) \end{array} \right.$; ces 2 ensembles sont donc égaux si de même cardinal).

Utilisons le lemme 3 (pour les $\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A$ non vides); on obtient :

$$E_{tx} (n^x_{\Delta_k^I A} \mid \Delta_k^I A) \geq \varepsilon \cdot \log_{(\text{tx})} \eta \quad \text{où} \quad \eta = \underset{\substack{i \in L \\ t \in [0,1]}}{\text{Max}} \mu_{\text{tx}}(\delta_i A)$$

(chaque $\mu_{\text{tx}}(\Delta_{i_1, \dots, i_k}^I A)$ étant majoré par $\mu_{\text{tx}}(\delta_{i_1} A)$ donc par η)

on rappelle la notation $(\text{tx})' = \inf_{i \in L} [\min(\text{tx}_i, 1 - \text{tx}_i)]$

$\forall t \in [\alpha, 1 - \alpha] \quad (\text{tx})' \geq \alpha \cdot \varepsilon \quad \text{car} \quad \forall i \in L \quad \alpha \cdot \varepsilon \leq \text{tx}_i \leq 1 - \alpha \leq 1 - \alpha \cdot \varepsilon \quad (\text{si } \varepsilon \leq 1)$

(x a été fixé tel que $\text{Sup } x_i = 1$ et $\text{Inf } x_i \geq \varepsilon$)

donc $E_{\text{tx}} (n^x_{\Delta_k^I A} \mid \Delta_k^I A) \geq \varepsilon \cdot \log_{\alpha \varepsilon} \eta \quad \forall t \in [\alpha, 1 - \alpha] \quad (u \in [0, 1] \longrightarrow \log_u \eta \text{ étant croissante})$

$\implies \inf_{t \in [\alpha, 1 - \alpha]} E_{\text{tx}} (n^x_{\Delta_k^I A} \mid \Delta_k^I A) \geq \varepsilon \cdot \log_{\alpha \varepsilon} \eta$ donc en reportant cette inégalité

dans la relation (1) : $\int_{\alpha}^{1 - \alpha} \mu_{\text{tx}}(\Delta_k^I A) dt \leq 2 [\varepsilon \cdot \log_{\alpha \varepsilon} \eta]^{-1}$

En raisonnant de la même façon avec les événements $\Delta_k^E A \quad (k \in \mathbb{N}^*)$, on

obtiendrait $\int_{\alpha}^{1 - \alpha} \mu_{\text{tx}}(\Delta_k^E A) dt \leq 2 [\varepsilon \cdot \log_{\alpha \varepsilon} \eta]^{-1}$

et finalement $\int_{\alpha}^{1 - \alpha} \mu_{\text{tx}}(\Delta_k A) dt \leq 4 [\varepsilon \cdot \log_{\alpha \varepsilon} \eta]^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

On peut en déduire l'inégalité $\int_{\alpha}^{1 - \alpha} \mu_{\text{tx}}(\delta A) dt \leq \frac{4}{\varepsilon} [\log_{\alpha \varepsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}}$

En effet, posons $u_k = \varepsilon \int_{\alpha}^{1 - \alpha} \mu_{\text{tx}}(\Delta_k A) dt$, la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ vérifie :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^* & u_k \leq 4 [\log_{\alpha \varepsilon} \eta]^{-1} \\ \text{et} \\ \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot u_k = \varepsilon \int_{\alpha}^{1 - \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mu_{\text{tx}}(\Delta_k A) dt \leq \int_{\alpha}^{1 - \alpha} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} (x_{i_1} + \dots + x_{i_k}) \mu_{\text{tx}}(\Delta_{i_1, \dots, i_k} A) dt \\ & = \int_{\alpha}^{1 - \alpha} E_{\text{tx}} (n^x_A) dt = [\mu_{\text{tx}}(A)]_{\alpha}^{1 - \alpha} \leq 1 \end{cases}$$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \leq 4 [\log_{\alpha\epsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}}$ car si on note $k_0 = [\frac{1}{2} (\log_{\alpha\epsilon} \eta)^{\frac{1}{2}}]$:

([•] désignant ici la partie entière)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u_k &= \sum_{k=1}^{k_0} u_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} u_k \leq k_0 \times 4 [\log_{\alpha\epsilon} \eta]^{-1} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{k}{k_0+1} u_k \\ &\leq 2 [\log_{\alpha\epsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}} + 2 [\log_{\alpha\epsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}} = 4 [\log_{\alpha\epsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\int_{\alpha}^{1-\alpha} \mu_{tx}(\delta A) dt \leq \frac{4}{\epsilon} [\log_{\alpha\epsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}}$

Démonstration du théorème.

Soit $\epsilon > 0$ donné; $x \in [0,1]^L$ vérifiant $\sup_{i \in L} x_i = 1$ et $\inf_{i \in L} x_i \geq \epsilon$

Soit $A \in \mathcal{B}_x$ évènement positif.

La fonction $t \in [0,1] \rightarrow \mu_{tx}(A)$ est alors croissante (sa dérivée est $E(n_A^x)$ d'après lemme 2).

Soit $t_0 = \inf \{t \in [0,1] / \mu_{tx}(A) \geq \epsilon\}$

(on suppose que $\{t \in [0,1] / \mu_{tx}(A) \geq \epsilon\} \neq \emptyset$; sinon l'existence de $t_{x,A}$ vérifiant la conclusion du théorème est immédiate : $t_{x,A} = 1$ convient, et ceci $\forall \eta$).

1er cas : $t_0 > 1-2\epsilon$ alors le théorème est vérifié ($\forall \eta$) avec $t_{x,A} = \frac{t_0+1}{2}$

2ème cas : $t_0 \leq 1-2\epsilon$ on applique alors le lemme 7 avec $\alpha = \frac{\epsilon}{4}$

$$\exists \eta_0 > 0 / \eta < \eta_0 \implies \frac{4}{\epsilon} [\log_{\alpha\epsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon^5}{2} \quad (\text{car } \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{4}{\epsilon} [\log_{\alpha\epsilon} \eta]^{-\frac{1}{2}} = 0)$$

alors, si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$:

$$\lambda(\{t \in [0,1] / \mu_{tx}(\delta^I A) \geq \epsilon^4\}) \leq 2\alpha + \frac{1}{\epsilon^4} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \mu_{tx}(\delta A) dt < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (\delta^I A \subset \delta A)$$

donc $\exists t_{x,A} \in [t_0, t_0 + \epsilon] / \mu_{t_{x,A}.x}(\delta A) < \epsilon^4$.

Comme d'autre part $\mu_{t_{x,A} \cdot x}(A) \geq \varepsilon$ puisque $t_{x,A} \geq t_0$, la proposition s'applique et $\mu_{(t_{x,A} + \varepsilon)}(A) \geq 1 - \varepsilon$ donc par monotonie de $\mu_{tx}(A)$ on a bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \leq t_{x,A} - \varepsilon \implies t \leq t_0 \implies \mu_{tx}(A) \leq \varepsilon \\ \text{et} \\ t \geq t_{x,A} + \varepsilon \implies \mu_{tx}(A) \geq 1 - \varepsilon \end{array} \right.$$

ceci dès que $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{Z}^2}$ est positif et vérifie $\eta = \max_{\substack{i \in L \\ t \in [0,1]}} \mu_{tx}(\delta_i A) < \eta_0$

De plus η_0 est indépendant du choix de x vérifiant $\sup_{i \in L} x_i = 1$ et $\inf_{i \in L} x_i \geq \varepsilon$:

η_0 de dépend que de ε . Ceci achève la démonstration du théorème.

II PERCOLATION DES LIAISONS DU RESEAU \mathbb{Z}^2 AVEC PROBABILITE DEPENDANT DU LIEN

DE FACON PERIODIQUE ET SYMETRIQUE PAR RAPPORT AUX AXES.

A - Définitions et notations.

Soient L l'ensemble des liens du réseau \mathbb{Z}^2 , L_1 (resp. L_2) l'ensemble des liens horizontaux (resp. verticaux), c'est à dire parallèles à l'axe Ox_1 (resp. Ox_2) de \mathbb{Z}^2 , et L^* l'ensemble des liens du réseau dual de \mathbb{Z}^2 , $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^2$. Pour tout $i \in L$ on notera i^* son lien dual : unique lien de L^* qui coupe i .

On considère l'espace $\Omega = \{-1, +1\}^L$ et on utilise les notations du chapitre I : en particulier Ω est muni de la tribu \mathfrak{B} engendrée par les événements E_k^+ , $k \in L$. Les éléments de Ω sont appelés configurations, et un lien i est dit ouvert (resp. fermé) dans la configuration ω si et seulement si $\omega(i) = +1$ (resp. $\omega(i) = -1$). (Fig. 1 donne un exemple de configuration).

Sur Ω on s'intéresse aux mesures de probabilité μ_p où $p \in [0,1]^L$ est périodique et symétrique par rapport à 2 axes $x_1 = a$ et $x_2 = b$, avec $a, b \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ (ceci signifie qu'il existe un entier $K > 0$ tel que

$\forall i \in L \quad p_i = p_{t_{(K,0)}(i)} = p_{t_{(0,K)}(i)}$ où $t_{(x_1, x_2)}$ désigne la translation de

vecteur (x_1, x_2) , pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et que $\forall i \in L \quad p_i = p_{s_a^1(i)} = p_{s_b^2(i)}$ où s_a^1 et s_b^2 sont les symétries orthogonales par rapport aux axes $x_1 = a$ et $x_2 = b$. Ces notations seront utilisées tout au long de ce chapitre pour désigner les translations et les symétries d'axes horizontaux ou verticaux).

L'ensemble des telles distributions p pour une période donnée K est noté \mathcal{P}_K . A tout $p \in [0, 1]^L$ on associe $p^* \in [0, 1]^{L^*}$ défini par : $\forall i \in L \quad p_{i^*}^* = 1 - p_i$.

On appelle chaîne, ou chemin, une suite $(v_0, i_1, v_1, i_2, \dots, i_n, v_n)$ finie où pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ $v_j \in \mathbb{Z}^2$ et $i_j \in L$ avec $i_j = [v_{j-1}, v_j]$.

Une chaîne (v_0, \dots, v_n) telle que $v_0 = v_n$ est appelée boucle.

Une partie L' de L est dite connexe si la réunion de ses éléments (considérés comme segments dans \mathbb{R}^2) est connexe.

Si $\omega \in \Omega$ on dit qu'un chemin (resp. une boucle) est ouvert dans ω s'il est dans $\omega^{-1}(+1)$.

On appelle amas de ω les composantes connexes de $\omega^{-1}(+1)$.

On s'intéresse à l'évènement $A_\infty = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ a un amas infini}\}$.

$A_\infty \in \mathcal{B}_\infty$ donc d'après la loi zéro-un : $\forall p \in [0, 1]^L \quad \mu_p(A_\infty) \in \{0, 1\}$.

Le problème est de déterminer les éléments p de \mathcal{P}_K pour lesquels $\mu_p(A_\infty) = 1$.

Remarque : Soit S l'application $\Omega \rightarrow \Omega^* = \{-1, +1\}^{L^*}$ qui associe à $\omega \in \Omega$ sa configuration duale ω^* , qui est l'élément de Ω^* défini par :

$$\forall i \in L \quad \omega^*(i^*) = -\omega(i) \quad (\text{c'est-à-dire } i^* \text{ ouvert} \iff i \text{ fermé}).$$

S envoie la mesure μ_p sur la mesure $\mu_{p^*} = \prod_{i \in L} \nu_{p_{i^*}^*}$ sur Ω^* qui, en iden-

tifiant L^* à L par la translation de vecteur $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, s'identifie à une mesure $\mu_{\tilde{p}}$ avec $\tilde{p} \in [0, 1]^L$.

De plus, si $p \in \mathcal{P}_K$ on a aussi $\tilde{p} \in \mathcal{P}_K$.

\tilde{p} sera appelée répartition duale de p .

(Ce résultat est particulier au réseau \mathbb{Z}^2 , qui est son propre dual; pour un autre réseau, non auto-dual, p et p^* ne varient pas dans le même ensemble). On appellera * -amas de ω les amas de ω^* dans L^* (composantes connexes de $\omega^{*-1}(+1)$ dans L^*); on parlera aussi d'amas dual.

B - Enoncé des résultats.

Le résultat qu'on se propose de démontrer est le suivant :

Théorème 2 : pour tout p dans \mathcal{P}_K vérifiant $\text{Min}_{i \in L} p_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L} p_i = 1$

il existe $t_p \in [0,1]$ tel que pour tout $t \in [0,1]$:

$$t < t_p \implies \mu_{t_p}(A_\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \mu_{\tilde{t}_p}(A_\infty) = 1$$

$$t > t_p \implies \mu_{t_p}(A_\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{\tilde{t}_p}(A_\infty) = 0$$

de plus si $t_p < 1$ ou si $t_p = 1$ et $\text{Max}_{i \in L_1} p_i < 1$ alors $\mu_{t_p p}(A_\infty) = 0$ ou $\mu_{\tilde{t}_p p}(A_\infty) = 0$.

Ce théorème s'étend ensuite par densité à l'adhérence \mathcal{P} de $\bigcup_{K \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_K$ dans $[0,1]^L$ muni de la norme de la convergence uniforme : \mathcal{P} est l'ensemble des éléments de $[0,1]^L$ qui sont limites périodiques (i.e limites uniforme d'éléments périodiques) et symétriques par rapport à 2 axes $x_1 = a$ et $x_2 = b$ $a, b \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$.

On déduit alors du théorème 2 :

Corollaire : pour tout p dans \mathcal{P} vérifiant $\text{Inf}_{i \in L} p_i > 0$ et $\text{Sup}_{i \in L} p_i = 1$

il existe $t_p \in [0,1]$ tel que pour tout $t \in [0,1]$:

$$t < t_p \implies \mu_{t_p}(A_\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \mu_{\tilde{t}_p}(A_\infty) = 1$$

$$t > t_p \implies \mu_{t_p}(A_\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{\tilde{t}_p}(A_\infty) = 0$$

[On ne peut rien dire ici en t_p].

Remarques :

a) Ce théorème signifie que dans chaque direction de \mathcal{P}_K (non située dans un hyperplan frontière $p_i = 0$) il existe une valeur critique commune pour l'existence presque sûre d'un amas infini et celle d'un amas dual infini. Autrement dit, il existe un domaine critique (de mesure de Lebesgue nulle dans \mathcal{P}_K identifié une partie de $[0,1]^{2K^2}$) qui sépare les domaines d'existence presque sûre de ces 2 types d'amas.

b) Le théorème n'est pas vrai sur $[0,1]^L$ tout entier, ni sur aucun ensemble de directions de $[0,1]^L$ dont la réunion n'est pas négligeable pour la mesure $\mu = \prod_{i \in L} \lambda$ (λ étant la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$).

On peut en effet montrer que $\{p \in [0,1]^L / \mu_p(A_\infty) = 1\}$ est μ -négligeable; donc $\{p \in [0,1]^L / \mu_{\tilde{p}}(A_\infty) = 1\}$ l'est aussi ($p \rightarrow \tilde{p}$ conservant la mesure μ); est donc aussi μ -négligeable toute partie de $[0,1]^L$ contenue dans la réunion de ces 2 domaines et d'un troisième domaine (critique) μ -négligeable (car ne contenant qu'un point dans chaque direction).

L'idée, pour prouver que $\mu\{p \in [0,1]^L / \mu_p(A_\infty) = 1\} = 0$, est que tirer au hasard (avec la loi μ) p dans $[0,1]^L$, puis ω dans Ω suivant μ_p , se ramène à une seule opération, qui consiste à tirer au hasard ω dans Ω avec la loi $\mu_{\frac{1}{2}}$.

En effet μ_p peut être définie par
$$\begin{cases} \mu_p(\omega(i) = +1) = \lambda([0, p_i]) \\ \text{les } \omega(i), i \in L \text{ sont des variables } \mu_p\text{-indépendantes} \end{cases}$$

On se place donc sur $([0,1]^{2L}, \mu \otimes \mu = \prod_{i \in L} \lambda \otimes \lambda)$ et à tout élément $(p_i, x_i)_{i \in L}$

de cet espace on fait correspondre la configuration :

$\omega = (\omega_i)_{i \in L}$ telle que $\omega(i) = +1$ si $x_i \leq p_i$ et $\omega(i) = -1$ si $x_i > p_i$.

Alors ω suit la loi $\mu_{\frac{1}{2}}$ (car les $\omega(i)$ sont des variables indépendantes et $\lambda \otimes \lambda(x_i \leq p_i) = \frac{1}{2}$).

Or on sait que $\frac{1}{2}$ est la valeur critique pour le modèle de percolation des liens dans \mathbb{Z}^2 à un paramètre, et que $\mu_{\frac{1}{2}}(A_{\infty}) = 0$. (cf. [3])

Donc $\mu \otimes \mu$ -presque sûrement ω ne possède pas d'amas infini.

Donc μ -presque sûrement $\mu_p(A_{\infty}) = 0$.

(car si un évènement A d'un espace produit $E_1 \times E_2$ est $\nu_1 \otimes \nu_2$ négligeable, pour ν_i mesure sur E_i , alors pour ν_1 -presque tout élément x_1 de E_1 on a $\nu_2\{x_2 \in E_2 / (x_1, x_2) \in A\} = 0$).

Fig 1

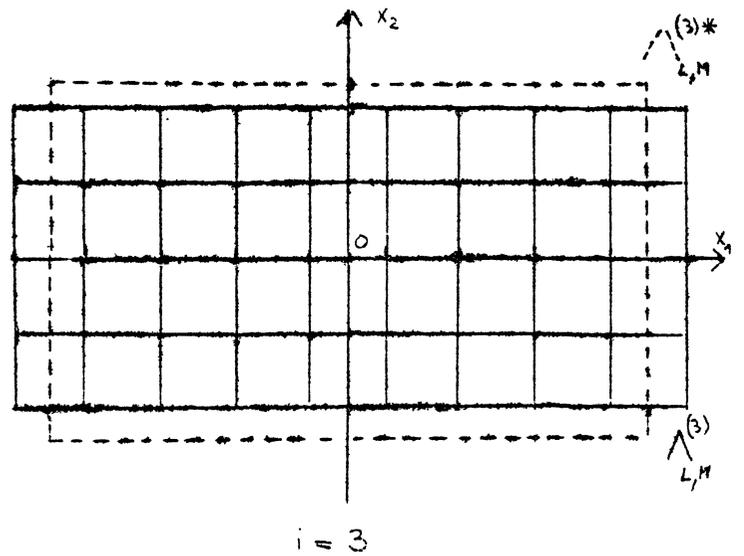
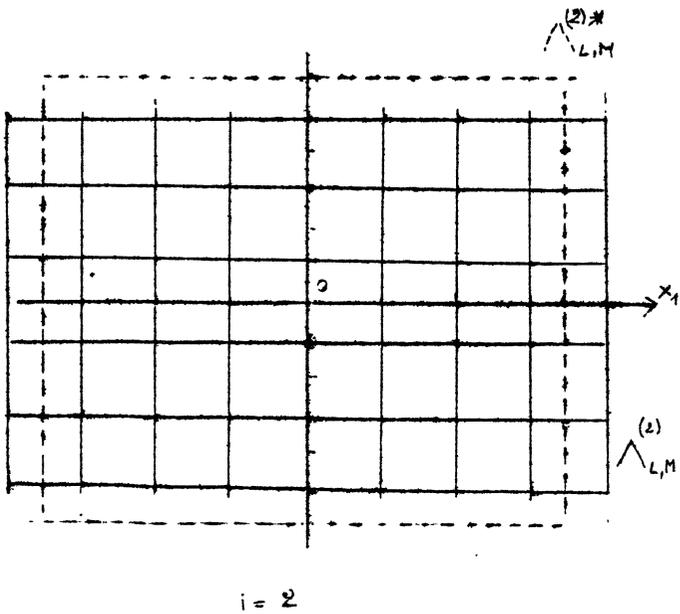
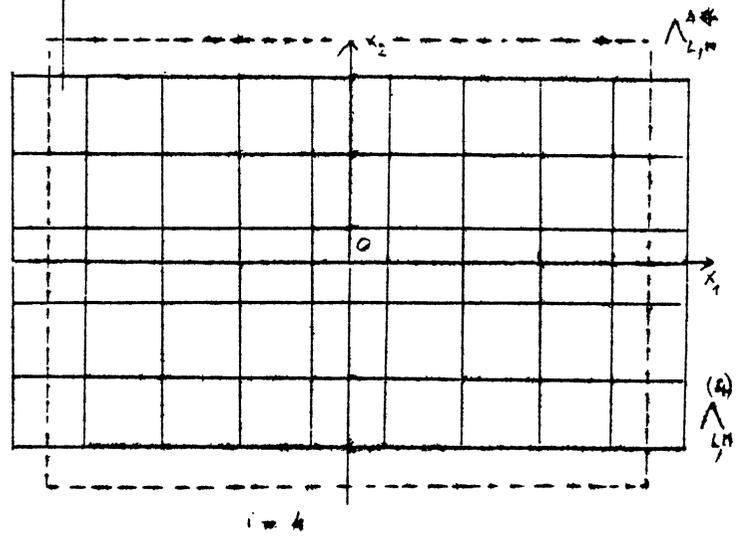
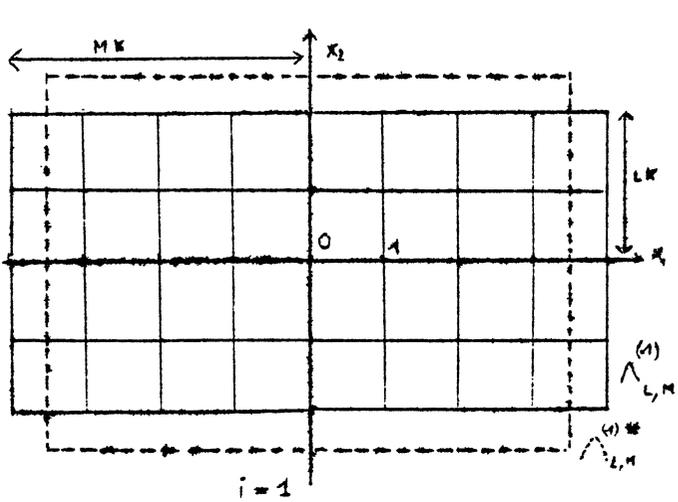
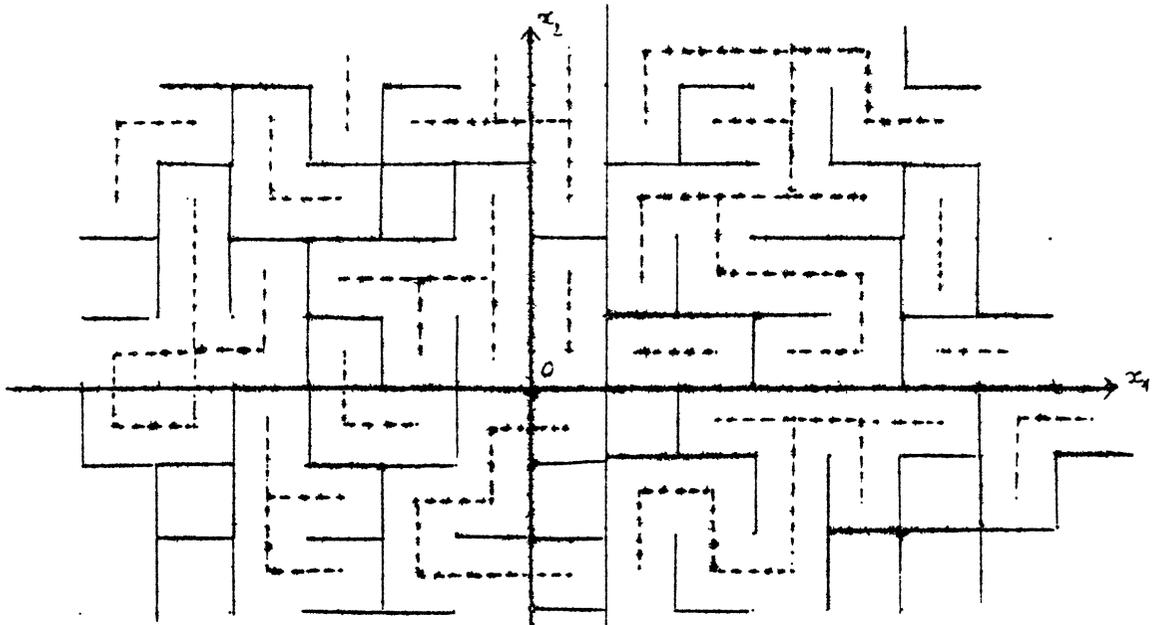


