ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

O. JULIA

Temps local pour les martingales à deux indices par rapport à sa variation quadratique

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 88, série *Probabilités et applications*, n° 5 (1986), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1986__88_5_1_0>

TEMPS LOCAL POUR LES MARTINGALES A DEUX INDICES PAR RAPPORT A SA VARIATION QUADRATIQUE

O. JULIA

Abstract:

We give a local time for some square integrable continuous martingales with respect to their quadratic variation; we also exhibe the local time of the processes J_z with respect to its quadratic variation.

1. Introduction

Pour les martingales à deux indices continues et avec leur moment d'ordre quatre fini, il existe un processus de temps local L^x_{st} , continu dans les trois variables. Ce processus est un temps local par rapport à la variation quadratique de $\check{M}$, qui est une martingale associée a M (cf[4]). Ces résultats on été démontrés par Nualart en [5].

Il serait intéressant de voir sous quelles conditions il existe un temps local de la martingale M par rapport à sa prope variation quadratique $\langle M \rangle$.

L'existence d'un temps local pour le drap brownien $\{ W_z, z \in R^2_+ \}$ par rapport à sa variation quadratique a été demontré par Walsh[6] en utilisant les temps locaux à une dimension, de la façon suivante:

Si $L_1(x, s, t)$ est le temps local du mouvement brownien unidimensionel $\{ W_{st} , s \geqslant 0 \}$, on définit le temps local sur le plan comme:

$$L(x, s, t) = \int_0^t L_1(x,s,v)\, dv$$

Walsh démontre que le processus $\{ L (x, s, t), x \in R , (s,t) \in R^2_+ \}$ est continu dans les trois variables, continuement différentiable en s et t, et verifie presque partout : pour toute ϕ borélienne et bornée

$$\int_0^s \int_0^t \phi(W_{uv})\,du\,dv = \int_R \phi(x)\, L(x, s, t)\,dx.$$

Nous nous sommes demandés si c'est posible d'utiliser la même idée pour trouver le temps local pour des martingales à deux indices continues et de carré intégrable par rapport à sa variation quadratique.

Plus précisément, dans la deuxième partie on démontre pour des martingales continues et de carré intégrable, un théorème d'existence d'un temps local, $L(x, s, t)$, continu dans les trois variables, par rapport à la variation quadratique de la martingale, sous des hypothèses de continuité et dérivabilité des processus $\dfrac{d\langle M\rangle_z}{dz}$, $\dfrac{d\langle M_{s\cdot}\rangle_t}{dt}$, $\dfrac{d\langle M_{\cdot t}\rangle_s}{ds}$.

Cependant, on ne peux pas appliquer ce Théorème aux processus du genre

$$\int_{R_z}\int_{R_z} \psi(\xi, \xi')\, dW_\xi\, dW_{\xi'}$$

et en particulier aux processus $J_z = \int_{R_z}\int_{R_z} 1_D(\xi, \xi')\, dW_\xi\, dW_{\xi'}$

ou $D = \{(z, z') \in R^2_+ \ , \ z = (s, t), \quad z' = (s', t') \ / \ s \leqslant s', \ t \geqslant t'\}$.

Dans la troisième partie on fait une étude particulière pour le processus J_z qui nous permet d'obtenir son temps local, $L(x, s, t)$, continu dans les trois variables, par rapport à sa variation quadratique.

2. Temps local pour les martingales à deux indices.

Notations

On considère R^2_+ muni de l'ordre partiel usuel:

$$(s, t) \leq (s', t') \Longleftrightarrow s \leq s', \text{ et } t \leq t',$$

$$(s, t) < (s', t') \Longleftrightarrow s < s', \text{ et } t < t'.$$

En plus on définit

$$(s, t) \curlywedge (s', t') \Longleftrightarrow s \leq s', \text{ et } t \geq t'.$$

Si $z < z'$, on notera $]z, z']$ le rectangle $\{ x \in R^2_+ \ ; \ z < x \leq z' \}$.
En particulier, le rectangle $[0, z]$ sera indiqué par R_z.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet, et $\{ \mathcal{F}_z, z \in R^2_+ \}$ une famille de soustribus de $\mathcal{F}$ vérifiant les conditions habituelles (cf [2]):

F_1. $\mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}_{z'}$, si $z \leq z'$ (famille croissante)

F_2. $P(A) = 0$ entraîne $A \in \mathcal{F}_0$

F_3. $\bigcap_{z < z'} \mathcal{F}_{z'} = \mathcal{F}_z$ pour tout z dans R^2_+ (continuité à droite)

F_4. $\forall (s, t) \in R^2_+$, les tribus $\mathcal{F}_{s\infty} = \bigvee_{y \geq 0} \mathcal{F}_{sy}$ et $\mathcal{F}_{\infty t} = \bigvee_{x \geq 0} \mathcal{F}_{xt}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_{st}$.

On dira qu'un processus $\{M_z, z \in R^2_+\}$ intégrable et adapté à la filtration $\mathcal{F}_z$ est une martingale si pour tous $z \leq z'$ on a $E(M_{z'} / \mathcal{F}_z) = M_z$.

