ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
*Série Probabilités et applications*

J. R. RUIZ

# Calcul probabiliste du noyau de Poisson de la sphère

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 88, série *Probabilités et applications*, n° 5 (1986), p. 19-24
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1986__88_5_19_0>

# CALCUL PROBABILISTE DU NOYAU DE POISSON DE LA SPHERE

J.R. RUIZ

## 1. Introduction.

Soit $S_{d-1}$ la sphère-unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire $<.,.>$ . Soit $(B_t, \mathcal{F}_t, P_x, x\in R^d, t\geq 0)$ le mouvement brownien standard de $\mathbb{R}^d$. Soit $f$ une fonction continue de $S_{d-1}$ dans $\mathbb{R}$. La théorie probabiliste du potentiel résout le problème de Dirichlet pour $(S_{d-1},f)$ de la façon suivante : si $T = \inf\{t>0, B_t \in S_{d-1}\}$ , alors la fonction $F$ définie dans $C_d$ : $\{ x\in \mathbb{R}^d , |x| \leq 1\}$ $(|\cdot|^2 = <\cdot,\cdot>)$ par : $F(x) = \mathbb{E}_x[f(B_T)]$ est une fonction harmonique dans l'intérieur de $C_d$, continue sur $C_d$ et valant $f$ sur $S_{d-1}$. Donc si $\nu_x(d\theta)$ est la loi de $B_T$ pour $|x| < 1$, la formule précédente devient

$$F(x) = \int_{S_{d-1}} f(\theta)\ \nu_x(d\theta) \tag{1}$$

Il est connu que l'on a

$$\nu_x(d\theta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\theta|^d}\ \sigma(d\theta) \tag{2}$$

où $\sigma(d\theta)$ est la probabilité uniforme sur $S_{d-1}$. (2) est appelée mesure de Poisson.

Dans [1], J. Vauthier propose une élégante démonstration probabiliste de (2) pour $d = 2$ et $3$, utilisant de façon naturelle la décomposition en parties radiale et angulaire du mouvement brownien. Le but de cette note est d'une part de donner une démonstration probabiliste élémentaire de (2), et d'autre part d'étendre à $d$ quelconque la démonstration de J. Vauthier, mais en travaillant de façon intrinsèque, c'est-à-dire sans coordonnées, avec le mouvement brownien sur la sphère, ce qui évite le recours aux martingales de Mc Kean.

## 2. Le Laplacien sur la sphère et ses fonctions propres.

Soit $\varphi$ le difféomorphisme de $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ sur $]0,\infty[\times S_{d-1}$ défini par : $\varphi(x) = (|x|, \frac{x}{|x|})$. Rappelons que le laplacien $\Delta_{S_{d-1}}$ sur $S_{d-1}$ est lié au laplacien $\Delta$ sur $R^d$ par :

$$\Delta(g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\rho,\theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) + \frac{d-1}{\rho}\,\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\Delta_{S_{d-1}}\, g(\rho,\theta) \ , \quad \text{où}$$

$g \in \mathcal{C}^2(]0,\infty[ \times S_{d-1})$.

Proposition 2.1.

*Soit $E_n$ l'espace des fonctions $e_n$ de classe $C^2$ sur $S_{d-1}$ vérifiant $\Delta_{S_{d-1}} e_n = -n(n+d-2)e_n$. Alors*

a) *$E_n$ est un espace de dimension $m(n) = \dfrac{(2n+d-2)(n+d-3)!}{n!(d-2)!}$*

b) *$L^2(\sigma) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E_n$ , somme hilbertienne des $E_n$*

c) *Si $(e_n^k ,\ 1 \le k \le m(n))$ et $(f_n^k ,\ 1 \le k \le m(n))$ sont deux bases orthonormales de $E_n$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{m(n)} e_n^k(\alpha) e_n^k(\theta) = \sum_{k=1}^{m(n)} f_n^k(\alpha)\, f_n^k(\theta) \quad ; \quad \alpha,\ \theta \in S_{d-1}$$

*et cette quantité ne dépend que de $<\alpha,\theta>$ , soit $P_n(<\alpha,\theta>)$.*

*$P_n$ est proportionnel au polynôme de Gegenbauer $C_n^{(d/2)-1}$ donné par :*

$$(1-2ru+r^2)^{-(\frac{d}{2}-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\, C_n^{(d/2)-1}(u) \ . \quad u \in [-1,1] \ , \quad r \in ]-1,1[ \ .$$

Pour la démonstration on pourra par exemple consulter [ 2 ]. □

Corollaire 2.2. *Avec les notations de 2-1 on a :*

$$\sum_{k=1}^{m(n)} e_n^k(\alpha)\ e_n^k(\theta) = \frac{2n+d-2}{d-2}\, C_n^{(d/2)-1}(<\theta,\alpha>) \ .$$

Démonstration. On a $P_n(1) = \displaystyle\int_{S_{d-1}} \sum_{k=1}^{m(n)} |e_n^k(\theta)|^2\ \sigma(d\theta) = m(n)$ .