Fig 2

C - Démonstrations.

Le théorème 2 se démontre en 2 étapes : la première donne un résultat de disjonction des domaines d'existence presque sûre de chacun des 2 types d'amas infinis, et la seconde un résultat de complémentarité (au domaine critique près).

Plus précisément, on montre :

1) $\forall p \in \mathcal{P}_K$ vérifiant $\min_{i \in L_1} p_i > 0$ et $\max_{i \in L_1} p_i < 1$ on a

$$\mu_p(A_\infty) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_{\tilde{p}}(A_\infty) = 0 \quad (\text{généralisation [5] Théorème 1}).$$

2) $\forall p \in \mathcal{P}_K$ vérifiant $\min_{i \in L} p_i > 0$ et $\max_{i \in L} p_i = 1$, il existe, sur le segment $\{t_p, t \in [0,1]\}$, au maximum un point t_p tel que $\mu_{t_p}(A_\infty) = 0$ et $\mu_{\tilde{t}_p}(A_\infty) = 0$.

Démonstration du 1) : soit $p \in \mathcal{P}_K$; on veut pour simplifier les calculs, ramener les axes de symétrie de p , $x_1 = a$ et $x_2 = b$, à coïncider avec les axes Ox_1 et Ox_2 .

Quatre cas de figures peuvent se présenter, selon que a et b appartiennent à \mathbb{Z} ou à $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$; dans chacun des cas on amène l'origine au point (a,b) par translation, et l'on obtient ainsi un nouveau réseau :

- 1^{er} cas : $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ \longrightarrow réseau \mathbb{Z}^2 d'ensemble de liens $L(1) = L$
- 2^{ème} cas : $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ \longrightarrow réseau $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ d'ensemble de liens $L(2)$
- 3^{ème} cas : $a \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ et $b \in \mathbb{Z}$ \longrightarrow réseau $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}) \times \mathbb{Z}$ d'ensemble de liens $L(3)$
- 4^{ème} cas : $a \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ et $b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ \longrightarrow réseau $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^2$ d'ensemble de liens $L(4)$

Alors, en considérant p comme élément de $[0,1]^{\{\text{lien du nouveau réseau}\}}$, p varie

dans $\mathcal{P}_K^1 \cup \mathcal{P}_K^2 \cup \mathcal{P}_K^3 \cup \mathcal{P}_K^4 \sim \mathcal{P}_K$

$\mathcal{P}_K^i = \{p \in [0,1]^{L(i)} / p \text{ est périodique de période } K \text{ et symétrique par rapport à } Ox_1 \text{ et } Ox_2\}$.

De plus $p \rightarrow p^*$ établit une bijection entre \mathcal{P}_K^1 et \mathcal{P}_K^4 , ainsi qu'entre \mathcal{P}_K^2 et \mathcal{P}_K^3 .

Pour tout $(L, M) \in \mathbb{N}^2$ on définit les rectangles dans \mathbb{R}^2 :

$$\Lambda_{L, M}^{(1)} = [-MK, MK] \times [-LK, LK] \quad (\text{voir Fig. 2})$$

$$\Lambda_{L, M}^{(2)} = [-MK, MK] \times [-(LK + \frac{1}{2}), LK + \frac{1}{2}]$$

$$\Lambda_{L, M}^{(3)} = [-(MK + \frac{1}{2}), MK + \frac{1}{2}] \times [-LK, LK]$$

$$\Lambda_{L, M}^{(4)} = [-(MK + \frac{1}{2}), MK + \frac{1}{2}] \times [-(LK + \frac{1}{2}), LK + \frac{1}{2}]$$

ainsi que les évènements suivants de $\Omega^{(i)} = \{-1, +1\}^{L(i)}$ ($i = 1, \dots, 4$)

$$A_{L, M}^{(i) \longleftrightarrow} = \{\omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe un chemin ouvert inclus dans } \Lambda_{L, M}^{(i)} \text{ et dont une extrémité est sur le côté gauche de } \Lambda_{L, M}^{(i)} \text{ et l'autre sur le côté droit}\}$$

$$A_{L, M}^{(i) \updownarrow} = \{\omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe un chemin ouvert contenu dans } \Lambda_{L, M}^{(i)} \text{ et ayant une extrémité sur le côté inférieur de } \Lambda_{L, M}^{(i)} \text{ et l'autre sur le côté supérieur}\}.$$

Enfin on pose, pour $p \in \mathcal{P}_K^{(i)}$ $R_{L, M}^{\longleftrightarrow}(p) = \mu_p(A_{L, M}^{(i) \longleftrightarrow})$ et $R_{L, M}^{\updownarrow}(p) = \mu_p(A_{L, M}^{(i) \updownarrow})$

Il est immédiat que l'on a les propriétés suivantes de monotonie des $A_{L, M}^{(i)}$ et donc des $R_{L, M}(p)$ en fonction de L et M :

$$A_{L, M}^{(i) \longleftrightarrow}(p), \text{ et donc } R_{L, M}^{\longleftrightarrow}(p), \text{ croît avec } L \text{ et décroît avec } M$$

$$A_{L, M}^{(i) \updownarrow}(p), \text{ et donc } R_{L, M}^{\updownarrow}(p), \text{ croît avec } M \text{ et décroît avec } L.$$

On va maintenant établir des inégalités qui généralisent les inégalités établies par Russo dans [6] (pour la percolation de sites avec un seul paramètre p); la première est un résultat géométrique élémentaire basé sur la dualité, les 2 suivantes étant conséquence de l'inégalité F.K.G. et constituant le seul point de la démonstration où intervienne la symétrie (voir la remarque ③ qui suit la démonstration du théorème).

Pour tout $(L,M) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $p \in \mathcal{J}_K$

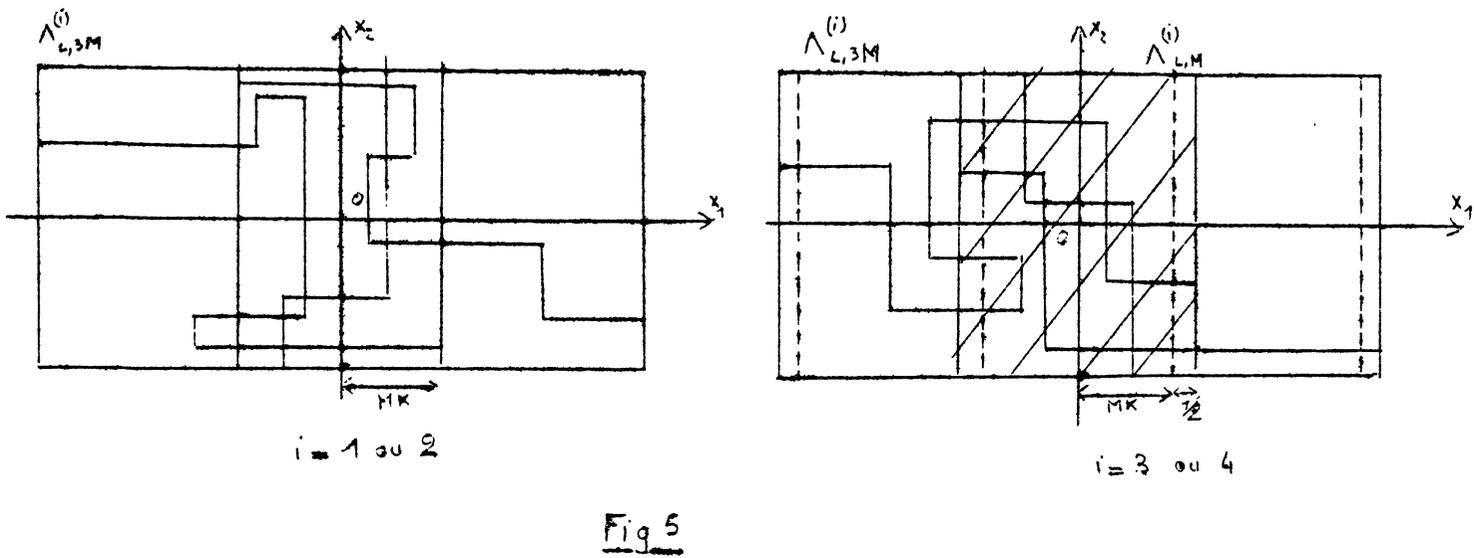
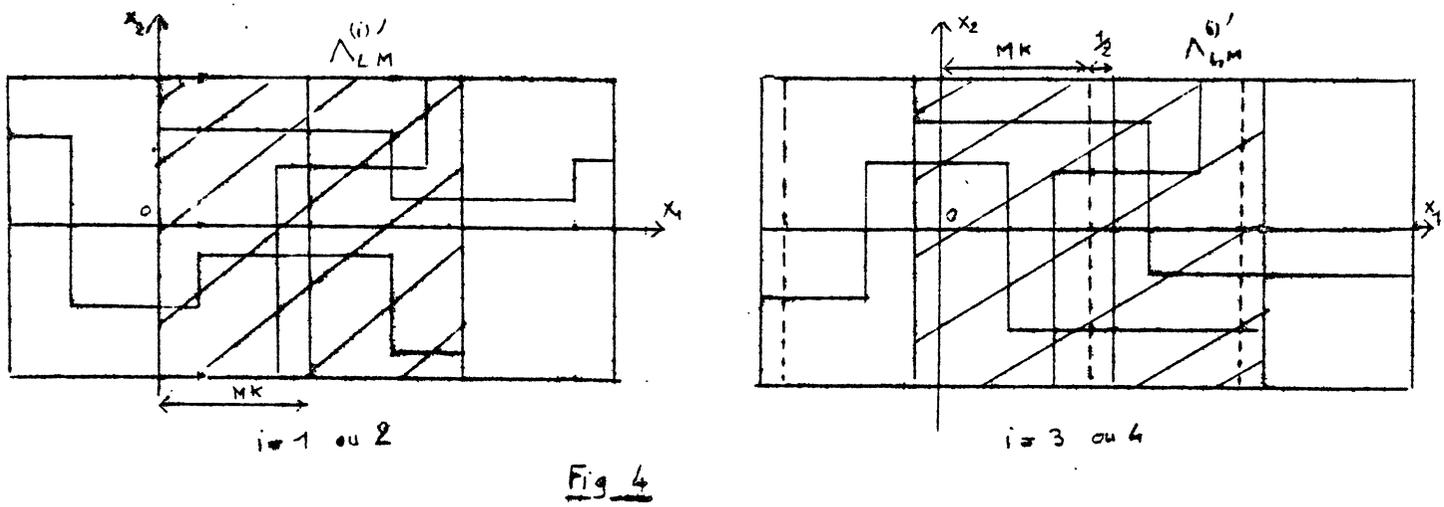
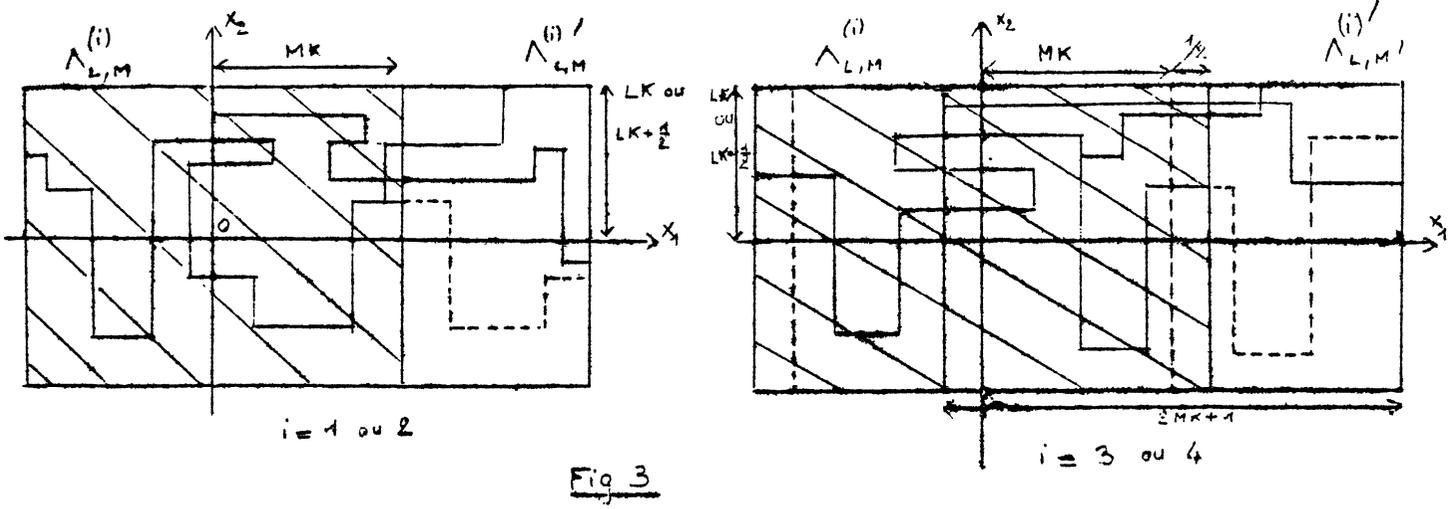
$$(1) \quad R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p) + R_{L,M}^{\updownarrow}(p^*) \geq 1$$

$$(2) \quad \begin{aligned} R_{L,3M}^{\longleftrightarrow}(p) &\geq R_{L,M}^{\updownarrow}(p)^3 \cdot \left[1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\updownarrow}(p)}\right]^4 \cdot \left[1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p)}\right]^8 \\ R_{3L,M}^{\updownarrow}(p) &\geq R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p)^3 \cdot \left[1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p)}\right]^4 \cdot \left[1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\updownarrow}(p)}\right]^8 \end{aligned}$$

(1) résulte du fait que, si pour tout rectangle $[-a,+a] \times [-b,+b]$ $a,b \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ on note $([-a,+a] \times [-b,+b])^*$ le rectangle $[-a + \frac{1}{2}, a - \frac{1}{2}] \times [-b - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}]$, alors le complémentaire de $\Lambda_{L,M}^{(i)\longleftrightarrow}$ dans $\Omega^{(i)}$ ($i=1, \dots, 4$) est l'évènement : $\{\omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe dans } \omega^*$ un chemin ouvert inclus dans $\Lambda_{L,M}^{(i)*}$ ayant une extrémité sur le côté inférieur de $\Lambda_{L,M}^{(i)*}$ et l'autre sur son côté supérieur} et, par des propriétés de monotonie analogues à celles qui précèdent, cet évènement est contenu dans $S^{-1}(\Lambda_{L,M}^{(5-i)\updownarrow})$ (rappelons que $S : \omega \rightarrow \omega^*$), car on vérifie dans chacun des cas $i = 1, \dots, 4$ que le rectangle $\Lambda_{L,M}^{(i)*}$ est "moins large et plus haut" que $\Lambda_{L,M}^{(5-i)}$.

Donc $\mu_p(\Lambda_{L,M}^{(i)\longleftrightarrow}) + \mu_p[S^{-1}(\Lambda_{L,M}^{(5-i)\updownarrow})] \geq 1$

qui n'est autre que la relation (1) (voir la remarque du II A).



(2) est basé sur des arguments géométriques et sur les inégalités F.K.G. (voir [1] et [2]) énoncées et utilisées ici dans le cas particulier de probabilités de Bernoulli.

Inégalité F.K.G. : pour tout x dans $[0,1]^L$

pour tous A, B dans $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ évènements $\left\{ \begin{array}{l} \text{tous deux positifs} \\ \text{ou} \\ \text{tous deux de complémentaires positifs} \end{array} \right.$

on a $\mu_x(A \cap B) \geq \mu_x(A) \cdot \mu_x(B)$

On considère maintenant le rectangle $\Lambda_{L,M}^{(i)'}$ déduit de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ par la translation $t_{(MK,0)}$.

On note $\Lambda_{L, \frac{3}{2}M}^{(i)}$ le rectangle $\Lambda_{L,M}^{(i)} \cup \Lambda_{L,M}^{(i)'}$ (voir Fig.3)

a, a_u et a_l désignent respectivement le côté gauche de $\Lambda_{L,M}^{(i)'}$, sa partie supérieure, et sa partie inférieure; plus précisément :

$$a_u = (\{0\} \times \mathbb{R}_+) \cap \Lambda_{L,M}^{(i)} \quad a_l = (\{0\} \times \mathbb{R}_-) \cap \Lambda_{L,M}^{(i)} \quad \text{et} \quad a = a_u \cup a_l$$

Par analogie avec les notations déjà introduites, on note :

$$A_{L, \frac{3}{2}M}^{(i) \longleftrightarrow} = \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe dans } \omega \text{ un chemin ouvert inclus dans } \Lambda_{L, \frac{3}{2}M}^{(i)} \text{ ayant une extrémité sur le côté gauche de } \Lambda_{L, \frac{3}{2}M}^{(i)} \text{ et l'autre sur le côté droit} \}.$$

$$R_{L, \frac{3}{2}M}^{(i) \longleftrightarrow}(p) = \mu_p(A_{L, \frac{3}{2}M}^{(i) \longleftrightarrow}) \quad \text{pour } p \in \mathcal{J}_K^{(i)}$$

Remarque : Désormais le mot "chemin" signifiera toujours "chemin auto-évitant"

(un chemin auto-évitant étant une suite $(v_0, i_1, v_1, \dots, i_n, v_n)$ finie de points (v_j) et de liens (i_j) telle que $\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad i_j = [v_{j-1}, v_j]$ et v_0, v_1, \dots, v_{n-1} sont 2 à 2 distincts).

Cela ne change rien pour la définition des $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ puisque de tout chemin reliant 2 parties du plan on peut extraire un chemin auto-évitant reliant ces 2 parties. Cette restriction est nécessaire pour pouvoir définir (voir ci-dessous) la notion de "chemin le plus bas" (qui ne serait pas unique dans tous les cas puisqu'une boucle peut être orientée de 2 façons).

C désigne l'ensemble des chemins joignant dans $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ un point du côté gauche de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ à un point de son côté droit.