Pour établir le Théorème de décomposition de Doob-Meyer pour les martingales á deux indices et de carré integrable, on a besoin de la notion de martingale faible.On dira qu'un processus $\{ M_z, z \in R^2_+ \}$ intégrable et adapté a la filtration $\mathcal{F}_z$ est une martingale faible si $E(M(]z, z']) / \mathcal{F}_z) = 0$ pour tous $z < z'$. Rappelons que $M(]z, z']) = M_{z'} - M_{st'} - M_{s't} + M_z$ avec $z = (s,t)$ et $z' = (s', t')$.

La tribu prévisible $\mathcal{P}$ dans $R^2_+ \times \Omega$ est définie comme la tribu engendrée par les ensembles $]z,z'] \times H$ ou $z < z'$ et H appartien à $\mathcal{F}_z$. D'autre part, on dira qu'un processus $\{A_z, z \in R^2_+\}$ est un processus croissant s'il est continu à droite, adapté, $A_o = 0$, et vérifie $A(]z, z']) \geq 0$ pour tout rectangle $]z, z']$.

Si M est une martingale de carré intégrable, il existe un unique processus croissant, $< M >$, prévisible, nul sur les axes, appelé variation quadratique de M, tel que $M^2 - < M >$ est une martingale faible (cf [2], [3]).

Si M est une martingale de carré intégrable, pour tout $t \in R_+$, on notera par $< M_{.t} >_s$ la variation quadratique du processus à un indice $\{M_{st}, s \geq 0\}$. Également, pour tout $s \geq 0$, on définit $< M_{s.} >_t$.

On notera par $\{W_z, z \in R^2_+\}$ le drap brownien, c'est à dire, W sera un processus gaussian, centré, continu et avec covariance $E(W_{st} W_{s't'}) =$
$= (s \wedge s') (t \wedge t')$.

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant:

Théorème (2.1)

Soit $\{M_z, z \in R^2_+\}$ une martingale continue, de carré intégrable, nulle sur les axes et telle que:

a) $$< M >_z = \int_{R_z} g(u, v)\, du\, dv \quad \forall z \in R^2_+$$

ou $g(u, v, \omega)$ est un processus $\mathcal{B}(R^2_+) \times \mathcal{F}$ -mesurable, adapté, continu et avec dérivée en u continue en $(0, +\infty)^2$.

b) $$< M_{.t} >_s = \int_0^s f(u, t)\, du \quad \forall t > 0$$

où $f(u, t, \omega)$ est un processus $\mathcal{B}(R^2_+) \times \mathcal{F}$ - mesurable, adapté, continu, avec dérivée par rapport à u continue et tel que $f(u, t) > 0$ sur $(0, +\infty)^2$.

c) $$\langle M_{s.} \rangle_t = \int_0^t h(s, v)\, dv \quad \forall s > 0$$

ou $h(s, v, \omega)$ est un processus $\mathcal{B}(R^2_+) \times \mathcal{F}$ - mesurable et tel que

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E[|h(s,v)|^p] < \infty \quad \forall s, t \geq 0$$

pour quelque $p > 4$.

Alors: il existe un temps local $\{L(x, s, t),\ x \in R,\ (s, t) \in R^2_+\}$ de la martingale $\{M_z,\ z \in R^2_+\}$ par rapport à sa variation quadratique qui admet une version continue en $(R-\{0\}) \times R^2_+$.

Évidemment les conditions a, b et c peuvent être énoncées en échangeant les rôles de s et t.

Pour démontrer ce théorème on a besoin de quelques lemmes. Soit $\{M_z,\ z \in R^2_+\}$ une martingale continue et de carré intégrale; on peut considérer la famille de martingales continues à un indice $\{(M_{.t})_{s \geq 0},\ t \geq 0\}$ et leurs temps locaux $\{L_1(x, s, t),\ x \in R,\ s \geq 0,\ t \geq 0\}$.

Lemme (2.2)

Sous la condition c) du Théorème (2.1), il existe une version de $\{L_1(x, s, t),\ x \in R,\ s, t \geq 0\}$ continue en (x, s, t):

Démonstration

En utilisant le Théorème(1.1) de M. Yor [7] il suffit de démontrer qu'il existe un $p \in [1, \infty)$ et un $\lambda \in (0, 1]$ avec $\lambda p > 4$ tel que:

$$\| M_{.t} - M_{.t'} \|_{H_p} \leq C \| t - t' \|^\lambda ,$$

ou $||M||_{Hp}$ désigne $E[\sup_s |M_s|^p]^{1/p}$.