D'où, par 2.1. c) :

$$P_n(u) = \frac{m(n)}{C_n^{(d/2)-1}(1)}\, C_n^{(d/2)-1}(u). \qquad (u \in [-1,1])$$

Comme $C_n^{(d/2)-1}(1) = \dfrac{(n+d-3)!}{n!(d-3)!}$ par 2.1.c), on a le résultat. □

## 3. La formule de Poisson.

Proposition 3.1. *Avec les notations des §1 et 2, si* $x \in R^d \setminus \{0\}$ *et si* $e_n \in E_n$, *on a :*

$$\mathbb{E}_x [ e_n(B_T) ] = |x|^n \; e_n\left(\frac{x}{|x|}\right) .$$

1ère Démonstration

La fonction $H_n$ de $C_d$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H_n(0) = 0$$
$$H_n(x) = |x|^n \; e_n\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{si } x \neq 0$$

est harmonique à l'intérieur de $C_d$, continue sur $C_d$ et égale à $e_n$ sur $S_{d-1}$. □

2ème Démonstration

Celle-ci étend les méthodes de [1] à d quelconque.
On peut écrire (voir [4] p. 269-270).

$$(B_t,\ t>0) = (R_t,\ \tilde{B}_{\psi(t)}\ ,\ t\geq 0),$$

où $(\mathbb{R}_t,\ t\geq 0)$ est un processus de Bessel sur $R_+$, c'est-à-dire une diffusion sur $\mathbb{R}_+$, gouvernée par l'opérateur infinitésimal $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{d}{dr}\right)$, et $(\tilde{B}_s,\ s\geq 0)$ le mouvement brownien tandard sur la sphère $S_{d-1}$, c'est-à-dire une diffusion sur $S_{d-1}$, gouvernée par l'opérateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta_{S_{d-1}}$. $(R_t,\ t\geq 0)$ et $(\tilde{B}_s,\ s\geq 0)$ sont indépendants ; quant à $\psi(t)$, c'est le changement de temps :

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{ds}{R_s^2} .$$

Proposition 3.2. *Soit* $e_n \in E_n$ *et* $\alpha \in S_{d-1}$. *On a :*

$$\mathbb{E}_\alpha[e_n(\tilde{B}_t)] = \exp\left[-\frac{n}{2}(n+d-2)t\right] . e_n(\alpha) .$$

Démonstration : Soit $(P_t,\ t\geq 0)$ le semigroupe associé à $(\tilde{B}_t,\ t\geq 0)$ :

$$(P_t h)(\alpha) = \mathbb{E}_\alpha[ h(\tilde{B}_t)] = \int_{S_{d-1}} P_\alpha[\tilde{B}_t \in d\theta]\, h(\theta) .$$

Nous avons $P_t = \exp\left[\frac{t}{2}\Delta_{S_{d-1}}\right]$, donc

$$P_t e_n = \exp\left[-\frac{t}{2} . n(n+d-2)\right] . e_n ,$$ d'après la Prop. 2.1. □

Corollaire 3.3. *Si $e_n \in E_n$,*

$$\mathbb{E}_\alpha\,[e_n(B_T)] = e_n(\alpha).\exp\,[-\tfrac{n}{2}\,(n+d-2)\int_0^T \frac{ds}{R_s^2}\,]\,.$$

Démonstration : Comme $(R_t,\ t\geq 0)$ et T sont indépendants de $(\tilde{B}_s,\ s\geq 0)$ on peut remplacer t par $\psi(T)$ dans la Proposition 3.2. □

Maintenant pour calculer $\mathbb{E}_x\,[e_n(B_T)]$ , nous décomposons x en coordonnées polaires : $x = (r,\alpha)$. On a $\mathbb{E}_x = \mathbb{E}_r\,\mathbb{E}_\alpha$ ; il nous reste donc d'après le Cor. 3.3 à calculer la quantité A(r) définie par

$$A(r) = \mathbb{E}_r\left[\exp(-\tfrac{n}{2}\,(n+d-2)\int_0^T \frac{ds}{R_s^2}\,)\right]\,.$$