Si $c \in C$, c^a désigne la dernière intersection de c (ordonné du côté gauche de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ au côté droit) avec a (c considéré comme la partie de \mathbb{R}^2 réunion de ses liens) et c^r est le chemin constitué des points et liens de c à partir de c^a jusqu'à l'extrémité de c située sur le côté droit de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$; $c^{r'}$ est le chemin symétrique de c^r par rapport à la droite $x_1 = MK$.

On note aussi : $C_\lambda = \{c \in C / c^a \in a_\lambda\}$

On considère les évènements suivants : pour tout chemin c de C ,

$E_c = \{\omega \in \Omega^{(i)} / c \text{ est le chemin de } C \text{ ouvert le plus bas dans } \omega\}$

le sens de "chemin le plus bas" étant donné par ce qui suit :

C est muni de la relation d'ordre partiel : $c \leq c' \iff A(c) \supseteq A(c')$,

où $A(c)$ est la partie de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ située "au-dessus" de c dans $\Lambda_{L,M}^{(i)}$, i.e. la réunion dans \mathbb{R}^2 des composantes connexes de $\Lambda_{L,M}^{(i)} \setminus C$ qui rencontrent le côté supérieur de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$.

On montre que toute partie non vide C' de C admet un plus petit élément, appelé chemin le plus bas de C' ; ce qui est ici utilisé avec C' l'ensemble des chemins de C ouverts dans ω .

On considèrera les évènements suivants : pour tout c dans C ,

$F_c = \{\omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe dans } \Lambda_{L,M}^{(i)' \cap A(c^r \cup c^{r'})} \text{ un chemin commençant sur le côté supérieur de } \Lambda_{L,M}^{(i)'} \text{ et finissant sur } c^r\}$

(ici, par abus de notation, $A(c^r \cup c^{r'})$ désigne la partie de $\Lambda_{L,M}^{(i)'}$, et non de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$, située au-dessus de $c^r \cup c^{r'}$).

$$G = \bigcup_{c \in C_\rho} (E_c \cap F_c) \quad G' = \bigcup_{c \in C_\rho} (\{\omega \in \Omega / c \text{ est ouvert dans } \omega\} \cap F_c)$$

$$H_u \text{ (resp. } H_\rho) = \{\omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe dans } \Lambda_{L,M}^{(i)'} \text{ un chemin commençant sur } a_u \text{ (resp. } a_\rho) \text{ et finissant sur le côté droit de } \Lambda_{L,M}^{(i)'}\}$$

Il est facile de voir que $\Lambda_{L, \frac{3}{2}M}^{(i) \leftarrow} \supseteq G' \cap H_u$ (voir Fig. 3)

Donc par l'inégalité F.K.G., puisque G' et H_u sont des évènements positifs :

si $p \in \mathcal{J}_K^{(i)}$

$$R_{L, \frac{3}{2}M}^{\leftarrow}(p) \geq \mu_p(G') \cdot \mu_p(H_u) \geq \mu_p(G) \cdot \mu_p(H_u) = \sum_{c \in C_\rho} \mu_p(E_c \cap F_c) \cdot \mu_p(H_u)$$

(la 2^{ème} inégalité provenant de : $G \subseteq G'$)

Or E_c et F_c sont μ_p -indépendants puisque E_c dépend des $\omega(i)$ pour les liens i situés sur c ou au-dessus de c dans $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ (en effet on montre facilement que :

$$E_c = \{\omega \in \Omega^{(i)} / c \text{ est ouvert dans } \omega \text{ et il n'existe aucun chemin de } C \text{ ouvert dans } \omega \text{ et situé au-dessus de } c\}$$

Donc $R_{L, \frac{3}{2}M}^{\leftarrow}(p) \geq \sum_{c \in C_\rho} \mu_p(E_c) \cdot \mu_p(F_c) \cdot \mu_p(H_u)$ (a)

En utilisant à nouveau l'inégalité F.K.G., ainsi que les propriétés de symétrie de μ_p :

$$1 - R_{L,M}^{\leftarrow}(p) = \mu_p(\Omega \setminus \Lambda_{L,M}^{(i) \leftarrow}) = \mu_p[(\Omega \setminus H_u) \cap (\Omega \setminus H_\rho)] \geq \mu_p[\Omega \setminus H_u]^2 = [1 - \mu_p(H_u)]^2$$

(H_u et H_ρ sont des évènements positifs de même probabilité et de réunion égale

à $\Lambda_{L,M}^{(i)\leftarrow}$) d'où l'on déduit $\mu_p(H_u) \geq 1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{(i)\leftarrow}(p)}$ (b)

De la même façon on obtient $\mu_p\left(\bigcup_{c \in C_\ell} E_c\right) \geq 1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{(i)\leftarrow}(p)}$ (c)

et pour tout $c \in C_\ell$ $\mu_p(F_c) \geq 1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\updownarrow}(p)}$ (d)

(Pour cette dernière inégalité, c'est la symétrie de μ_p par rapport à l'axe Ox_2 , couplée avec l'invariance par les translations multiples de K , qui intervient :

si $F'_c = \{\omega \in \Omega / \text{il existe un chemin ouvert dans } \omega \text{ contenu dans } A(c^F \cup c^{F'})\}$,
commençant sur le côté supérieur de $\Lambda_{L,M}^{(i) \updownarrow}$ et finissant sur $c^F \cup c^{F'}$

$$F'_c \supseteq A_{L,M}^{(i)\updownarrow'} = t_{(MK,0)}(A_{L,M}^{(i)\updownarrow})$$

$$1 - R_{L,M}^{\updownarrow}(p) = \mu_p(\Omega \setminus A_{L,M}^{(i)\updownarrow'}) \geq \mu_p(\Omega \setminus F'_c) = \mu_p[(\Omega \setminus F_c) \cap (\Omega \setminus s_{MK}^1(F_c))] = [1 - \mu_p(F_c)]^2$$

où l'on rappelle que s_{MK}^1 désigne la symétrie d'axe $x_1 = MK$.

Reportées dans l'inégalité (a), les inégalités (b), (c), (d) donnent donc :

$$R_{L, \frac{3}{2}M}^{(i)\leftarrow}(p) \geq [1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\updownarrow}(p)}] \cdot [1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{(i)\leftarrow}(p)}]^2$$

L'inégalité F.K.G. va alors permettre de passer à $R_{L,2M}^{(i)\leftarrow}(p)$ puis à $R_{L,3M}^{(i)\leftarrow}(p)$:

elle entraîne en effet l'inégalité : $R_{L,2M}^{(i)\leftarrow}(p) \geq R_{L,M}^{\updownarrow}(p) \cdot R_{L, \frac{3}{2}M}^{(i)\leftarrow}(p)^2$

puisqu'il suffit, pour avoir un chemin ouvert de gauche à droite dans le rectangle

$$t_{(MK,0)}(\Lambda_{L,2M}^{(i)}),$$

d'avoir $\left\{ \begin{array}{l} \text{un chemin ouvert de gauche à droite dans } \Lambda_{L, \frac{3}{2}M}^{(i)} \\ \text{un chemin ouvert de gauche à droite dans } t_{(MK,0)}(\Lambda_{L, \frac{3}{2}M}^{(i)}) \\ \text{et un chemin ouvert de haut en bas dans } \Lambda_{L,M}^{(i)'} \end{array} \right.$

(voir fig. 4) ceci aussi bien pour $i=1,2$ ou $i=3,4$.

(L'invariance de μ_p par $t_{(MK,0)}$ intervient ici encore une fois).

Par un argument analogue : (voir Fig. 5)

$$\begin{aligned} R_{L,3M}^{\longleftrightarrow}(p) &\geq R_{L,M}^{\updownarrow}(p) \cdot R_{L,2M}^{\longleftrightarrow}(p)^2 \geq R_{L,M}^{\updownarrow}(p)^3 \cdot R_{L,\frac{3}{2}M}^{\longleftrightarrow}(p)^4 \\ &\geq R_{L,M}^{\updownarrow}(p)^3 \cdot [1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\updownarrow}(p)}]^4 \cdot [1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p)}]^8 \end{aligned}$$

qui est l'inégalité recherchée.

$$\text{L'inégalité } R_{3L,M}^{\updownarrow}(p) \geq R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p)^3 \cdot [1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p)}]^4 \cdot [1 - \sqrt{1 - R_{L,M}^{\updownarrow}(p)}]^8$$

n'est autre que l'inégalité précédente appliquée à la répartition p' symétrique de p par rapport à la diagonale $x_1 = x_2$ et avec (M,L) au lieu de (L,M)

$$(\text{car } R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p') = R_{M,L}^{\updownarrow}(p) \quad \text{et} \quad R_{L,M}^{\updownarrow}(p') = R_{M,L}^{\longleftrightarrow}(p))$$

(2) est donc démontré.

La démonstration de 1) va consister à généraliser à $p \in \mathcal{U}_K$ l'argument de Russo (cf. [5]), c'est-à-dire montrer que μ_p -presque sûrement ou $\mu_{\tilde{p}}$ -presque sûrement, l'origine est entourée d'une infinité de boucles ouvertes disjointes (sous les hypothèses $\text{Min}_{i \in L_1} p_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L_1} p_i < 1$).

On introduit pour cela, pour L,M dans N , les "couronnes" : (voir fig. 6)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{L,M}^{(1)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / MK \leq |x_1| \leq 3 MK \quad \text{et} \quad LK \leq |x_2| \leq 3 LK\} \\ \mathcal{C}_{L,M}^{(2)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / MK \leq |x_1| \leq 3 MK \quad \text{et} \quad LK - \frac{1}{2} \leq |x_2| \leq 3 LK + \frac{1}{2}\} \\ \mathcal{C}_{L,M}^{(3)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / MK - \frac{1}{2} \leq |x_1| \leq 3 MK + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad LK \leq |x_2| \leq 3 LK\} \\ \mathcal{C}_{L,M}^{(4)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / MK - \frac{1}{2} \leq |x_1| \leq 3 MK + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad LK - \frac{1}{2} \leq |x_2| \\ &\leq 3 LK + \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

et les évènements de $\Omega^{(i)} = \{-1, +1\}^{L(i)}$ ($i = 1, \dots, 4$) :

$B_{L,M}^{(i)} = \{\omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe dans } \mathcal{G}_{L,M}^{(i)} \text{ une boucle ouverte entourant l'origine}\}.$

pour $p \in \mathcal{P}_K^{(i)}$, on note : $C_{L,M}(p) = \mu_p(B_{L,M}^{(i)})$.

Alors, par l'inégalité F.K.G., l'invariance de μ_p par les translations $t_{(2MK,0)}$ et $t_{(0,2LK)}$, et l'inclusion (résultant de considérations géométriques) :

$$B_{L,M}^{(i)} \supseteq [t_{(0,-2LK)} (A_{L,3M}^{(i) \leftarrow})] \cap [t_{(0,2LK)} (A_{L,3M}^{(i) \leftarrow})] \\ \cap [t_{(-2MK,0)} (A_{3L,M}^{(i) \updownarrow})] \cap [t_{(2MK,0)} (A_{3L,M}^{(i) \updownarrow})]$$

on obtient pour tout $(L,M) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout p dans \mathcal{P}_K :

$$C_{L,M}(p) \geq [R_{L,3M}^{\leftarrow}(p) \cdot R_{3L,M}^{\updownarrow}(p)]^2$$

donc, en utilisant les inégalités (2) et l'inégalité : $1 - \sqrt{1-u} \geq \frac{1}{2}u$ ($\forall u \in [0,1]$)

on trouve

$$C_{L,M}(p) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{48} \cdot [R_{L,M}^{\leftarrow}(p) \cdot R_{L,M}^{\updownarrow}(p)]^{30} \quad (3)$$

Pour obtenir presque sûrement une infinité de boucles ouvertes disjointes autour de 0, il suffit d'avoir presque sûrement une infinité de couples (L,M) d'entiers tels que les couronnes $\mathcal{G}_{L,M}^{(i)}$ soient 2 à 2 disjointes et que les $B_{L,M}^{(i)}$ soient réalisés.

Cela sera conséquence du lemme de Borel-Cantelli si l'on peut minorer par une constante strictement positive tous les $C_{L,M}(p)$, ou bien tous les $C_{L,M}(\tilde{p})$, pour les couples (L,M) d'une suite infinie.

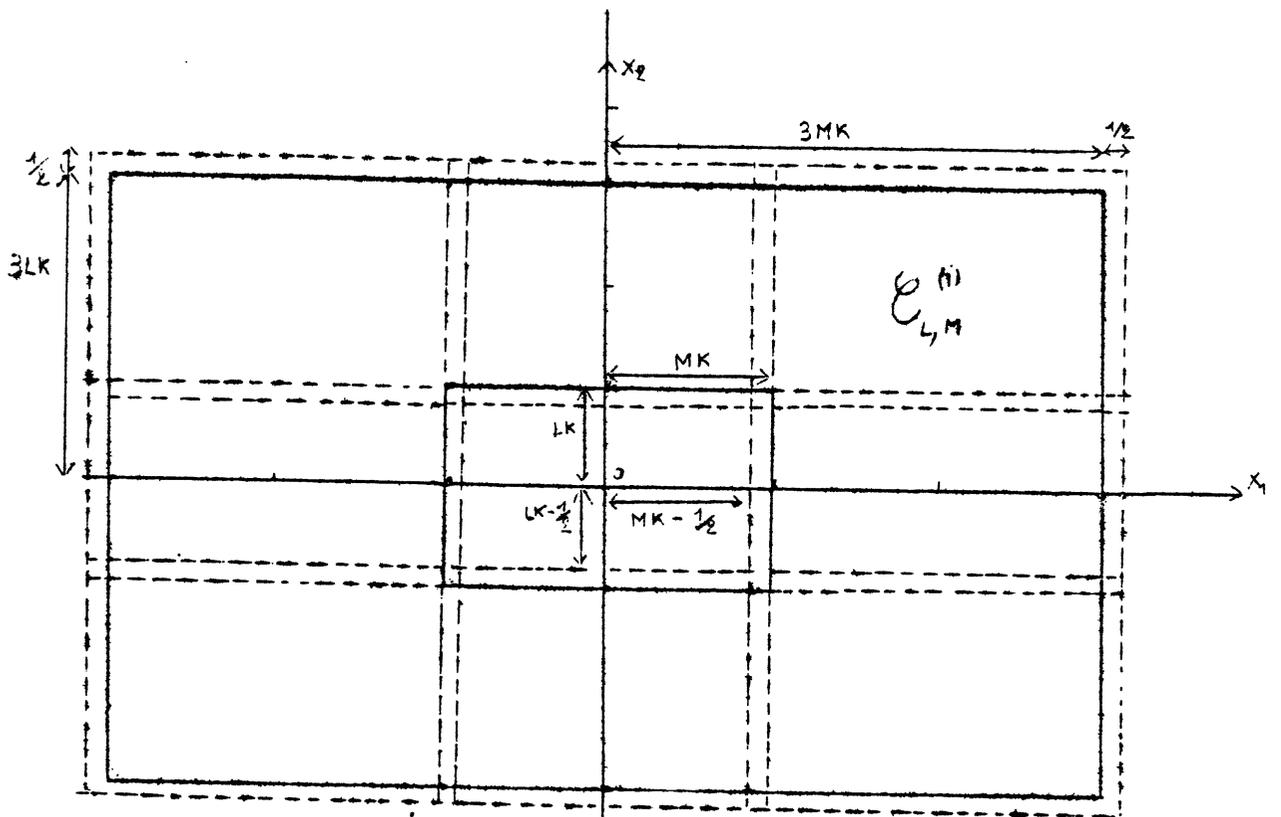


Fig. 6

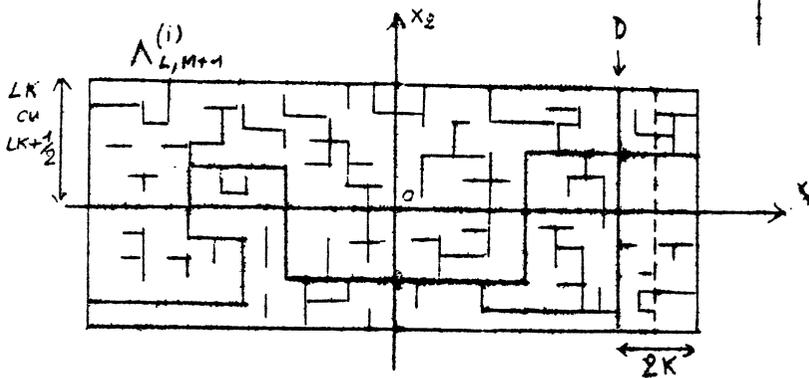


Fig. 7

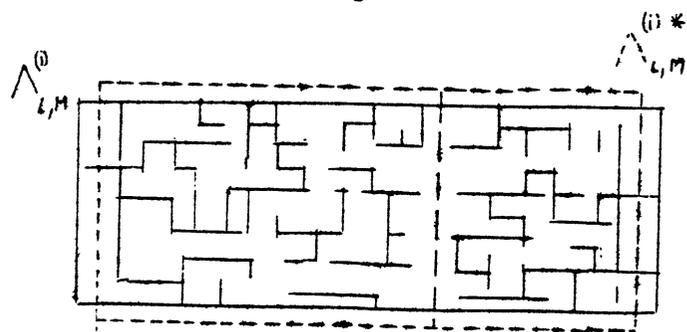


Fig. 8

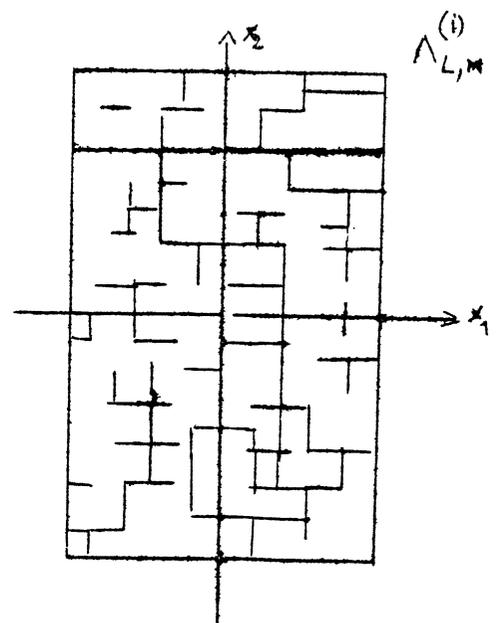


Fig. 9

Dans le cas où tous les p_i sont égaux, donc où $R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p) = R_{L,L}^{\updownarrow}(p)$ et $R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p^*) = R_{L,L}^{\updownarrow}(p^*)$, $C_{L,L}(p)$ est alors minoré en fonction uniquement de $R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p)$, et l'inégalité (1) empêche que l'on ait à la fois $\lim_{L \rightarrow +\infty} R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p) = 0$ et $\lim_{L \rightarrow +\infty} R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p^*) = 0$

d'où $C_{L,L}(p) \geq \alpha$ pour une infinité d'entiers L et une constante $\alpha > 0$ ou bien $C_{L,L}(p^*) \geq \alpha$ pour une infinité d'entiers L et une constante $\alpha > 0$

Ceci reste vrai dans le cas où p est symétrique par rapport à la diagonale $x_1 = x_2$ (on a alors encore $R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p) = R_{L,L}^{\updownarrow}(p)$; remarque : nécessairement $p \in \mathcal{P}_K^1$ ou \mathcal{P}_K^4).

Mais si p n'est pas symétrique par rapport à $x_1 = x_2$, il n'est pas exclu à priori que l'on ait : $\lim_{L \rightarrow +\infty} R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p) = 0$ et $\lim_{L \rightarrow +\infty} R_{L,L}^{\updownarrow}(p) = 1$, donc par (1) $\lim_{L \rightarrow +\infty} R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p^*) = 0$ auquel cas $R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p) \cdot R_{L,L}^{\updownarrow}(p)$ et $R_{L,L}^{\longleftrightarrow}(p^*) \cdot R_{L,L}^{\updownarrow}(p^*)$ tendent vers 0 quand L tend vers l'infini.

On va donc chercher à remplacer les carrés par des rectangles de proportions convenables pour que l'une des quantités $R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p) \cdot R_{L,M}^{\updownarrow}(p)$ ou $R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p^*) \cdot R_{L,M}^{\updownarrow}(p^*)$ reste éloignée de 0.

On peut établir le résultat suivant :

Lemme 8 : si $p \in \mathcal{P}_K$ vérifie $\min_{i \in L_1} p_i > 0$ et $\max_{i \in L_1} p_i < 1$, alors :

il existe une application M_p de \mathbb{N} dans lui-même et un réel $\beta > 0$

$$\left[\beta = \frac{1}{2} \left[\min_{i \in L_1} p_i \right]^{2K} \right] \text{ tels que}$$

(a) pour tout entier positif L $\beta \leq R_{L,M_p}^{\longleftrightarrow}(p) \leq 1 - \beta$

(b) $\limsup_{L \rightarrow +\infty} M_p(L) = +\infty$

Pour démontrer ce lemme, on étudie la différence $R_{L,M}^{\leftarrow} (p) - R_{L,M+1}^{\leftarrow} (p)$.

Si on note D l'ensemble des sommets du réseau qui se trouvent sur le côté droit du rectangle $t_{(-K,0)}(\Lambda_{L,M}^{(i)})$, on a : (voir Fig. 7)

$$A_{L,M+1}^{(i)\leftarrow} \supseteq \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \exists s \in D, s \text{ est relié au côté gauche de } t_{(-K,0)}(\Lambda_{L,M}^{(i)}) \text{ par un chemin ouvert contenu dans } t_{(-K,0)}(\Lambda_{L,M}^{(i)}), \text{ et } [s, t_{(2K,0)}(s)] \text{ a tous ses liens ouverts} \}$$

donc si $p \in \mathcal{J}_K^{(i)}$:

$$R_{L,M+1}^{\leftarrow} (p) \geq \sum_{\substack{s \subset D \\ s \neq \emptyset}} [\mu_p \{ \omega \in \Omega^{(i)} / S \text{ est l'ensemble des points de } D \text{ reliés au côté gauche de } t_{(-K,0)}(\Lambda_{L,M}^{(i)}) \text{ par un chemin ouvert de } \omega \text{ contenu dans ce rectangle} \} \\ \times \mu_p \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \exists s \in S \text{ tel que } [s, t_{(2K,0)}(s)] \text{ a tous ses liens ouverts dans } \omega \}]$$

(puisque les liens de $[s, t_{(2K,0)}(s)]$ sont hors du rectangle $t_{(-K,0)}(\Lambda_{L,M}^{(i)})$).

Or $\mu_p \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \exists s \in S, [s, t_{(2K,0)}(s)] \text{ a tous ses liens ouverts} \}$

$$\geq 1 - [1 - (\text{Min}_{i \in L_1} p_i)^{2K}]^{|S|} \geq 2\beta$$

$$\text{donc } R_{L,M+1}^{\leftarrow} (p) \geq 2\beta \cdot \mu_p (t_{(-K,0)}(A_{L,M}^{(i)\leftarrow})) = 2\beta \cdot R_{L,M}^{\leftarrow} (p)$$

(par invariance de μ_p par $t_{(-K,0)}$)

$$\text{et donc } R_{L,M}^{\leftarrow} (p) - R_{L,M+1}^{\leftarrow} (p) \leq (1 - 2\beta) R_{L,M}^{\leftarrow} (p) \leq 1 - 2\beta.$$

Posons alors $M_p(L) = \inf \{ M \in \mathbb{N} / R_{L,M}^{\leftarrow} (p) \leq 1 - \beta \}$ pour tout $L \in \mathbb{N}$,

quantité qui est bien définie, et au moins égale à 1 (avec la convention

$R_{L,0}^{\leftarrow} (p) = 1$), car l'hypothèse $\text{Max}_{i \in L_1} p_i < 1$ entraîne $\lim_{M \rightarrow +\infty} R_{L,M}^{\leftarrow} (p) = 0$

[en effet $R_{L,M}^{\leftarrow}(p) = 1 - \mu_p \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe un chemin ouvert dans } \omega^* \text{ et contenu dans } \Lambda_{L,M}^{(i)*} \text{ qui relie les côtés horizontaux de ce rectangle} \}$

(voir Fig. 8)

$$\leq 1 - \mu_p \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe un segment vertical ouvert dans } \omega^* \text{ et qui relie les côtés horizontaux de } \Lambda_{L,M}^{(i)*} \}$$

$$\leq [1 - (1 - \max_{i \in L_1} p_i)^{2LK+2}]^{2MK} \quad \text{qui tend vers } 0 \text{ quand } M \text{ tend vers } +\infty$$

$M_p(L)$ vérifie pour tout L dans \mathbb{N} :

$$R_{L,M_p(L)}^{\leftarrow}(p) \geq R_{L,M_p(L)-1}^{\leftarrow}(p) - (1-2\beta) \geq 1 - \beta - (1-2\beta) = \beta$$

($M_p(L) - 1 \geq 0$ et $R_{L,M_p(L)-1}^{\leftarrow}(p) > 1 - \beta$ par définition de la borne inférieure)

On a donc bien pour tout $L \in \mathbb{N}$ $\beta \leq R_{L,M_p(L)}^{\leftarrow}(p) \leq 1 - \beta$

Pour vérifier la condition (b), supposons par l'absurde que $\limsup_{L \rightarrow +\infty} M_p(L) < +\infty$

alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall L \in \mathbb{N} \quad M_p(L) \leq M$

$$\text{c'est-à-dire : } \forall L \in \mathbb{N} \quad R_{L,M}^{\leftarrow}(p) \leq R_{L,M_p(L)}^{\leftarrow}(p) \leq 1 - \beta$$

ce qui est impossible si $\min_{i \in L_1} p_i > 0$ car alors $\lim_{L \rightarrow +\infty} R_{L,M}^{\leftarrow}(p) = 1$

[car $R_{L,M}^{\leftarrow}(p) \geq \mu_p \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe dans } \Lambda_{L,M}^{(i)} \text{ un segment horizontal ouvert dans } \omega \text{ joignant les côtés verticaux de } \Lambda_{L,M}^{(i)} \}$

(voir Fig. 9)

$$\geq 1 - [1 - (\min_{i \in L_1} p_i)^{2MK+1}]^{2LK+1} \quad \text{qui tend vers } 1 \text{ quand } L$$

tend vers l'infini] .

On a donc montré que $\limsup_{L \rightarrow +\infty} M_p(L) = +\infty$, et le lemme est prouvé.

Soit $(L_n, M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} M_n = M_p(L_n) \\ L_n > 3L_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad M_n > 3M_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Les couronnes $\mathcal{C}_{L_n, M_n}^{(i)}$ sont alors 2 à 2 disjointes.

Deux cas peuvent se présenter :

1er cas : il existe un réel $\delta > 0$ et une sous-suite $(L_{n_k}, M_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(L_n, M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\forall k \in \mathbb{N} \quad R_{L_{n_k}, M_{n_k}}^{\updownarrow}(p) \geq \delta$.

$$\text{alors } \forall k \in \mathbb{N} \quad C_{L_{n_k}, M_{n_k}}(p) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{48} [\beta \cdot \delta]^{30} \quad \text{constante} > 0$$

(ceci en utilisant l'inégalité (3))

Donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, les événements $B_{L_{n_k}, M_{n_k}}^{(i)}$ étant indépendants puisque les couronnes $\mathcal{C}_{L_{n_k}, M_{n_k}}^{(i)}$ sont disjointes :

μ_p presque sûrement une infinité de $B_{L_{n_k}, M_{n_k}}^{(i)}$ sont réalisés.

Ceci entraîne que $\mu_p(A_\infty) = 0$

(car tout lien i^* de L^* est presque sûrement entouré d'une boucle ouverte dans L , donc l'amas de ω^* contenant i^* est nécessairement fini).

2ème cas : $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{L_n, M_n}^{\updownarrow}(p) = 0$ alors d'après l'inégalité (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{L_n, M_n}^{\leftarrow\rightarrow}(p^*) = 1$

$$\text{donc il existe un entier } n_0 \text{ tel que : } \forall n \geq n_0 \quad R_{L_n, M_n}^{\leftarrow\rightarrow}(p^*) \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{et comme d'autre part : } \forall n \in \mathbb{N} \quad R_{L_n, M_n}^{\leftarrow\rightarrow}(p) \leq 1 - \beta$$

donc (toujours par l'inégalité (1)) $\forall n \in \mathbb{N} \quad R_{L_n, M_n}^{\updownarrow}(p^*) \geq \beta$

on a donc, par l'inégalité (3)) $\forall n \geq n_0 \quad C_{L_n, M_n}(p^*) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{48} \cdot \left[\frac{1}{2} \beta\right]^{30} > 0$

et par le même argument que précédemment $\mu_p(A_\infty) = 0$

La lère partie du théorème est ainsi démontré.

Démonstration du 2) : La méthode, analogue à celle utilisée par Russo dans [7] pour démontrer la relation $p_c \leq 1 - p_c^*$ pour la percolation de sites dans \mathbb{Z}^2 avec probabilité indépendante du site, est basée d'une part sur la loi zéro-un approchée généralisée au cas de probabilités dépendant du site (voir chap. I), et d'autre part sur le lemme suivant :

Lemme 9 : s'il existe deux entiers positifs L et M pour lesquels

$$R_{L, 3M}^{\longleftrightarrow}(p) > 1 - 5^{-4} \quad \text{et} \quad R_{3L, M}^{\updownarrow}(p) > 1 - 5^{-4}$$

$$\text{alors} \quad \mu_p(A_\infty) = 1$$

Ce lemme est démontré par Russo dans [6], dans le cas de la percolation de sites avec un seul paramètre ($p_i = p$ pour tout lien i).

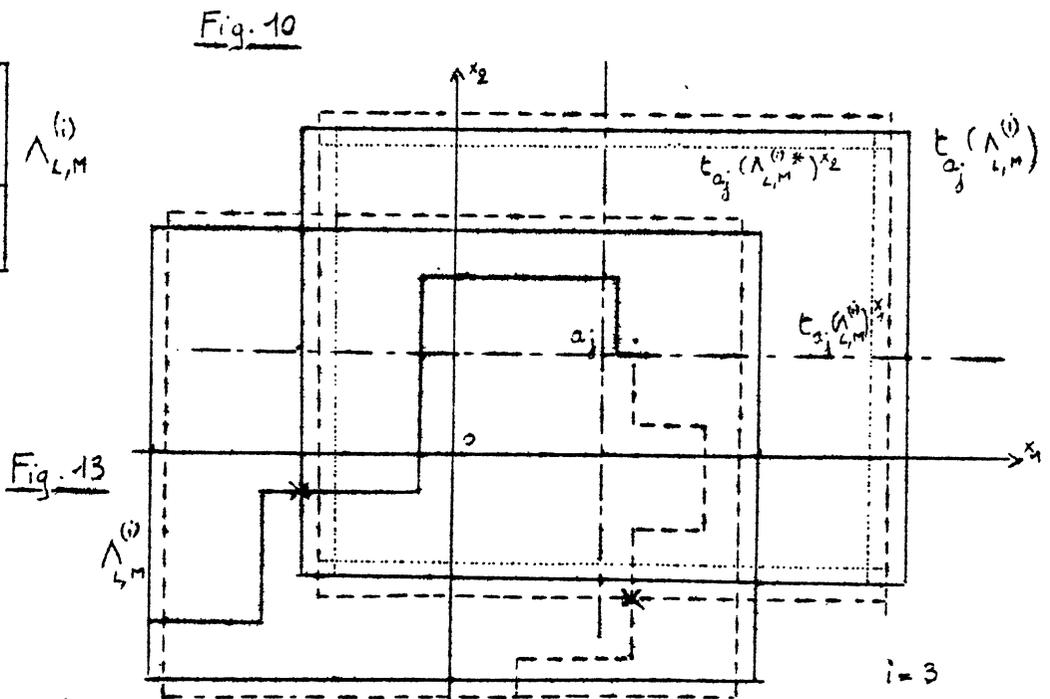
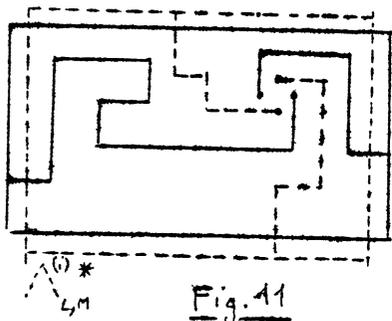
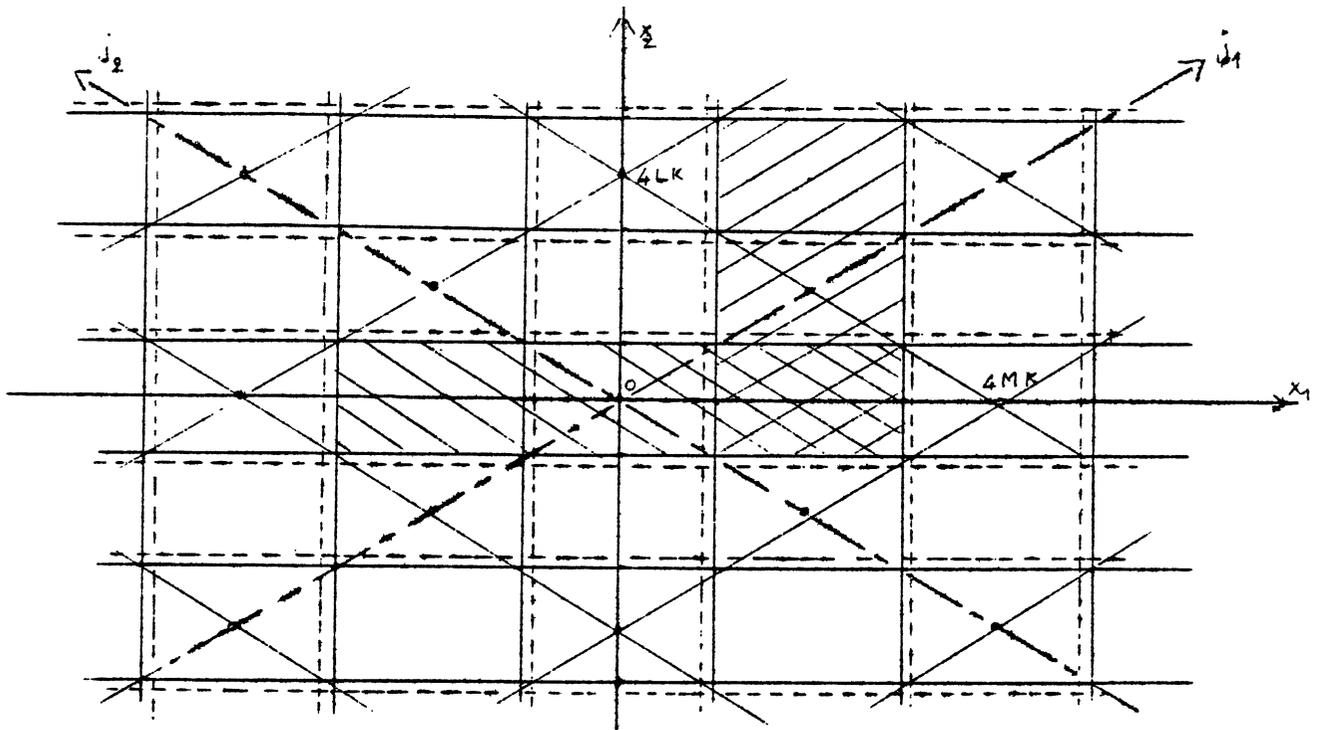
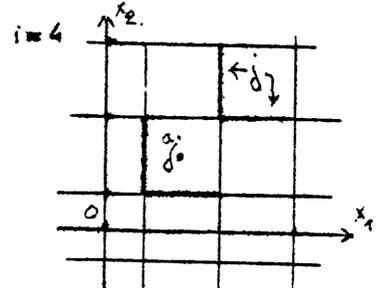
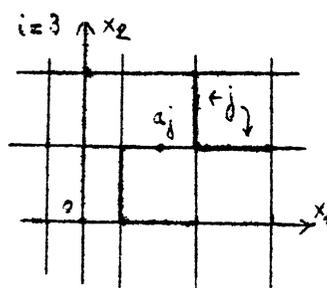
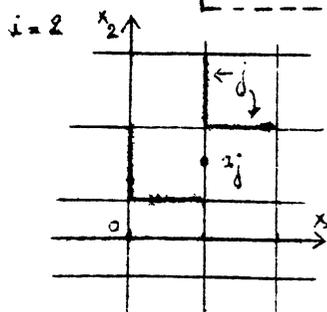
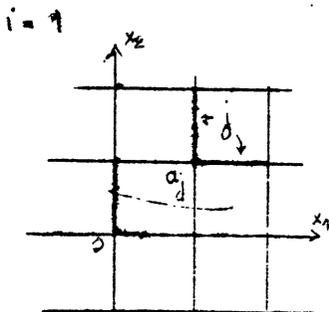


Fig. 12



La démonstration consiste à se ramener à un problème de percolation de sites à un paramètre sur \mathbb{Z}^2 , puis à utiliser un argument de Peierls (dénombrement des boucles de longueur donnée) pour obtenir une condition suffisante d'existence presque sûre d'un amas infini (en utilisant, comme on l'a déjà fait, l'équivalence entre : existence d'une infinité de boucles duales ouvertes disjointes entourant 0 et inexistence d'un amas infini).

Soient donc L et M deux entiers vérifiant $R_{3L,M}^{\longleftrightarrow}(p) > 1 - 5^{-4}$ et $R_{L,3M}^{\updownarrow}(p) > 1 - 5^{-4}$ (où p est fixé $p \in \mathcal{J}_K^{(i)}$ $i \in \{1,2,3,4\}$).

On considère pour tout $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$ les rectangles :

$$\begin{aligned} \Lambda^{(i)}(j) &= t_{(0, 2LK(j_1+j_2))} \circ t_{(2MK(j_1-j_2), 0)} \Lambda_{L,3M}^{(i)} && \text{si } j_1+j_2 \text{ est pair} \\ \Lambda^{(i)}(j) &= t_{(0, 2LK(j_1+j_2))} \circ t_{(2MK(j_1-j_2), 0)} \Lambda_{3L,M}^{(i)} && \text{si } j_1+j_2 \text{ est impair} \end{aligned}$$

(voir Fig. 10)

Pour tout $j \in \mathbb{Z}^2$ on note z_j la fonction caractéristique de l'évènement :

$$\begin{aligned} \Lambda^{(i)}(j) &= \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \text{il existe dans } \omega \text{ un chemin ouvert contenu dans } \Lambda^{(i)}(j) \\ &\quad \text{et reliant ses côtés verticaux (resp. horizontaux)} \} \text{ si } j_1+j_2 \text{ est pair} \\ &\quad \text{(resp. impair).} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \forall j \in \mathbb{Z}^2 \quad \mu_p(z_j(\omega) = 0) \leq \text{Max} (1 - R_{L,3M}^{\longleftrightarrow}(p), 1 - R_{3L,M}^{\updownarrow}(p)) = \delta < 5^{-4}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} (\alpha) \text{ l'application } \phi : \Omega^{(i)} &\longrightarrow \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2} && \text{est telle que :} \\ \omega &\longrightarrow \phi(\omega) = (2z_j(\omega) - 1)_j \in \mathbb{Z}^2 \\ \forall \omega \in \Omega^{(i)} \quad \omega \text{ a un amas infini} &\iff \phi(\omega) \text{ a un amas infini} \end{aligned}$$

(On rappelle que pour la percolation de sites dans \mathbb{Z}^2 , 2 points j et j' sont dits voisins si et seulement si $|j_1 - j'_1| + |j_2 - j'_2| = 1$; et que le dual de ce modèle est l'ensemble des points de \mathbb{Z}^2 avec la notion de voisinage suivante : j et $j' \in \mathbb{Z}^2$ sont $*$ -voisins si et seulement si $\text{Max} (|j_1 - j'_1|, |j_2 - j'_2|) = 1$)

(β) si j et j' vérifient $\text{Max}(|j_1 - j'_1|, |j_2 - j'_2|) > 1$, les variables z_j et $z_{j'}$ sont indépendantes (car $\Lambda^{(i)}(j)$ et $\Lambda^{(i)}(j')$ n'ont aucun lien en commun). On peut donc diviser \mathbb{Z}^2 en 4 sous-réseaux disjoints tels que les variables z_j correspondant à l'un quelconque de ces réseaux soient des variables indépendantes. D'après (d) il suffit donc de montrer que $\phi(\omega)$ a presque sûrement un amas infini (sous l'hypothèse $\delta < 5^{-4}$).

Or $\phi(\omega)$ a un amas infini si et seulement si il n'existe pas dans $\phi(\omega)$ une infinité de $*$ -boucles fermées auto-évitantes entourant l'origine.

(Une $*$ -boucle étant une boucle pour le voisinage $*$ dans \mathbb{Z}^2 , c'est à dire une suite (j_0, j_1, \dots, j_n) de points de \mathbb{Z}^2 tels que $j_0 = j_n$ et j_k, j_{k+1} sont $*$ -voisins pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$).

(j_0, j_1, \dots, j_n) est dite auto-évitante si les (j_k, j_{k+1}) $k \in \{0, \dots, n-1\}$ sont les seuls couples de points de la boucle $*$ -voisins).

D'autre part si ℓ est une $*$ -boucle auto-évitante entourant 0

$$\text{et si on note } B_\ell = \{\omega \in \Omega^{(i)} / \forall j \in \ell \quad z_j(\omega) = 0\}$$

alors $\mu_p(B_\ell) < \delta \frac{|\ell|}{4}$ car au moins $\frac{|\ell|}{4}$ points de ℓ sont dans le même des 4 sous-réseaux mentionnés en (β).

L'argument de Peierls consiste à majorer le nombre d' $*$ -boucles auto-évitantes de longueur k donnée par $k^2 \cdot 5^k$: en effet chaque point de \mathbb{Z}^2 a 8 $*$ -voisins, donc tout $*$ chemin auto-évitant peut être prolongé de 7 façons dont 5 seulement donnent encore un $*$ -chemin auto-évitant; d'autre part une $*$ -boucle de longueur k entourant 0 a au moins un point j tel que $0 \leq j_1, j_2 \leq k$, point que l'on peut choisir comme point initial; d'où la valeur $k^2 \cdot 5^k$.