De la même façon que dans [1] , nous savons que A est solution de l'équation de Schrödinger suivante :

$$\frac{1}{2}\,(\frac{d^2A}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\,\frac{dA}{dr}\,) - \frac{1}{2r^2}\,n(n+d-2)A = 0 \qquad (*)$$

avec les conditions :

$$A(0) = 0 \qquad\qquad A(1) = 1\ ;$$

En effet, c'est la formule de Feymann-Kac appliquée à la diffusion $(R_t,\ t\geq 0)$ et à $T = \inf\{t>0,\ R_t = 1\}$ ; voir [3] p.158-159 par exemple. La condition A(1)=1 découle de T = 0 si r = 1 (voir [4] , p.257) ; quand à la deuxième, il est connu que (voir [4] , p.61) :

$$P_0\left[\overline{\lim_{s\searrow 0}}\ \frac{R_s}{\sqrt{2s\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}(1/s)}} = 1\right] = 1$$

donc, pour tout $\varepsilon>0$ on a :

$$P_0\left[\int_0^\varepsilon \frac{ds}{R_s^2} = +\infty\right] = 1\ ,$$

d'où A(0) = 0. L'équation d'Euler (*) s'intégrant facilement, on en déduit que $A(r) = r^n$ , ce qui achève cette 2ème démonstration de la Prop. 3.1. □

Voici alors le résultat principal :

Théorème 3.4. *La mesure de Poisson est donnée par la formule (2) de l'introduction.*

Démonstration : Choisissons pour tout $n\geq 0$ une base $(e_n^k\ ,\ k=1,\dots,m(n))$ orthonormale de $E_n$ ; écrivant $|x| = r$ et $\frac{x}{|x|} = \alpha$ on a par la Proposition 3.1 :

$$\int_{S_{d-1}} e_n^k(\theta)\ \nu_x(d\theta) = |x|^n\ e_n^k(\frac{x}{|x|}) = r^n\ e_n^k(\alpha) \tag{3}$$

Pour $0<r<1$, soit $\phi_r$ la fonction de $S_{d-1} \times S_{d-1}$ dans R définie par :

$$\phi_r(\theta,\alpha) = \sum_{n=o}^{\infty} r^n \sum_{k=1}^{m(n)} e_n^k(\theta)\ e_n^k(\alpha) = \sum_{n=o}^{\infty} r^n\ P_n(<\theta,\alpha>)$$

$\phi$ est bien définie ; en effet, on a,en notant $u = <\theta,\alpha>$ , d'après la Prop.2.2 :

$$\phi_r(\theta,\alpha) = \sum_{n=o}^{\infty} r^n\ C_n^{(d/2)-1}\ (u) + \frac{2}{d-2} \sum_{n=o}^{\infty} n\ r^n\ C_n^{d/2-1}(u)$$

La première somme est égale à $(1-2r\ u + r^2)^{-((d/2)-1)}$ ; la deuxième s'obtient en dérivant la première par rapport à r et en multipliant par r :

$$\frac{2}{d-2} \sum_{n=o}^{\infty} n\ r^n\ C_n^{(d/2)-1}(u) = 2(ru - r^2)(1 - 2r\ u + r^2)^{-d/2}$$

D'où $\qquad \phi_r(\ \theta,\alpha\ ) = (1-r^2)(1 - 2r<\theta\ \alpha>+ r^2)^{-d/2}$ .

Nous avons, pour tout $e_n^k$, d'après (3) :

$$\int_{S_{d-1}} e_n^k(\theta)\ [\nu_{(r,\alpha)}(d\theta) - \phi_r(\ \theta,\alpha\ )]\sigma(d\theta) \ = 0$$

Les $e_n^k$ formant un système total dans les fonctions continues sur $S_{d-1}$, nous avons :

$$\nu_{(r,\alpha)}(d\theta) = \phi_r(\ \theta,\alpha\ )\ \sigma(d\theta)$$

ce qui est (2) pour $x = (r,\alpha)$. $\square$

## Bibliographie

[1] J. Vauthier "An elementary probabilistic Computation of the Poisson Kernel for the n=2 and n=3 Euclidean Ball". Canad. Math. Bull. Vol.27(2), 1984, 241-246.

[2] R.T. Seeley "Spherical Harmonics" Am. Math. Monthly (Slaught memorial paper n°11) Vol.73, (1966) 115-121.

[3] D. Williams "Diffusions, Markov Processes and Martingales". Vol.1. Wiley(1979).

[4] K. Itô and H.P. Mc Kean, Jr. "Diffusion Processes and their Sample Paths". Springer Verlag (1965).

J.R. RUIZ

Université Paul Sabatier
Laboratoire de Statistique
et Probabilités
U.A. - C.N.R.S. 745
118, route de Narbonne

31062 TOULOUSE Cédex

Reçu en Octobre 1985