En conséquence : $\mu_p \left(\bigcup_{|\ell|=k} B_\ell \right) \leq k^2 \cdot 5^k \cdot \delta^{\frac{k}{4}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

donc $\mu_p \left(\bigcup_{\ell} B_\ell \right) < +\infty$

et par le lemme de Borel-Cantelli : presque sûrement un nombre fini seulement de B_ℓ sont réalisés; donc $\phi(\omega)$ a μ_p presque sûrement un amas infini, donc $\mu_p(A_\infty) = 1$ d'après (α).

En utilisant les inégalités (2) (et $\lim_{\substack{x,y \rightarrow 1 \\ x,y \leq 1}} x^3 [1 - \sqrt{1-x}]^4 \cdot [1 - \sqrt{1-y}]^8 = 1$),

on peut re-énoncer ce lemme sous la forme suivante :

Lemme 9 (bis) : il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

s'il existe 2 entiers L et M positifs vérifiant $R_{L,M}^{\longleftrightarrow}(p) \geq 1 - \alpha$
 et $R_{L,M}^{\updownarrow}(p) \geq 1 - \alpha$

alors $\mu_p(A_\infty) = 1$

Démontrons la 2ème partie du théorème par l'absurde.

$p \in \overset{(i)}{\bigcup} K$ étant fixé tel que $\text{Min}_{j \in L} p_j > 0$ et $\text{Max}_{j \in L} p_j = 1$, on pose

$t_1 = \inf\{t \in [0,1] / \mu_{t_p}^{\sim}(A_\infty) = 0\}$
 $t_2 = \inf\{t \in [0,1] / \mu_{t_p}(A_\infty) = 1\}$
 et par convention $\begin{cases} t_1 = 1 & \text{si } \forall t \in [0,1] \mu_{t_p}^{\sim}(A_\infty) = 1 \\ t_2 = 1 & \text{si } \forall t \in [0,1] \mu_{t_p}(A_\infty) = 0 \end{cases}$

La 1ère partie du théorème entraîne que $t_1 \leq t_2$

(car tout point t_p avec $0 < t < 1$ vérifie $\text{Min}_{j \in L_1} t_p p_j > 0$ et $\text{Max}_{j \in L_1} t_p p_j < 1$)

Supposons donc que $t_1 < t_2$: alors $\forall t \in]t_1, t_2[\mu_{t_p}(A_\infty) = \mu_{t_p}^{\sim}(A_\infty) = 0$

On pose $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$

$0 < t_0 < 1$ entraîne $\text{Min}_{j \in L_1} t_0 p_j > 0$ et $\text{Max}_{j \in L_1} t_0 p_j < 1$ donc le lemme 8 peut

s'appliquer à $t_0 p$: il existe $\beta > 0$ et une application M_0 de \mathbb{N} dans \mathbb{N}

tels que : $\forall L \in \mathbb{N} \quad \beta \leq R_{L, M_0(L)}^{\longleftrightarrow}(t_0 p) \leq 1 - \beta$

et $\limsup_{L \rightarrow +\infty} M_0(L) = +\infty$

On va maintenant démontrer que l'hypothèse $t_1 < t_2$ entraîne que la loi zéro-un approchée du chapitre I peut s'appliquer dans la direction p aux évènements $A_{L,M}^{(i) \longleftrightarrow}$ et $A_{L,M}^{(i) \updownarrow}$ quand L et M tendent vers l'infini; plus précisément :

Lemme 10 : si $t_1 < t_2$ alors

$$\lim_{L,M \rightarrow +\infty} \max_{\substack{t \in [0,1] \\ j \in L}} \mu_{tp} [\delta_j (A_{L,M}^{(i) \longleftrightarrow})] = 0$$

et

$$\lim_{L,M \rightarrow +\infty} \max_{\substack{t \in [0,1] \\ j \in L}} \mu_{tp} [\delta_j (A_{L,M}^{(i) \updownarrow})] = 0$$

On pourra en particulier (puisque $\limsup_{L \rightarrow +\infty} M_0(L) = +\infty$) appliquer la loi zéro-un approchée aux évènements $A_{L_n, M_0(L_n)}^{(i) \longleftrightarrow}$ et $A_{L_n, M_0(L_n)}^{(i) \updownarrow}$ pour une suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_0(L_n) = +\infty$

La démonstration de ce lemme repose sur la caractérisation suivante des liens critiques d'une configuration ω pour $A_{L,M}^{(i) \longleftrightarrow}$ (on ne démontrera que la 1ère égalité du lemme, la 2ème en étant conséquence, en remplaçant p par son symétrique par rapport à la diagonale $x_1 = x_2$).

$j \in L^{(i)}$ est critique pour ω et $A_{L,M}^{(i) \longleftrightarrow}$ si et seulement si les 3 conditions suivantes sont réalisées : (voir Fig. 11)

- (1) le lien j est dans $\Lambda_{L,M}^{(i)}$
- (2) on peut relier une extrémité de j à un côté vertical de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$, l'autre extrémité à l'autre côté vertical, par des chemins ouverts dans ω , ne contenant pas j et contenus dans $\Lambda_{L,M}^{(i)}$.
- (3) on peut relier une extrémité de j^* à un côté horizontal de $\Lambda_{L,M}^{(i)*}$, l'autre extrémité à l'autre côté horizontal, par des chemins ouverts dans ω^* , ne passant pas par j^* et contenus dans $\Lambda_{L,M}^{(i)*}$.

Il s'ensuit que si j est critique pour ω et pour $\Lambda_{L,M}^{(i) \leftarrow}$, alors les 2 propriétés suivantes sont vérifiées : (voir Fig.13)

($a_{j,L,M}$) Il n'existe pas de boucle ouverte dans ω entourant j^* et contenue dans le rectangle $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})^{x_1}$

($b_{j,L,M}$) Il n'existe pas de boucle ouverte dans ω^* entourant j et contenue dans le rectangle $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})^{x_2}$

où, si a'_j désigne l'extrémité "inférieure gauche" de j (i.e de coordonnées minimales), a_j est le point de \mathbb{Z}^2 "le plus en haut à droite" (i.e de coordonnées maximales) dans le quart de plan $x_1 \leq a'_{j,1}$ $x_2 \leq a'_{j,2}$.

($t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})$ est donc le translaté "centré en j " du rectangle $\Lambda_{L,M}^{(i)}$, si par convention on considère que $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ est centré aux 2 liens d'extrémité inférieure gauche :

$$(0, 0) \text{ si } i=1 \quad (0, \frac{1}{2}) \text{ si } i=2 \quad (\frac{1}{2}, 0) \text{ si } i=3 \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ si } i=4$$

(voir fig. 12)).

et où pour tout rectangle $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ de \mathbb{R}^2 , on note :

$$R^{x_1} \text{ le rectangle } [\alpha+1, \beta-1] \times [\gamma, \delta]$$

$$R^{x_2} \text{ le rectangle } [\alpha, \beta] \times [\gamma+1, \delta-1]$$

En effet :

pour ($a_{j,L,M}$) : l'existence d'une boucle ouverte dans ω entourant j^* et contenue dans $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})^{x_1}$ empêche l'existence d'un chemin ouvert dans ω^* reliant une extrémité de j^* au bord de $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})$ et contenu dans $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})$.

Or $\Lambda_{L,M}^{(i)*}$ a un côté horizontal situé entièrement à l'extérieur (au sens large) de $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})$; donc tout chemin reliant ce côté à une extrémité de j^* contient un chemin reliant le bord de $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})$ à j^* et contenu dans $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})$.

Donc (3) entraîne ($a_{j,L,M}$).

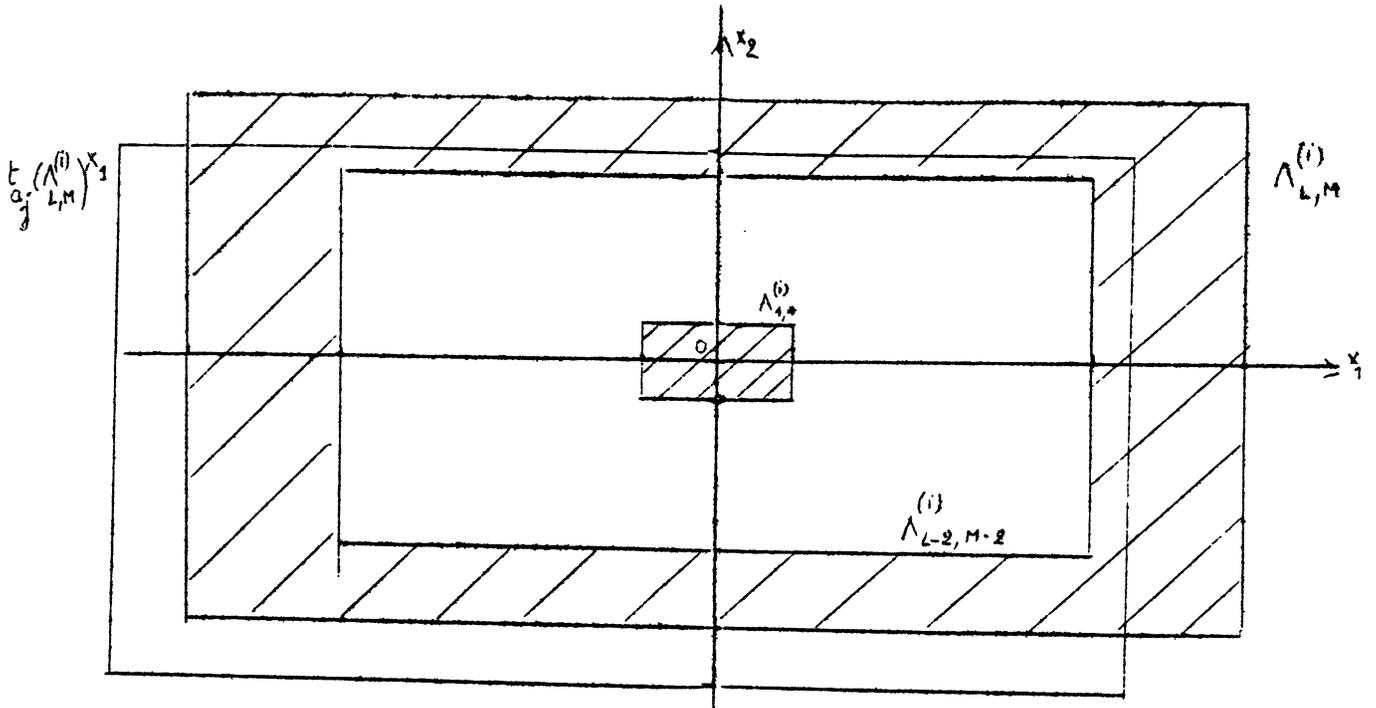


Fig. 14

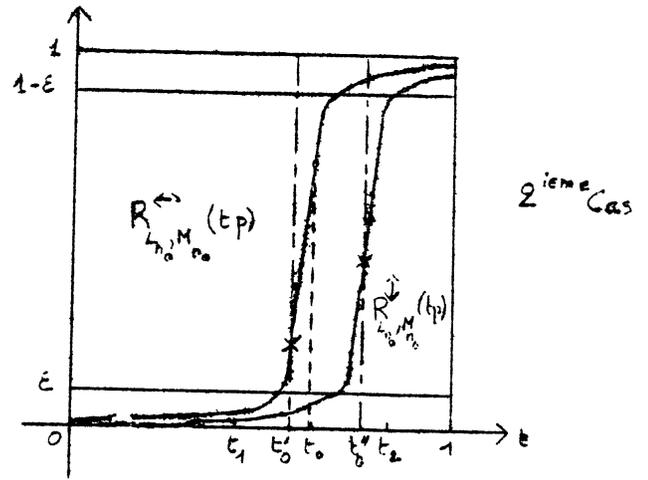
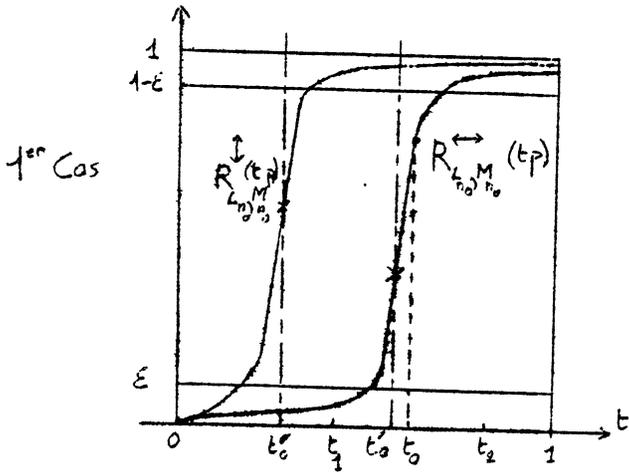


Fig. 15

Fig. 16

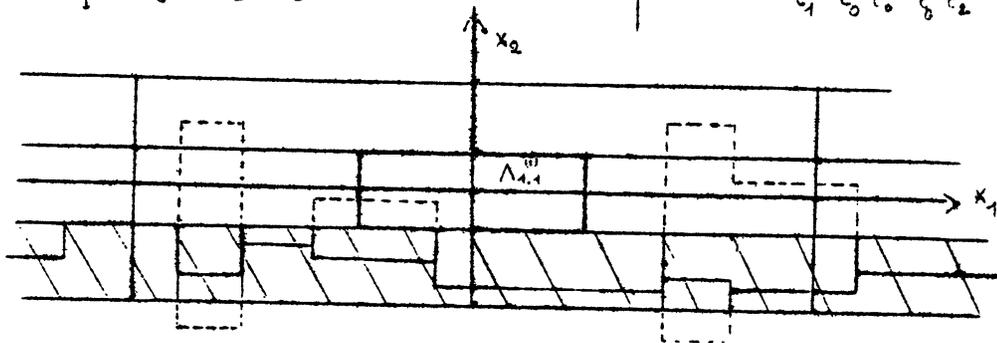
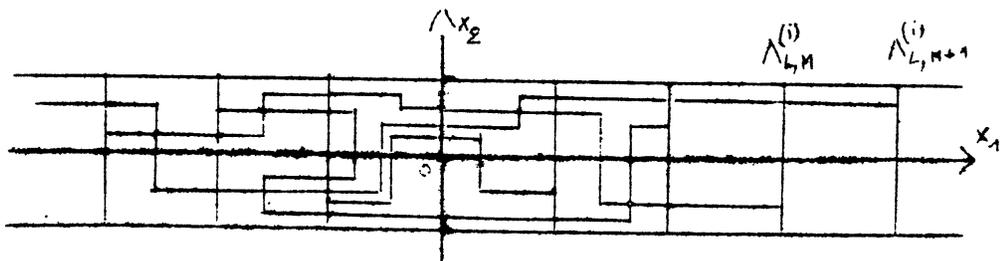


Fig. 17



pour $(b_{j,L,M})$: l'existence d'une boucle ouverte dans ω^* entourant j et contenue dans $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})^{\times 2}$ empêche l'existence d'un chemin ouvert dans ω reliant une extrémité de j au bord de $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})$ et contenu dans $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})$.

Or l'un des côtés verticaux de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ est situé entièrement à l'extérieur (au sens large) de $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})$; donc tout chemin reliant ce côté à une extrémité de j contient un chemin reliant le bord de $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})$ à une extrémité de j et contenu dans $t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})$. Donc (2) entraîne $(b_{j,L,M})$.

Par conséquent : pour tout $j \in L^{(i)}$

- si j est à l'extérieur de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ $\delta_j (A_{L,M}^{(i) \leftarrow \rightarrow}) = \emptyset$

- si j est à l'intérieur de $\Lambda_{L,M}^{(i)}$

$$\delta_j (A_{L,M}^{(i) \leftarrow \rightarrow}) \subseteq \{\omega \in \Omega^{(i)} \text{ vérifiant } (a_{j,L,M}) \text{ et } (b_{j,L,M})\}$$

or par invariance de μ_{tp} par les translations multiples de K , cet évènement est de même probabilité que l'évènement $\{\omega \in \Omega^{(i)} / \omega \text{ vérifie } (a_{T(j),L,M}) \text{ et } (b_{T(j),L,M})\}$ où, pour $j \in L^{(i)}$, $T(j)$ est un lien de $L^{(i)}$ contenu dans $\Lambda_{1,1}^{(i)}$ et déduit de j par une translation multiple de K (il existe toujours au moins un tel lien $T(j)$ puisque les translatés de $\Lambda_{1,1}^{(i)}$ par des vecteurs multiples de K recouvrent le plan).

Donc

$$\text{Max}_{\substack{t \in [0,1] \\ j \in L}} \mu_{tp} [\delta_j (A_{L,M}^{(i) \leftarrow \rightarrow})] \leq \text{Max}_{\substack{t \in [0,1] \\ j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}}} \mu_{tp} [\omega \in \Omega^{(i)} \text{ vérifiant } (a_{j,L,M}) \text{ et } (b_{j,L,M})].$$

Il suffit maintenant, pour obtenir le lemme, de montrer que : $\forall j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}$

$$\lim_{L,M \rightarrow +\infty} \text{Max}_{t \in [0,1]} \mu_{tp} [\omega \in \Omega^{(i)} \text{ vérifiant } (a_{j,L,M}) \text{ et } (b_{j,L,M})] = 0$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse $t_1 < t_2$: pour tous $L, M \geq 3$ et tout $j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}$:

$\{\omega \in \Omega^{(i)} \text{ vérifiant } (a_{j,L,M}) \text{ et } (b_{j,L,M})\}$ est contenu dans l'évènement

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega^{(i)} / \text{il n'existe pas de boucle} \\ \text{ouverte} \\ \text{dans } \omega \text{ entourant } \Lambda_{1,1}^{(i)*} \text{ et con-} \\ \text{tenue dans } \bigcap_{j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}} t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})^{x_1} \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega / \text{il n'existe pas de boucle ouver-} \\ \text{te dans } \omega^* \text{ entourant } \Lambda_{1,1}^{(i)} \text{ et con-} \\ \text{tenue dans } \bigcap_{j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}} t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})^{x_2} \end{array} \right\}$$

Remarque : dès que $L, M \geq 3$ on a pour tout $j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}$

$$\Lambda_{1,1}^{(i)*} \subseteq t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})^{x_1} \quad \text{et} \quad \Lambda_{1,1}^{(i)} \subseteq t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})^{x_2}$$

On a même pour $L, M \geq 3$ (voir Fig. 14)

$$\Lambda_{L-2, M-2}^{(i)} \subseteq \bigcap_{j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}} t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)})^{x_1} \quad \text{et} \quad \Lambda_{L-2, M-2}^{(i)*} \subseteq \bigcap_{j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}} t_{a_j}(\Lambda_{L,M}^{(i)*})^{x_2}$$

Donc $\{\omega \in \Omega^{(i)} \text{ vérifiant } (a_{j,L,M}) \text{ et } (b_{j,L,M})\} \subseteq E_{L,M}^{(i)} \cup E_{L,M}^{(i)'}$

où

$$E_{L,M}^{(i)} = \{\omega \in \Omega^{(i)} / \text{il n'existe pas de boucle ouverte dans } \omega \text{ entourant } \Lambda_{1,1}^{(i)*} \\ \text{et contenue dans } \Lambda_{L-2, M-2}^{(i)}\}$$

et

$$E_{L,M}^{(i)'} = \{\omega \in \Omega^{(i)} / \text{il n'existe pas de boucle ouverte dans } \omega^* \text{ entourant } \Lambda_{1,1}^{(i)} \\ \text{et contenue dans } \Lambda_{L-2, M-2}^{(i)*}\}$$

$$\text{Or } t_1 < t_2 \text{ entraîne qu'en } t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad \mu_{t_0 \cdot p}(A_\infty) = \mu_{t_0 \cdot p}^{\sim}(A_\infty) = 0$$

donc $\mu_{t_0 \cdot p}$ presque sûrement il existe une boucle ouverte dans ω entourant $\Lambda_{1,1}^{(i)*}$
et il existe une boucle ouverte dans ω^* entourant $\Lambda_{1,1}^{(i)}$

(puisque les amas de ω et de ω^* qui contiennent 0 sont $\mu_{t_0 \cdot p}$ p.s. finis).

$$\text{D'où } \lim_{L, M \rightarrow +\infty} \mu_{t_0 \cdot p}(E_{L,M}^{(i)}) = \lim_{L, M \rightarrow +\infty} \mu_{t_0 \cdot p}(E_{L,M}^{(i)'}) = 0$$

et comme $\Omega^{(i)} \setminus E_{L,M}^{(i)}$ et $E_{L,M}^{(i)'}$ sont des évènements positifs :

$$\text{pour tout } t \geq t_0 \quad \mu_{tp}(E_{L,M}^{(i)}) \leq \mu_{t_0 p}(E_{L,M}^{(i)})$$

$$\text{et pour tout } t \leq t_0 \quad \mu_{tp}(E_{L,M}^{(i)'}) \leq \mu_{t_0 p}(E_{L,M}^{(i)'})$$

donc pour $L, M \geq 3$ et j lien contenu dans $\Lambda_{1,1}^{(i)}$

$$\text{Max}_{t \in [0,1]} \mu_{tp} [\omega \in \Omega^{(i)} / \omega \text{ vérifie } (a_{j,L,M}) \text{ et } (b_{j,L,M})]$$

$$\leq \text{Max}_{t \in [0,1]} \mu_{tp}(E_{L,M}^{(i)} \cap E_{L,M}^{(i)'}) \leq \text{Max}(\mu_{t_0 p}(E_{L,M}^{(i)}), \mu_{t_0 p}(E_{L,M}^{(i)'}))$$

ce qui donne : $\forall j \in \Lambda_{1,1}^{(i)}$

$$\lim_{L, M \rightarrow +\infty} \text{Max}_{t \in [0,1]} \mu_{tp} [\omega \in \Omega^{(i)} / \omega \text{ vérifie } (a_{j,L,M}) \text{ et } (b_{j,L,M})] = 0$$

qui, comme on l'a vu, entraîne $\lim_{L, M \rightarrow +\infty} \text{Max}_{j \in L} \mu_{tp} [\delta_j(A_{L,M}^{(i) \leftrightarrow})] = 0$

démontrant ainsi le lemme.

Soit alors $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = +\infty$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_0(L_n) = +\infty$$

Le lemme 10 entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Max}_{j \in L} \mu_{tp} [\delta_j(A_{L_n, M_0(L_n)}^{(i) \leftrightarrow})] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Max}_{j \in L} \mu_{tp} [\delta_j(A_{L_n, M_0(L_n)}^{(i)})] = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \text{Inf}_{j \in L} [p_j, \beta, \alpha, \frac{t_2 - t_1}{8}]$

(α étant le réel > 0 défini dans le lemme 9 (bis))

Appliquons la loi zéro-un approchée (théorème 1) à la direction p ($\text{Inf}_{j \in L} p_j \geq \varepsilon$) :

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : (voir Fig. 15)

$$\exists t'_0 \in [0,1] \text{ vérifiant } \{t \leq t'_0 - \varepsilon \implies R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\longleftrightarrow} (tp) \leq \varepsilon\}$$

$$\{t \geq t'_0 + \varepsilon \implies R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\longleftrightarrow} (tp) \geq 1 - \varepsilon\}$$

et $\exists t''_0 \in [0,1]$ vérifiant $\{t \leq t''_0 - \varepsilon \implies R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\updownarrow} (tp) \leq \varepsilon\}$

$$\{t \geq t''_0 + \varepsilon \implies R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\updownarrow} (tp) \geq 1 - \varepsilon\}$$

Alors les inégalités $\beta \leq R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\longleftrightarrow} (t_0 p) \leq 1 - \beta$ et $\varepsilon < \beta$ entraînent :

$$|t'_0 - t_0| < \varepsilon$$

1er Cas : $t''_0 \leq t_0$, alors pour tout $t \in]t_0 + 2\varepsilon, t_2[$: (voir Fig. 15)

$$\left. \begin{array}{l} t > t'_0 + \varepsilon \text{ donc } R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\longleftrightarrow} (tp) \geq 1 - \varepsilon \geq 1 - \alpha \\ t > t''_0 + \varepsilon \text{ donc } R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\updownarrow} (tp) \geq 1 - \varepsilon \geq 1 - \alpha \end{array} \right\} \text{ donc (par le lemme 9 bis) } \mu_{tp}(A_\infty) = 1$$

ce qui contredit l'hypothèse : $\mu_{tp}(A_\infty) = 0$ pour tout $t < t_2$

2ème Cas : $t''_0 > t_0$, alors pour tout $t \in]t_1, t_0 - 2\varepsilon[$:

$$t < t'_0 - \varepsilon \text{ donc } R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\longleftrightarrow} (tp) \leq \varepsilon \leq \alpha$$

$$t < t''_0 - \varepsilon \text{ donc } R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\updownarrow} (tp) \leq \varepsilon \leq \alpha$$

donc d'après l'inégalité (1) $(R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\longleftrightarrow} (tp) + R_{L_{n_0}, M_{n_0}}^{\updownarrow} ((tp)^*) \geq 1)$, on a

$$\left. \begin{array}{l} R_{L_{n_0}, M_{n_0}} \updownarrow \\ ((tp)^*) \geq 1 - \alpha \end{array} \right\} \text{ ce qui, en vertu du lemme 9 bis, entraîne}$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} R_{L_{n_0}, M_{n_0}} \longleftrightarrow \\ ((tp)^*) \geq 1 - \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mu_{(tp)^*(A_\infty)} = 1 \text{ ou encore } \mu_{tp}(A_\infty) = 1 \end{array}$$

contredisant l'hypothèse : $\mu_{tp}(A_\infty) = 0$ pour tout $t > t_1$.

On ne peut donc pas avoir $t_1 < t_2$, et 2) est démontré.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Passons maintenant à la démonstration du corollaire : elle se borne à utiliser la monotonie des applications : $p \rightarrow \mu_p(A_\infty)$ et $p \rightarrow \mu_{tp}(A_\infty)$, et la densité de $\bigcup_{K \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_K$ dans \mathcal{S} pour la convergence uniforme.

Il s'agit de montrer que si $p \in \mathcal{S}$ vérifie $\inf_{i \in L} p_i > 0$ et $\sup_{i \in L} p_i = 1$,

alors si $t_1 = \inf \{t \in [0,1] / \mu_{tp}(A_\infty) = 0\}$ (avec la convention : $t_j = 1$ si l'ensemble correspondant est vide).
 $t_2 = \inf \{t \in [0,1] / \mu_{tp}(A_\infty) = 1\}$

On a $t_1 = t_2$

(a) supposons que $t_1 > t_2$: alors $\forall t \in]t_2, t_1[\quad \mu_{tp}(A_\infty) = \mu_{tp}(A_\infty) = 1$

Soient t'_1 et $t'_2 \in [0,1]$ tels que $t_2 < t'_2 < t'_1 < t_1$

Il existe $q \in \bigcup_{K \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_K$ tel que $\sup_{i \in L} |q_i - p_i| = \delta < \frac{t'_1 - t'_2}{t'_1 + t'_2} \cdot \inf_{i \in L} p_i$

Montrons qu'il existe alors, dans la direction de q , un segment non réduit à un point, le long duquel $\mu_{tp}(A_\infty) = \mu_{tp}(A_\infty) = 1$

En effet, par définition de q ,

$$\frac{t'_2 \cdot (\inf_L p_i)}{(\inf_L p_i) - \delta} < \frac{t'_1 \cdot (\inf_L p_i)}{(\inf_L p_i) + \delta}$$

$$\text{et } \forall t \in \left[\frac{t'_2 \cdot (\text{Inf}_L p_i)}{\text{Inf}_L p_i - \delta}, \frac{t'_1 \cdot (\text{Inf}_L p_i)}{\text{Inf}_L p_i + \delta} \right] = I \quad (\text{remarque : } \frac{t'_1 \cdot \text{Inf}_L p_i}{\text{Inf}_L p_i + \delta} < 1)$$

et $\forall i \in L$ on a :

$$\begin{aligned} t'_2 \cdot p_i &= \frac{t'_2 \cdot p_i}{p_i - \delta} (p_i - \delta) \leq \frac{t'_2 \cdot \text{Inf}_L p_i}{\text{Inf}_L p_i - \delta} (p_i - \delta) \\ &\leq t_{q_i} \leq \frac{t'_1 \cdot \text{Inf}_L p_i}{\text{Inf}_L p_i + \delta} (p_i + \delta) \leq \frac{t'_1 \cdot p_i}{p_i + \delta} (p_i + \delta) = t'_1 \cdot p_i \end{aligned}$$

$$\text{donc comme } \mu_{\frac{t'_1 p}{t'_1 p}} \sim (A_\infty) = \mu_{\frac{t'_2 p}{t'_2 p}} (A_\infty) = 1$$

$$\text{on a pour tout } t \in I \quad \mu_{\frac{t q}{t q}} \sim (A_\infty) = \mu_{\frac{t q}{t q}} (A_\infty) = 1$$

ce qui est impossible d'après le théorème 2; donc $t_1 \leq t_2$

(b) supposons $t_1 < t_2$: alors pour tout $t \in]t_1, t_2[$ $\mu_{\frac{t p}{t p}} (A_\infty) = \mu_{\frac{t p}{t p}} \sim (A_\infty) = 0$

Soient t'_1 et $t'_2 \in [0, 1]$ tels que $t_1 < t'_1 < t'_2 < t_2$

et soit $q \in \bigcup_{K \in \mathcal{N}} \bigcirc_K$ tel que $\text{Sup}_{i \in L} |q_i - p_i| = \delta < \frac{t'_2 - t'_1}{t'_1 + t'_2} \text{Inf}_{i \in L} p_i$

$$\text{Montrons que } \forall t \in \left[\frac{t'_1 \cdot \text{Inf}_L p_i}{\text{Inf}_L p_i - \delta}, \frac{t'_2 \cdot \text{Inf}_L p_i}{\text{Inf}_L p_i + \delta} \right] = J \quad \mu_{\frac{t q}{t q}} (A_\infty) = \mu_{\frac{t q}{t q}} \sim (A_\infty) = 0$$

$$\text{(comme en (a)) } \frac{t'_1 \cdot \text{Inf}_L p_i}{\text{Inf}_L p_i - \delta} < \frac{t'_2 \cdot \text{Inf}_L p_i}{\text{Inf}_L p_i + \delta} < 1)$$

En effet : $\forall t \in J$ et $\forall i \in L$ on a :

$$\begin{aligned}
 t'_1 \cdot p_i &= \frac{t'_1 \cdot p_i}{p_i - \delta} (p_i - \delta) \leq \frac{t'_1 \cdot \text{Inf } p_i}{\text{Inf } p_i - \delta} (p_i - \delta) \\
 &\leq t \cdot q_i \leq \frac{t'_2 \cdot \text{Inf } p_i}{\text{Inf } p_i + \delta} (p_i + \delta) \leq \frac{t'_2 \cdot p_i}{p_i + \delta} (p_i + \delta) = t'_2 \cdot p_i
 \end{aligned}$$

donc comme $\mu_{t'_1 p}(A_\infty) = \mu_{t'_2 p}(A_\infty) = 0$

on a pour tout $t \in J$ $\mu_{tq}(A_\infty) = \mu_{tq}(A_\infty) = 0$ ce qui contredit le théorème 2

Donc $t_1 = t_2$, ce qui démontre le corollaire.

D - Remarques.

① Dans la démonstration du théorème 2, l'hypothèse du 1) $\text{Max}_{i \in L_1} p_i < 1$ a servi uniquement à montrer que pour tout $L \in \mathbb{N} : \lim_{M \rightarrow +\infty} R_{L,M}^{\leftarrow \rightarrow}(p) = 0$.

On peut la remplacer par l'hypothèse plus générale : il n'existe pas de chemin infini contenu dans la bande parallèle à $Ox_1 : \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \Lambda_{L,M}^{(i)}$ et tel que, pour tout lien j de ce chemin, on ait $p_j = 1$.

(où "chemin infini" signifie : suite $(v_n, j_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ soit infini et $\forall n \in \mathbb{Z} \quad j_n = [v_{n-1}, v_n]$). En effet :

a) Cette condition équivaut à : pour tout $L \in \mathbb{N}$ il n'existe pas de chemin infini dans la bande $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \Lambda_{L,M}^{(i)}$ tel que tout lien j de ce chemin vérifie $p_j = 1$.

En effet l'existence d'un tel chemin dans $\bigcup_{\mathbb{N}} \Lambda_{L,M}^{(i)}$ entraînerait l'existence d'un chemin analogue dans $\bigcup_{\mathbb{N}} \Lambda_{1,M}^{(i)}$, ceci à cause des propriétés de symétrie de p par rapport à tout axe $x_2 = M.K$ ($M \in \mathbb{Z}$) et de K -périodicité (voir fig. 16).

b) pour tout $L \in \mathbb{N}$, la condition : "il n'existe pas de chemin infini dans $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \Lambda_{L,M}^{(i)}$ dont tout lien j vérifie $p_j = 1$ " entraîne $\lim_{M \rightarrow +\infty} R_{L,M}^{\leftarrow \rightarrow}(p) = 0$.

En effet $R_{L,M}^{\leftrightarrow}(p)$ décroît quand M augmente, et

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} R_{L,M}^{\leftrightarrow}(p) > 0 \iff \lim_{M \rightarrow +\infty} R_{L,M}^{\leftrightarrow}(p) = 1 \quad (\text{car } \forall M \in \mathbb{N} \quad R_{L,2M}^{\leftrightarrow}(p) \leq R_{L,M}^{\leftrightarrow}(p)^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \lim_{M \rightarrow +\infty} R_{L,M}^{\leftrightarrow}(p) = 1 &\iff \forall M \in \mathbb{N} \quad R_{L,M}^{\leftrightarrow}(p) = 1 \\ &\iff \forall M \in \mathbb{N} \quad \text{il existe un chemin reliant les côtés ver-} \\ &\quad \text{ticaux de } \Lambda_{L,M}^{(i)} \text{ et dont tout lien } j \text{ vérifie } p_j = 1. \end{aligned}$$

(car si $I_{L,M}^{(i)} = \{j \in \Lambda_{L,M}^{(i)} / p_j = 1\}$ ne contient pas un tel chemin, alors :

$$\mu_p \{ \omega \in \Omega^{(i)} / \omega_j = 1 \text{ si } j \in I_{L,M}^{(i)} \text{ et } \omega_j = 0 \text{ si } j \in \Lambda_{L,M}^{(i)} \text{ et } j \notin I_{L,M}^{(i)} \} > 0$$

et cet évènement est disjoint de $\Lambda_{L,M}^{(i) \leftrightarrow}$).

$$\iff \text{il existe un chemin infini dans la bande } \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \Lambda_{L,M}^{(i)} \text{ dont tout lien } j \text{ vérifie } p_j = 1$$

(car pour toute suite $(\gamma_M)_{M \in \mathbb{N}}$ de chemins dans $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \Lambda_{L,M}^{(i)}$ tels que, pour tout M , γ_M relie dans $\Lambda_{L,M}^{(i)}$ les côtés verticaux de ce rectangle, la réunion $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \gamma_M$ de ces chemins contient un chemin infini, alors contenu dans $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \Lambda_{L,M}^{(i)}$ (voir Fig. 17).

On peut donc ré-énoncer le 1) en remplaçant l'hypothèse $\max_{i \in L_1} p_i < 1$ par l'hy-

pothèse : "il n'existe pas de chemin infini contenu dans la bande $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \Lambda_{1,M}^{(i)}$ et dont tout lien j vérifie $p_j = 1$ ".

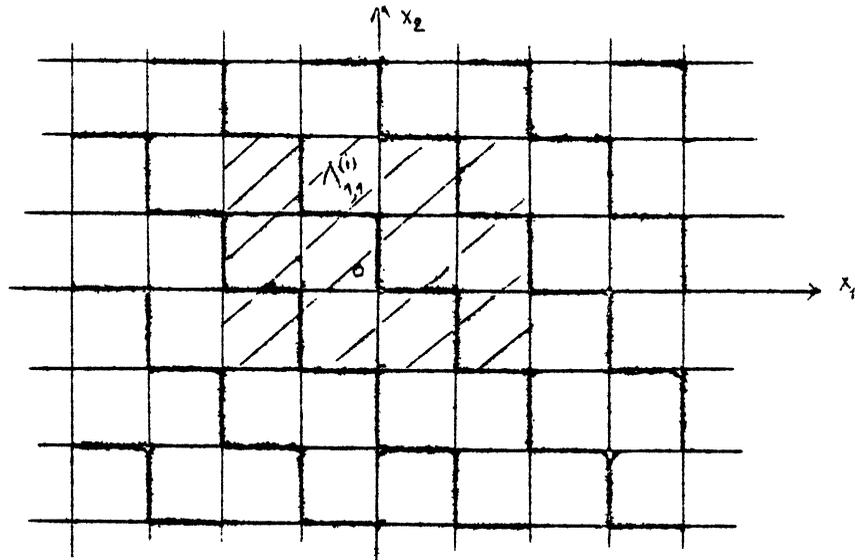
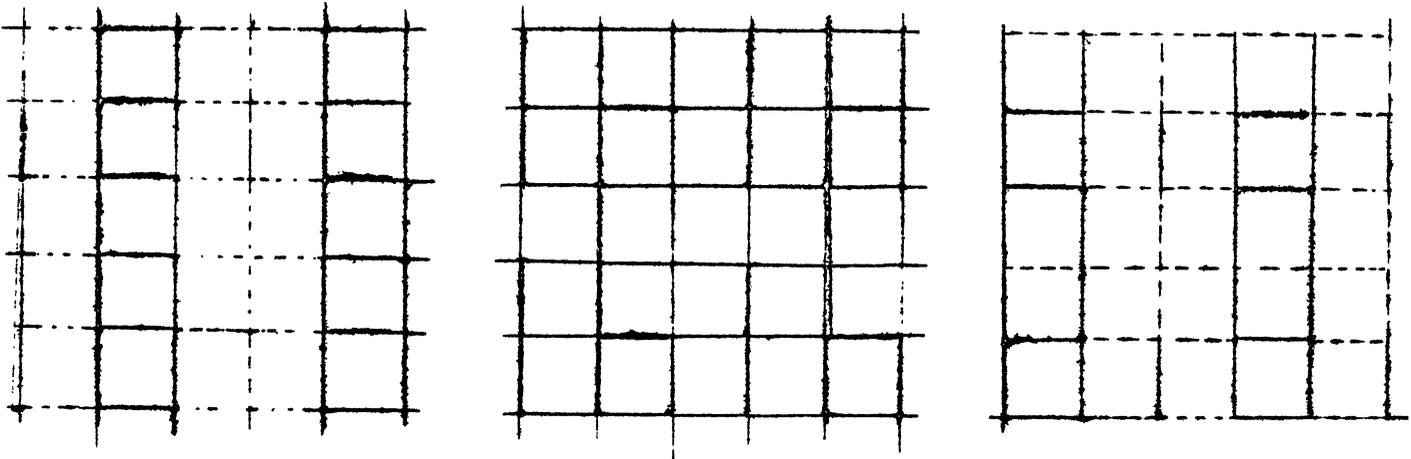
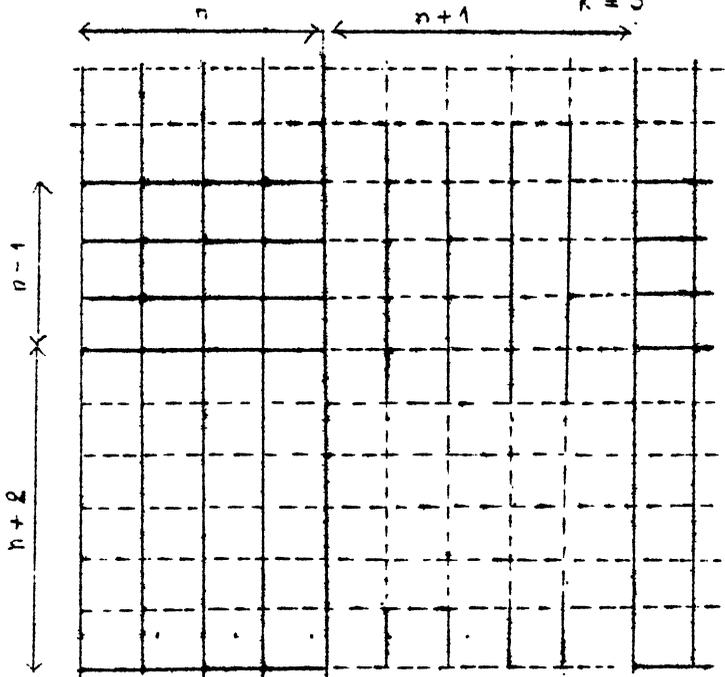


Fig. 18

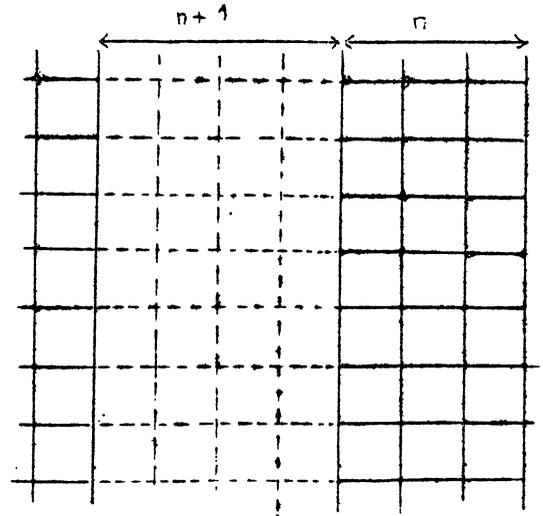
$K = 3$



$K = 3$



$K = 2n + 1$



$K = 2n + 1$

Fig. 19

② La 1ère partie du théorème 2 entraîne l'unicité presque sûre de l'amas infini pour p au-dessus de la surface critique (et $\text{Min}_{i \in L_1} p_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L_1} p_i < 1$)

En effet si p est au-dessus de la surface critique, on a montré en 1) que (sous les hypothèses $\text{Min}_{i \in L_1} p_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L_1} p_i < 1$) il existe μ_p -presque sûrement une infinité de boucles ouvertes entourant l'origine.

Alors 2 points quelconques du plan sont aussi μ_p -presque sûrement entourés par une même boucle ouverte; si l'on suppose donc qu'il existe au moins 2 amas A_1 et A_2 infinis dans une configuration ω , on peut choisir un point a_1 dans l'un des amas, un point a_2 dans l'autre, et μ_p -presque sûrement il existe dans ω une boucle B ouverte entourant a_1 et a_2 ; or une telle boucle coupe nécessairement A_1 et A_2 (puisque A_i a un point intérieur à B , a_i , et au moins un point extérieur à B puisque A_i est infini; de plus A_i est connexe, pour $i = 1, 2$).

On en conclut que A_1 et A_2 ne forment donc qu'un seul et même amas infini.

③ L'hypothèse de symétrie de p par rapport à 2 axes parallèles respectivement à Ox_1 et Ox_2 n'a servi qu'à établir les inégalités (2), analogues pour le cas périodique des inégalités établies par Russo (cf. [6]) et Seymour et Welsh (cf. [8]) pour les problèmes à 1 paramètre.

Ces inégalités sont cependant cruciales pour notre démonstration, et l'absence de telles symétries empêche de résoudre entièrement le cas triangulaire à 3 paramètres (voir chap. III B. ②).

On peut facilement construire un contre-exemple à ces inégalités dans le cas où p n'est pas symétrique et avec $p_i \in \{0, 1\}$ pour tout lien i [voir fig. 18] où les liens marqués en traits forts sont ceux pour lesquels $p_i = 1$, et les autres :

$p_i = 0$. Alors $R_{1,1}^{\leftarrow\rightarrow}(p) = 1$ et $R_{1, \frac{3}{2}}^{\leftarrow\rightarrow}(p) = R_{1,2}^{\leftarrow\rightarrow}(p) = 0$.
(ici la période est $K = 2$).

III QUELQUES CONSEQUENCES.

A - Cas de 2 paramètres.

On considère les distributions $(p_i)_{i \in L}$ de \mathcal{S}_K pour lesquelles il existe 2 nombres p_1 et p_2 dans l'intervalle $[0,1]$ et 2 parties complémentaires L'_1 et L'_2 de L vérifiant $p_i = p_1$ pour tout i dans L'_1 et $p_i = p_2$ pour tout i dans L'_2 .

① Cas de période 1.

C'est l'ensemble le plus simple d'une telle distribution : ici les liens horizontaux sont ouverts avec une probabilité p_1 , les liens verticaux avec une probabilité p_2 .

Si $p_1 = 1$ alors quelle que soit la valeur de p_2 : $\mu_p(A_\infty) = 1$.

Si $p_1 = 0$ alors $\mu_p(A_\infty) = 1$ si et seulement si $p_2 = 1$.

Etudions donc le problème pour $0 < p_1 < 1$:

(a) La 1ère partie du théorème 2 donne, si $0 < p_1 < 1$: $\mu_p(A_\infty) = 0$ ou $\mu_{\tilde{p}}(A_\infty) = 0$

Or ici $\tilde{p} = (1-p_2, 1-p_1)$ donc si $\begin{cases} p_1 + p_2 \leq 1 \\ \text{et} \\ 0 < p_1 < 1 \end{cases}$ $p \leq \tilde{p}$ donc $\mu_p(A_\infty) = 0$

(b) La 2ème partie du théorème nous dit que dans chaque direction de $[0,1]^2$ distincte des axes, il existe au plus un point (p_1, p_2) où $\mu_p(A_\infty) = \mu_{\tilde{p}}(A_\infty) = 0$.

Or à l'intersection avec la droite $p_1 + p_2 = 1$ on a justement, d'après (a),

$$\mu_p(A_\infty) = \mu_{\tilde{p}}(A_\infty) = 0 \quad (\text{car } p = \tilde{p}).$$

Donc en tout point (p_1, p_2) tel que $p_1 > 0, p_2 > 0$ et $p_1 + p_2 \neq 1$:

$$\mu_p(A_\infty) = 1 \quad \text{ou} \quad \mu_{\tilde{p}}(A_\infty) = 1.$$

Or sur $p_1 + p_2 > 1$ on a $p \geq \tilde{p}$: donc $\mu_p(A_\infty) = 1$

La droite $p_1 + p_2 = 1$ est donc la courbe critique; plus précisément :

$\mu_p(A_\infty) = 1 \iff p_1 + p_2 > 1 \quad \text{ou} \quad (p_1, p_2) \in \{(1,0), (0,1)\}$	(voir aussi [4])
--	------------------

(qui généralise le résultat $p_c = \frac{1}{2}$ pour le problème à 1 paramètre, cf. [3])

② Cas de période supérieure ou égale à 2.

Le résultat de ① se généralise si l'on suppose (ce qui était le cas en ①) qu'il existe une isométrie de \mathbb{R}^2 qui échange $L_1'^*$ et L_2' (donc aussi leurs complémentaires $L_2'^*$ et L_1').

(où $L_i'^*$ est l'ensemble des liens duaux des liens de L_i' $i = 1, 2$)

Alors, par les mêmes arguments que précédemment : si $p_1 + p_2 = 1$ $\mu_p(A_\infty) = \mu_{\tilde{p}}(A_\infty) = 0$ et la courbe critique est encore $p_1 + p_2 = 1$ (sur $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$; mais on ne peut rien affirmer ici pour les directions $p_1 = 0$ et $p_2 = 0$).

Voir les exemples donnés en fig. 19.

(pour des périodes ≥ 3 ; on n'a aucun exemple de période 2)

(les liens représentés en traits forts sont ceux de L_1' , les autres ceux de L_2')

B - Application de II à d'autres réseaux plans.

① On considère les réseaux obtenus à partir du réseau rectangulaire en identifiant 2 à 2, de façon périodique de période K et symétrique par rapport à deux axes $x_1 = a$ et $x_2 = b$ ($2a, 2b \in \mathbb{Z}$), les extrémités de certains liens verticaux, mais sans identifier une infinité de liens (verticaux) consécutifs.

On note \mathcal{R} le réseau périodique obtenu, L' l'ensemble de ses liens (L' est identifié à une partie de L telle que $L \setminus L' \subseteq L_2$).

Le réseau dual \mathcal{R}^* de \mathcal{R} est alors obtenu à partir de $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^2$ en supprimant certains liens horizontaux (les duaux des liens de $L \setminus L'$).

Par exemple : le réseau triangulaire est obtenu à partir de \mathbb{Z}^2 en identifiant les points (x_1, x_2) et $(x_1, x_2 + 1)$ pour $x_1 + x_2 \in 2\mathbb{Z}$; le réseau hexagonal (son dual) est obtenu en supprimant dans \mathbb{Z}^2 les liens horizontaux dont l'extrémité gauche vérifie $x_1 + x_2 \in 2\mathbb{Z}$ (voir fig. 20 (a)).

On considère l'espace $\Omega' = \{-1, +1\}^{L'}$ muni de la tribu \mathfrak{B}' engendrée par les évènements $E'_k = \{\omega' = (\omega'(i))_{i \in L'} \in \Omega' / \omega'(k) = +1\}$ (plus généralement on utilisera pour les diverses quantités définies sur Ω' les mêmes notations, munies d'un $\langle ' \rangle$, que celles utilisées sur Ω pour les quantités analogues).

Pour tout $p = (p_i)_{i \in L'} \in [0, 1]^{L'}$ on note μ_p la mesure de probabilité sur Ω'

$$\mu_p = \prod_{i \in L'} \nu_{p_i}.$$

L'application $\Phi : \Omega' \longrightarrow \Omega$

$$\omega \longrightarrow \bar{\omega} \text{ défini par } \begin{cases} \bar{\omega}(i) = \omega(i) & \text{si } i \in L' \\ \bar{\omega}(i) = 1 & \text{si } i \notin L' \end{cases}$$

envoie μ_p ($p \in [0, 1]^{L'}$) sur $\mu_{\bar{p}}$ où $\bar{p} \in [0, 1]^L$ est défini par :

$$\bar{p}_i = p_i \text{ pour } i \in L' \text{ et } \bar{p}_i = 1 \text{ pour } i \notin L'.$$

On note \mathfrak{P}'_K l'ensemble des éléments p de $[0, 1]^{L'}$ pour lesquels $\bar{p} \in \mathfrak{P}_K$.

L'analogue de l'application $S : \Omega \longrightarrow \Omega^* = \{-1, +1\}^{L^*}$ est l'application

$$\omega \longrightarrow \omega^* = (-\omega(i^*))_{i \in L}$$

$$S' : \Omega' \longrightarrow \Omega'^* = \{-1, +1\}^{L'^*}$$

$$\omega \longrightarrow \omega^* = (-\omega(i^*))_{i \in L'}$$

On s'intéresse aux évènements de $\Omega : A_\infty = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ a un amas infini}\}$

$$A_\infty^* = \{\omega \in \Omega / S(\omega) \text{ a un amas infini}\}$$

et de $\Omega' : A'_\infty = \{\omega \in \Omega' / \omega \text{ a un amas infini}\}$

$$A'^*_\infty = \{\omega \in \Omega' / S'(\omega) \text{ a un amas infini}\}.$$

(les amas de $\omega \in \Omega'$ (resp. de $\omega^* \in \Omega'^*$) étant définis comme les composantes connexes dans \mathfrak{U} (resp. dans \mathfrak{U}^*) de $\omega^{-1}(+1)$ (resp. de $\omega^{*-1}(+1)$)).

Alors pour tout p dans \mathfrak{P}'_K :

$$\mu_p(A'_\infty) = \mu_p^-(A_\infty) \quad \text{car } A'_\infty = \phi^{-1} [A_\infty \cap (\{+1\}^{L \setminus L'} \times \{-1, +1\}^{L'})] \quad (a)$$

$$\text{et } \mu_p^-(\{+1\}^{L \setminus L'} \times \{-1, +1\}^{L'}) = 1$$

$$\mu_p(A'_\infty^*) = \mu_p^-(A_\infty^*) \quad \text{car } \phi^{-1} [A_\infty^* \cap (\{+1\}^{L \setminus L'} \times \{-1, +1\}^{L'})] \subseteq A'_\infty^* \\ \subseteq \phi^{-1} [A_\infty^*] \quad (b)$$

((a) nécessite l'hypothèse que $L \setminus L'$ ne contient pas une infinité de liens consécutifs.

(b) résulte du fait que si $\omega \in \{+1\}^{L \setminus L'} \times \{-1, +1\}^{L'}$ et $S(\omega)$ a un amas infini, cet amas ne contient que des liens de L'^* , c'est donc un amas de $S'[\phi^{-1}(\omega)]$

On peut établir le résultat suivant : (K et L' étant fixés, avec les hypothèses qui précèdent).

Théorème 2 bis : pour tout p dans \mathcal{P}'_K tel que $\text{Min}_{i \in L'} p_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L'} p_i < 1$ il existe $t_p \in [0, 1]$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$t < t_p \implies \mu_{tp}(A'_\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \mu_{tp}(A'_\infty^*) = 1$$

$$t > t_p \implies \mu_{tp}(A'_\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{tp}(A'_\infty^*) = 0$$

de plus, si $t_p < 1$ ou si $t_p = 1$ et $\text{Max}_{i \in L_1} p_i < 1$ alors $\mu_{t_p p}(A'_\infty) = 0$ ou $\mu_{t_p p}(A'_\infty^*) = 0$

Ce résultat généralise celui obtenu pour le réseau rectangulaire, mais ne peut pas s'en déduire puisqu'on travaille ici le long de segments de \mathcal{P}'_K sur lesquels $p_i \equiv 1$ pour certains $i \in L_2$.

Cependant on peut utiliser partiellement la démonstration faite dans le cas de \mathbb{Z}^2 (en particulier toute la 1ère partie) et appliquer la loi zéro-un approchée (théorème 1) dans Ω' (pour la 2ème partie) au lieu de Ω , afin d'obtenir un résultat sur chaque direction de \mathcal{P}'_K .

Démonstration.

1) On a montré que pour tout q de \mathcal{P}'_K avec $\text{Min}_{i \in L_1} q_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L_1} q_i < 1$:

$$\mu_q(A_\infty) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_q(A_\infty^*) = 0$$

En appliquant ce résultat à \bar{p} (correspondant à $p \in \mathcal{P}'_K$) et en utilisant (a) et (b), on obtient : pour tout $p \in \mathcal{P}'_K$ tel que $\text{Min}_{i \in L_1} p_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L_1} p_i < 1$ on a $\mu_p(A'_\infty) = 0$ ou $\mu_p(A'^*_\infty) = 0$ (car $(p_i)_{i \in L_1} = (\bar{p}_i)_{i \in L_1}$)

2) Soit $p \in \mathcal{P}'_K$ tel que $\text{Min}_{i \in L'} p_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L'} p_i = 1$; on définit :

$$t_1 = \inf \{ t \in [0,1] / \mu_{tp}(A'^*_\infty) = 0 \}$$

(si cet ensemble est vide, on pose $t_1 = 1$)

$$t_2 = \inf \{ t \in [0,1] / \mu_{tp}(A'_\infty) = 1 \}$$

(si cet ensemble est vide, on pose $t_2 = 1$)

d'après 1) on a $t_1 \leq t_2$

Supposons que $t_1 < t_2$: soit alors $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$

$0 < t_0 < 1$ donc $\text{Min}_{i \in L_1} t_0 p_i > 0$ et $\text{Max}_{i \in L_1} t_0 p_i < 1$ (*)

Pour tout couple (L,M) d'entiers positifs on considère les événements de Ω' :

$$A'_{L,M} \longleftrightarrow = \phi^{-1} [A_{L,M} \longleftrightarrow] \quad A'_{L,M} \updownarrow = \phi^{-1} [A_{L,M} \updownarrow]$$

On a donc pour tout q dans \mathcal{P}'_K : $\mu_q(A'_{L,M} \longleftrightarrow) = R_{L,M} \longleftrightarrow(q)$ et $\mu_q(A'_{L,M} \updownarrow) = R_{L,M} \updownarrow(q)$

(α) Les conditions (*) entraînent qu'il existe un réel $\beta_0 > 0$, et une application M_0 de \mathbb{N} dans \mathbb{N} tels que :

- pour tout L dans \mathbb{N} $\beta_0 \leq R_{L, M_0(L)} \longleftrightarrow(t_0 p) \leq 1 - \beta_0$
- $\limsup_{L \rightarrow +\infty} M_0(L) = +\infty$

(β) Comme dans démonstration du théorème 2, l'hypothèse $t_1 < t_2$ entraîne que

$$\mu_{t_0 p}(A'_\infty) = \mu_{t_0 p}(A'^*_\infty) = 0, \text{ ou encore : } \mu_{\overrightarrow{t_0 p}}(A_\infty) = \mu_{\overleftarrow{t_0 p}}(A^*_\infty) = 0,$$

donc il existe $\mu_{\overline{t_0 p}}$ -presque sûrement une infinité de boucles entourant 0 dans

$\omega^{-1}(+1)$ et dans $S(\omega)^{-1}(+1)$.

Ceci permet de majorer uniformément pour $t \in [0,1]$ et $i \in L$ les quantités

$\mu_{\overline{t p}} [\delta_i A_{L,M}^{\longleftrightarrow}]$ par une fonction de L et M qui tend vers 0 quand L et M tendent vers l'infini.

[Tout ce qui est fait au chapitre II sur une direction de \mathcal{P}_K peut être répété pour un segment de \mathcal{P}_K de la forme $\{\overline{t p}, t \in [0,1]\}$, les seuls arguments pour obtenir ces majorations étant des arguments géométriques, et de monotonie des fonctions :

$$t \longrightarrow \mu_{\overline{t p}} (\omega \in \Omega / \text{il existe une infinité de boucles entourant } \Lambda_{1,1}^* \text{ dans } \omega^{-1}(+1) \cap \Lambda_{L,M})$$

$$\text{et } t \longrightarrow \mu_{\overline{t p}} (\omega \in \Omega / \text{il existe une infinité de boucles entourant } \Lambda_{1,1} \text{ dans } \omega^{*-1}(+1) \cap \Lambda_{L,M}^*)$$

(pour tout $(L,M) \in \mathbb{N}^2$)]

De même pour les $\mu_{\overline{t p}} [\delta_i A_{L,M}^{\updownarrow}]$ $t \in [0,1]$ $i \in L$

$$\text{Donc } \lim_{L,M \rightarrow +\infty} \text{Max}_{\substack{t \in [0,1] \\ i \in L}} \mu_{\overline{t p}} [\delta_i A_{L,M}^{\longleftrightarrow}] = 0 \text{ et } \lim_{L,M \rightarrow +\infty} \text{Max}_{\substack{t \in [0,1] \\ i \in L}} \mu_{\overline{t p}} [\delta_i A_{L,M}^{\updownarrow}] = 0$$

$$\text{Or pour tout } i \text{ dans } L' : \delta_i A_{L,M}'^{\longleftrightarrow} = \phi^{-1}[\delta_i A_{L,M}^{\longleftrightarrow}] \text{ et } \delta_i A_{L,M}'^{\updownarrow} = \phi^{-1}[\delta_i A_{L,M}^{\updownarrow}]$$

En effet, par exemple pour la première égalité :

$$\delta_i A_{L,M}^{\longleftrightarrow} = [A_{L,M}^{\longleftrightarrow} \cap S_i(A_{L,M}^{\longleftrightarrow} \text{ c})] \cup [A_{L,M}^{\longleftrightarrow} \text{ c} \cap S_i(A_{L,M}^{\longleftrightarrow})]$$

et comme pour tout $i \in L' : \phi \circ S_i' = S_i \circ \phi$

(où S_i' est l'application de Ω' dans lui-même qui change en son opposée la coordonnée d'indice i).

On a donc

$$\begin{aligned} \phi^{-1}[\delta_i A_{L,M}^{\leftarrow}] &= [\phi^{-1}(A_{L,M}^{\leftarrow}) \cap \phi^{-1}(S_i(A_{L,M}^{\leftarrow c}))] \cup [\phi^{-1}(A_{L,M}^{\leftarrow c}) \cap \phi^{-1}(S_i(A_{L,M}^{\leftarrow}))] \\ &= [A_{L,M}^{\leftarrow} \cap S_i'(A_{L,M}^{\leftarrow c})] \cup [A_{L,M}^{\leftarrow c} \cap S_i'(A_{L,M}^{\leftarrow})] = \delta_i A_{L,M}^{\leftarrow} . \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{L,M \rightarrow +\infty} \text{Max}_{\substack{t \in [0,1] \\ i \in L'}} \mu_{tp}(\delta_i A_{L,M}^{\leftarrow}) = 0$$

$$\text{et } \lim_{L,M \rightarrow +\infty} \text{Max}_{\substack{t \in [0,1] \\ i \in L'}} \mu_{tp}(A_{L,M}^{\updownarrow}) = 0$$

et la loi zéro-un approchée dans Ω' s'applique à ces évènements : c'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $L_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous L et M dans \mathbb{N} tels que $L, M \geq L_0$, les fonctions $[0,1] \rightarrow [0,1]$ ne sont comprises

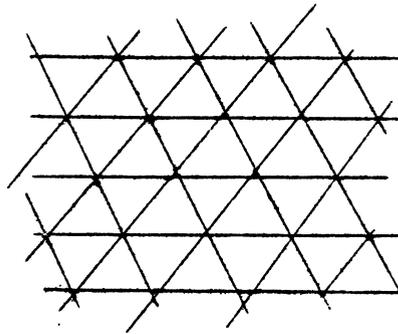
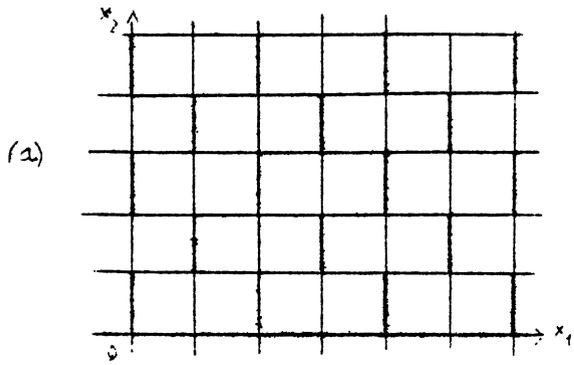
$$t \rightarrow \mu_{tp}(A_{L,M}^{\leftarrow}) = \mu_{tp}(A_{L,M}^{\leftarrow})$$

$$\text{et } t \rightarrow \mu_{tp}(A_{L,M}^{\updownarrow}) = \mu_{tp}(A_{L,M}^{\updownarrow})$$

entre ε et $1 - \varepsilon$ que sur un intervalle d'amplitude au plus égale à 2ε .

On est donc ramené dans $\Omega = \{-1, +1\}^L$ et, en appliquant ce qui précède aux évènements $A_{L, M_0}^{\leftarrow}(L)$ et $A_{L, M_0}^{\updownarrow}(L)$ (M_0 étant définie en (d)), on peut reprendre à partir d'ici la démonstration faite dans le cas du réseau rectangulaire et obtenir :

Fig 20



Dual

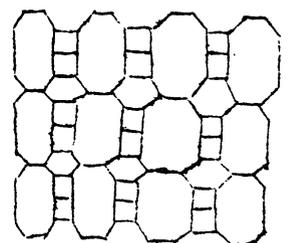
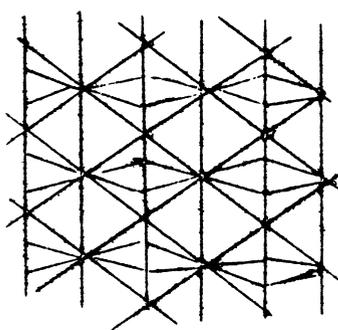
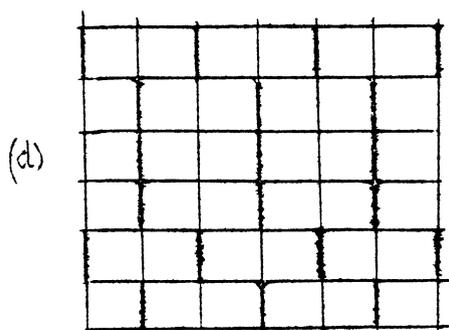
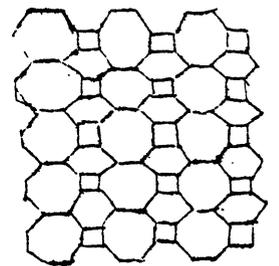
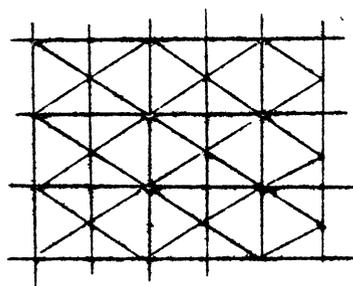
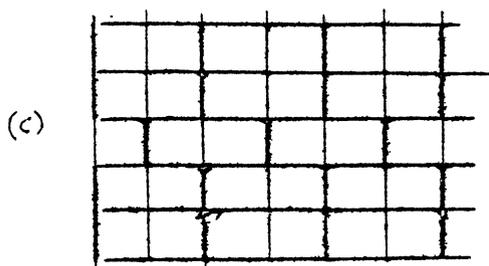
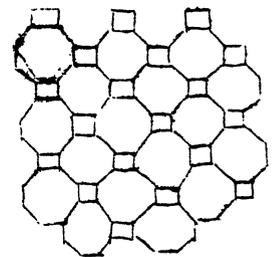
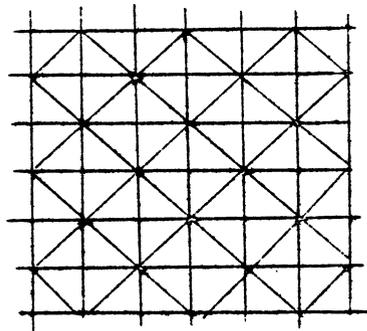
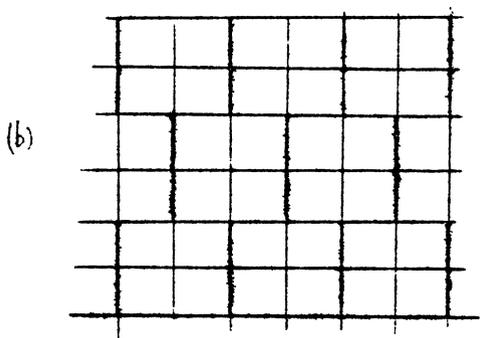
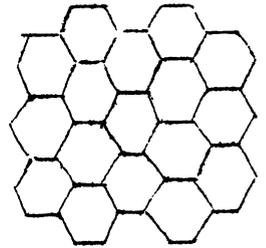
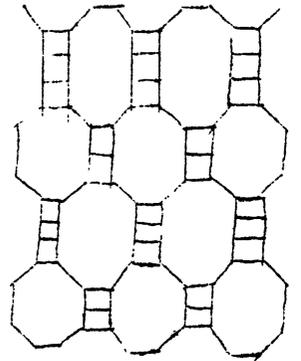
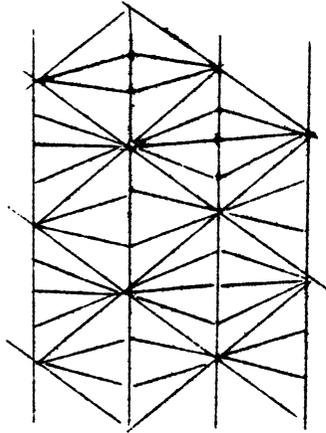
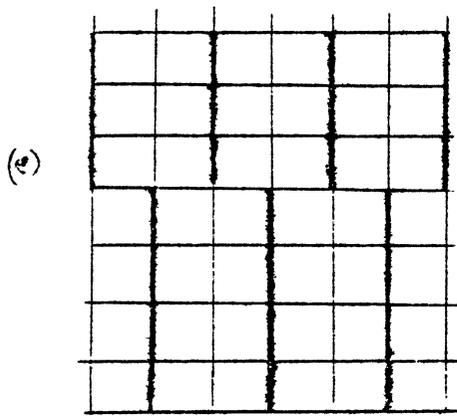
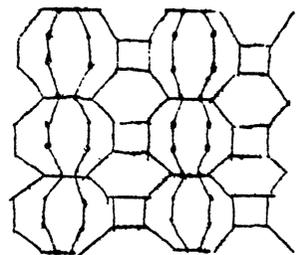
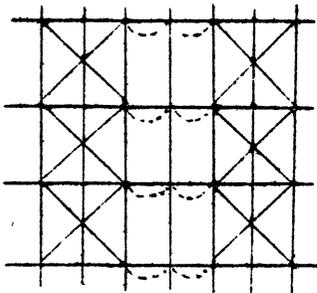
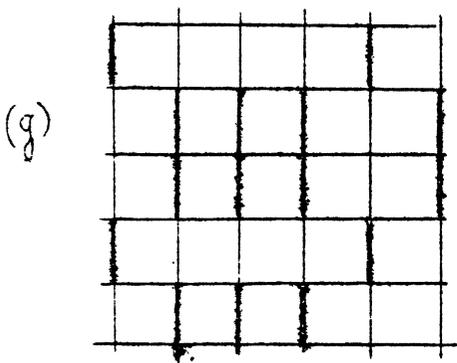
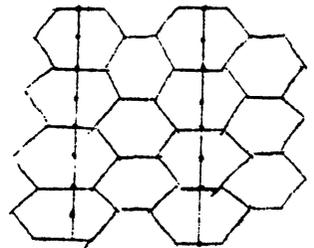
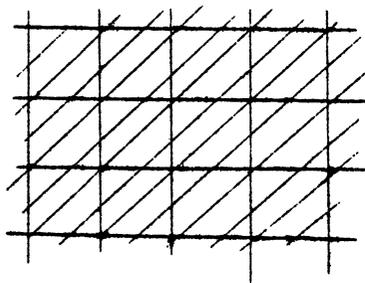
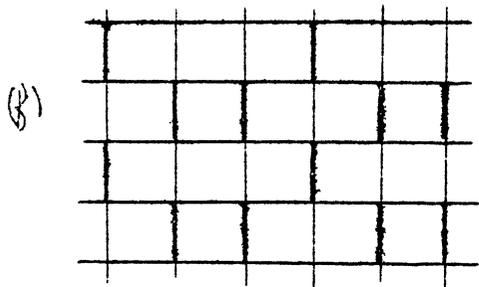


Fig 20 (suite)



etc



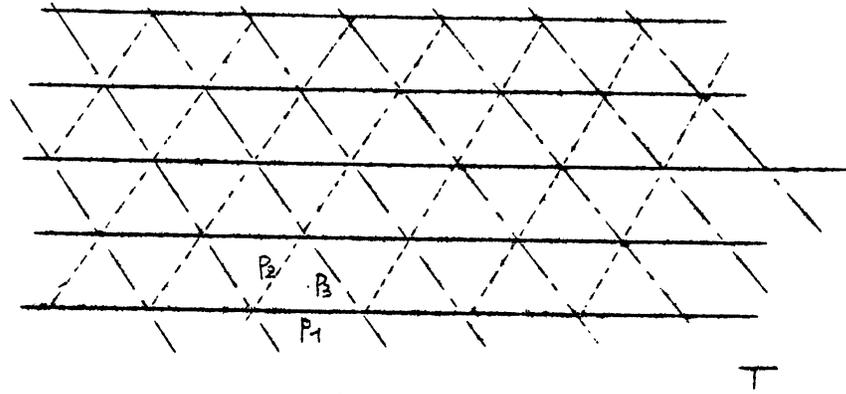


Fig 21

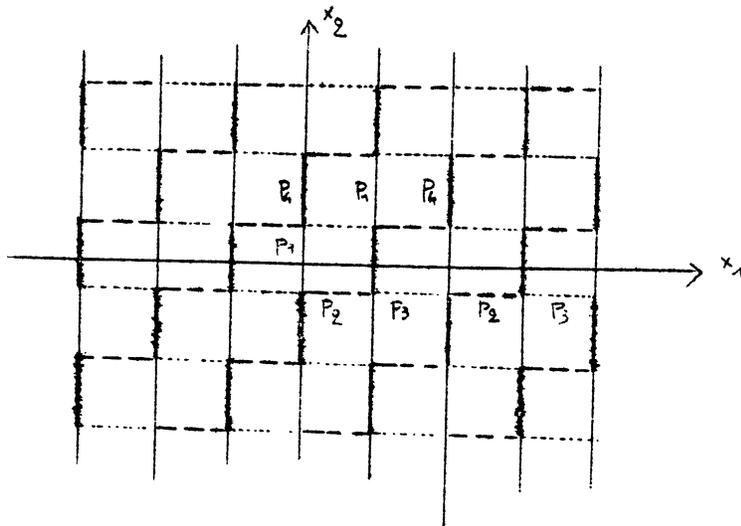


Fig 22

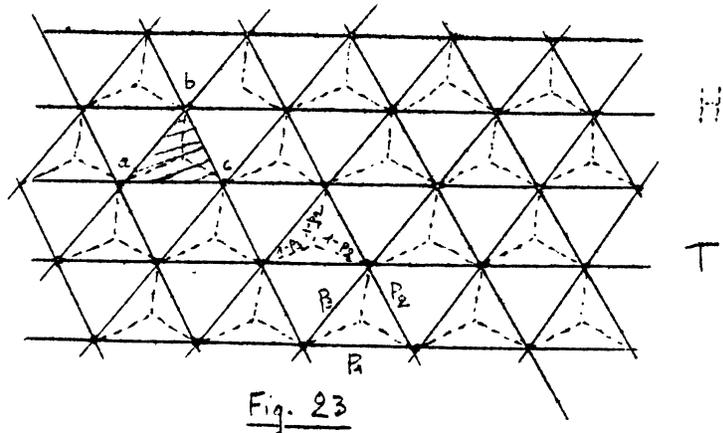


Fig. 23

1er Cas :
$$\begin{cases} R_{L, M_0}^{\leftarrow} (L) (\overline{tp}) \geq 1 - \alpha \\ \text{et} \\ R_{L, M_0}^{\updownarrow} (L) (\overline{tp}) \geq 1 - \alpha \end{cases}$$
 pour un $t \in]t_0, t_2[$ et un L convenable

(où α est le nombre intervenant dans le lemme 9 bis)

donc, le lemme 9 bis étant applicable à tout $q \in \mathcal{P}_K^{(L)}$ (même avec $q_i = 1$ pour $i \notin L'$) on a donc $\mu_{\overline{tp}}(A_\infty) = 1$ ce qui équivaut à $\mu_{tp}(A'_\infty) = 1$ et contredit donc l'hypothèse $t_1 < t_2$.

2ème Cas :
$$\begin{cases} R_{L, M_0}^{\leftarrow} (L) (\overline{tp}) \leq \alpha \\ \text{et} \\ R_{L, M_0}^{\updownarrow} (L) (\overline{tp}) \leq \alpha \end{cases}$$
 pour un $t \in]t_1, t_0[$ et L convenable

Alors
$$\begin{cases} R_{L, M_0}^{\updownarrow} (L) (\widetilde{tp}) \geq 1 - \alpha \\ \text{et} \\ R_{L, M_0}^{\leftarrow} (L) (\widetilde{tp}) \geq 1 - \alpha \end{cases}$$
 et donc (par le lemme 9 bis) $\mu_{\widetilde{tp}}(A_\infty) = 1$

c'est à dire $\mu_{\overline{tp}}(A_\infty^*) = 1$ ce qui équivaut à $\mu_{tp}(A'_\infty^*) = 1$ et contredit l'hypothèse $t_1 < t_2$.

D'où $t_1 = t_2$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Les figures 20(a) à (g) donnent des exemples de réseaux obtenus à partir du réseau rectangulaire par la méthode expliquée au début de ce paragraphe.

Pour tous ces réseaux, le théorème 2 bis s'applique, et on a en particulier la relation $p_c + p_c^* = 1$ pour le modèle de percolation de liens à 1 paramètre.

② Cas du réseau triangulaire avec 3 paramètres.

On considère le réseau triangulaire dans lequel les liens sont ouverts, selon leur direction, avec une probabilité p_1, p_2 ou p_3 . (cf. Fig. 21)

Ce modèle se déduit du modèle périodique de période 2 sur le réseau rectangulaire

avec : pour $i \in L_1$ p_i égal alternativement à p_2 ou à p_3 (voir Fig. 21)
pour $i \in L_2$ p_i égal alternativement à p_1 ou à p_4

en prenant $p_4 = 1$. (cf. Fig. 22)

Le résultat précédent s'applique alors à condition d'imposer la symétrie par rapport aux axes, c'est à dire $p_2 = p_3$.

[Remarque : l'ensemble des distributions périodiques de période 2 à 4 paramètres du type précédent est stable par passage au dual :

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \longrightarrow \tilde{p} = (1-p_3, 1-p_1, 1-p_4, 1-p_2)$$

On sait que dans chaque direction sur laquelle $p_2 = p_3$ et $\min_{i \in L} p_i > 0$, le point critique est le seul point en lequel on peut avoir $\mu_p(A_\infty) = \mu_{\tilde{p}}(A_\infty)$.

Or il existe certaines distributions p pour lesquelles on peut affirmer que

$\mu_p(A_\infty) = \mu_{\tilde{p}}(A_\infty)$: ce sont celles qui vérifient $p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$ et $p_1 + p_4 = 1$ (car alors $\tilde{p} = (\frac{1}{2}, p_4, p_1, \frac{1}{2})$ se déduit de p par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$).

Ces points sont donc critiques, et une condition suffisante pour que $\mu_p(A_\infty) = 1$ est donc que $p_2 > \frac{1}{2}$ $p_3 > \frac{1}{2}$ et $p_1 + p_4 > 1$].

Pour le réseau triangulaire à 2 paramètres (p_1 et $p_2 = p_3$), on peut déterminer complètement la surface critique grâce à un argument de Sykes et Essam (cf. [9]) qui permet de trouver dans chaque direction de $[0,1]^2$, un point p en lequel $\mu_p(A_\infty) = \mu_p(A_\infty^*)$, ceci entraînant, d'après ce qui précède, que p est le point critique dans cette direction.

L'argument consiste à translater le réseau dual H (hexagonal) de façon que les sommets (S) du réseau triangulaire T soient aussi sommets du réseau H , puis à considérer les amas de points de S dans chacun des 2 modèles :

$$(T, p_1, p_2, p_3) \quad \text{et} \quad (H, 1-p_1, 1-p_2, 1-p_3) \quad (\text{voir Fig. 23})$$

Remarque : il y a équivalence entre existence d'un amas infini dans H et existence d'un amas infini de points de S dans H , puisqu'un sommet de H qui n'est pas dans S a tous ses voisins dans S .

Si on isole un triangle ayant en son centre un sommet de H, avec les 3 liens du réseau T (ses côtés) et les 3 liens du réseau H intérieurs au triangle, qui relient entre eux les sommets a,b,c : les composantes connexes de {a,b,c}

peuvent être (dans  ou dans ) :

- (1) {a,b,c} (2) {a,b} et {c} (3) {a,c} et {b}
- (4) {b,c} et {a} (5) {a}, {b}, {c}

On calcule les probabilités de ces cinq évènements pour (T,p) et (H,1-p) :

pour T	(1) $p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 - p_1p_2p_3$	pour H	(1) $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$
	(2) $p_2(1-p_1)(1-p_3)$		(2) $p_2(1-p_1)(1-p_3)$
	(3) $p_3(1-p_1)(1-p_2)$		(3) $p_3(1-p_1)(1-p_2)$
	(4) $p_1(1-p_2)(1-p_3)$		(4) $p_1(1-p_2)(1-p_3)$
	(5) $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$		(5) $p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 - p_1p_2p_3$

Ces 5 probabilités sont identiques pour T et H dès que :

$$p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3), \text{ c'est à dire dès que}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2p_3 = 1 \text{ qui est l'équation de la surface critique}$$

conjecturée par Sykes et Essam dans [9].

La seule chose que l'on puisse affirmer ici est que quand $p_2 = p_3$:

$$p_1 + 2p_2 - p_1p_2^2 = 1$$

est l'équation de la courbe critique, puisque

l'existence d'un amas infini n'est fonction (pour T comme pour H) que de la décomposition en composantes connexes de chaque triangle qui contient en son centre un sommet de H, ces décompositions étant indépendantes pour les différents triangles : donc l'égalité des probabilités (1) à (5) pour T et H entraîne $\mu_p(A_\infty) = \mu_p(A_\infty^*)$.

[Cette équation est valable sur les plans $\{p_i = 0\}$ $i=1,2$ puisque $p_1 = 0$ ramène au réseau rectangulaire avec 1 paramètre, pour lequel $p_c = \frac{1}{2}$, et $p_2 = 0$

ramène au réseau rectangulaire avec période 1 et $(p_1, p_2) = (1, 0)$, donc $p_{1c} = 1$].

Remarques : La conjecture de Sykes et Essam est vérifiée quand $p_3 = 0$, cas qui nous ramène au modèle de période 1 à 2 paramètres dans \mathbb{Z}^2 , de courbe critique $p_1 + p_2 = 1$.

Kesten montre, dans [4] chap. 12, que la surface critique pour le problème à 3 paramètres dans T est minorée par $p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3 = 1$.

L'équation $p_1 + 2p_2 - p_1 p_2^2 = 1$ généralise le résultat de Wierman [10], $3p_c - p_c^3 = 1$ pour le problème à 1 paramètre dans le réseau triangulaire, qui donne comme solution : $p_c = 2 \sin \frac{\pi}{18}$.

③ Remarque : d'après la remarque D ① qui suit la démonstration du théorème 2 au chapitre II, on peut encore énoncer le théorème 2 bis pour tout réseau \mathcal{R} obtenu à partir de \mathbb{Z}^2 en prenant $p_i = 1$ pour tout lien i d'une partie L'' de L ne contenant pas de chemin infini (condition qui donne par la même occasion l'équivalence entre l'existence presque sûre d'un amas infini dans \mathbb{Z}^2 et celle d'un amas infini dans \mathcal{R}), L' étant de plus périodique et symétrique par rapport à 2 axes $x_1 = a$ et $x_2 = b$ $2a, 2b \in \mathbb{Z}$.

④ Extension du théorème 2 bis au cas limite périodique.

On peut comme pour \mathbb{Z}^2 déduire du théorème 2 bis le cas limite périodique, et énoncer le résultat suivant, où \mathcal{R} est un réseau (de liens L') déduit de \mathbb{Z}^2 en identifiant 2 à 2 de façon périodique et symétrique par rapport à 2 axes $x_1 = a$ et $x_2 = b$ ($2a, 2b \in \mathbb{Z}$) les extrémités de certains liens (ceux de $L \setminus L'$) ne formant pas de chemin infini dans \mathbb{Z}^2 (voir la remarque du § précédent), et où \mathcal{P} désigne l'ensemble des éléments de $[0, 1]^{L'}$ limites périodiques (i.e limites uniformes d'éléments périodiques) et symétriques par rapport à $x_1 = a$ et $x_2 = b$:

Corollaire 2 bis : pour tout p dans \mathcal{P}' tel que $\inf_{i \in L'} p_i > 0$ et $\sup_{i \in L'} p_i = 1$

il existe t_p appartenant à $[0,1]$ tel que pour tout $t \in [0,1]$:

$$t < t_p \implies \mu_{tp}(A'_\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \mu_{tp}(A'^*_\infty) = 1$$

$$t > t_p \implies \mu_{tp}(A'_\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_{tp}(A'^*_\infty) = 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE.

- 1) Fortuin, C.M., Kasteleyn, P.W., Ginibre, J. :
Correlation inequalities on some partially ordered sets.
Comm. Math. Phys. 22, 89-103 (1971).

- 2) Harris, T.E. :
A lower bound for the critical probability in a certain percolation process.
Proc. Cambridge - Phil. Soc. 56, 13-20 (1960).

- 3) Kesten, H. :
The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$.
Commun. Math. Phys. 74, 41-59 (1980).

- 4) Kesten, H. :
Percolation theory for mathematicians.
Birkhauser, Boston (1982).

- 5) Russo, L. :
A note on percolation.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 43, 39-48 (1978).

- 6) Russo, L. :
On the critical percolation probabilities.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 56, 229-237 (1981).

- 7) Russo, L. :
An approximate zero-one law.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 61, 129-139 (1982).

- 8) Seymour, P.D., Welsh, D.J.A. :
Percolation probabilities on the square lattice.
Ann. Discrete. Math. 3, 227-245 (1978).

9) Sykes, M.F., Essam, J.W. :

Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions.

J. Math. Phys. 5, 1117-1127 (1964).

10) Wierman, J.C. :

Bond percolation on honeycomb and triangular lattices.

Adv. Appl. Prob. 13, 293-313 (1981).

D. TIBI
Laboratoire de Probabilités
Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu

75230 PARIS Cédex 05

Reçu en Février 1984