$\forall S, T \geq 0$, on considère $\{(M_{.t})_s, 0 \leq s \leq S, 0 \leq t \leq T\}$.
D'après la condition c) du Théorème (2.1), il existe un $\bar{p} > 4$ tel que

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E[|h(s, v)|^{\bar{p}}] < \infty \quad \forall s, t \geq 0.$$

Prenons $t \leq t'$, à cause des inégalités de Doob et Burkholder, on a,

$$|| M_{.t} - M_{.t'}||_{Hp} \leq C_p E[|M_{St} - M_{St'}|^p]^{1/p} \leq C_p ||(\int_t^{t'} h(S,v)dv)^{1/2}||_p$$

$$\leq C_p |t - t'|^{\frac{1}{2}} [\sup_{t \leq \tau \leq t'} E\{|h(S, \tau)|^{p/2}\}^{1/p}] \leq |t - t'|^{\frac{1}{2}} k^{1/p}$$, si on prend $p = 2\bar{p}$. □

Lemme (2.3)

Il existe un ensemble $N \in \mathcal{F}$, avec $P(N) = 0$, tel que pour tout $x \in R - \{0\}$ il existe une région d'arrêt $D_x \subset R^2_+$ qui vérifie,

1) $\overline{D_x^c}$ a une intersection vide avec les axes

2) $\forall \omega \in \Omega | N$ et $\forall (s, t) \in D_x(\omega)$ on a $L_1(x, s, t, \omega) = 0$.

Démonstration

$\forall x \in R - \{0\}$ on définit $D_x(\omega) = \{(s, t) \in R^2_+ \quad \sup_{z \in R_{st}} |M_z(\omega)| \leq \frac{|x|}{2}\}$.

La martingale est nulle sur les axes, ainsi donc $\overline{D_x^c}$ vérifie 1).

Soit $s, t \in R_+$ fixés. Notons $A_{st} = \{\omega ; (s, t) \in D_x(\omega)\}$.

Pour tout $\omega \in A_{st}$ nous avons

$$1_{\{M_{s't} > x\}}(\omega) = 0 \quad \forall s' \leq s \text{, si } x > 0,$$

$$1_{\{M_{s't} > x\}}(\omega) = 1 \quad \forall s' \leq s, \text{ si } x < 0,$$

et d'après la propriété de localisation de l'intégrale stochastique, si $\omega \notin N_{st}$ (avec $P(N_{st}) = 0$)

$$\left(\int_0^s 1_{\{M_{s't} > x\}} d_1 M_{s't}\right)(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ M_{st} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et par la formule de Tanaka, $L_1(x, s, t)(\omega) = 0$.

Il nous reste à prendre un ensemble mesurable et dense dans R^2_+, $\{(s_n, t_n), n \geq 1\}$, et definir $N_x = \bigcup_{n \geq 1} N_{s_n t_n}$.

Alors, si $\omega \notin N_x$ et $(s, t) \in D_x(\omega)$, $L_1(x, s, t)(\omega) = 0$; en plus si $x < x'$, $D_x(\omega) \subset D_{x'}(\omega)$. Alors il suffit de prendre $N = \bigcup_{q \in Q} N_q$ pour obtenir le résultat.

__Démonstration du Théorème (2.1)__

Soit $$L(x,s,t) = \int_0^t \frac{g(s,v)}{f(s,v)} L_1(x,s,t)\, dv - \int_0^t\int_0^s \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right) L_1(x,u,v)\, du\, dv \quad (2.1)$$

$L(x,s,t)$ est continu parce que les fonctions f,g, leurs dérivés par rapport à u, et L_1 le sont.

Notons que $\frac{g(s,v)}{f(s,v)} L_1(x,s,v)$ et $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right) L_1(x,u,v)$ sont intégrables sur $[0, T]$ et $[0, T] \times [0, S]$ respectivement, $\forall S,T > 0$ et $\forall x \neq 0$; en effet, $f(s,v)$ est strictement positive en $(0, +\infty)^2$ et pour le lemme (2.3) $L(x, s, v) = 0$ près des axes.

Pour établir que le processus $L(x,s,t)$ est un temps local de M par rapport à sa variation quadratique il nous faut verifier que pour toute fonction ϕ borélienne et bornée on a la relation suivante:

$$\int_R \int_0^t \frac{g(s,v)}{f(s,v)} L_1(x,s,v)\, \phi(x)\, dv\, dx$$
$$- \int_R \int_0^t \int_0^s \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g(u,v)}{f(u,v)}\right) L_1(x,u,v)\, \phi(x)\, du\, dv\, dx = \int_0^t \int_0^s \phi(M_{uv})\, d\langle M\rangle_{uv}.$$

Étant donné que $L_1(x, s, t)$ est un temps local du processus $\{ M_{st}, s \geq 0 \}$, le premier membre de cette égalité vaut

$$\int_0^t \frac{g(s,v)}{f(s,v)} \int_0^s \phi(M_{uv}) \, f \, (u,v) \, du \, dv$$

$$- \int_0^t \int_0^s \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g(u, v)}{f(u, v)} \right) \int_0^u \phi(M_{s'u}) \, f(s', u) \, ds' \, du \, dv$$

$$= \int_0^t \int_0^s \frac{g(u,v)}{f(u,v)} (M_{uv}) \, f(u, v) \, du \, dv = \int_0^t \int_0^s \phi(M_{uv}) d < M >_{uv},$$

ce qui nous permet de finir la démonstration.

Remarques

1) Avec des arguments de localisation on peut démontrer le Théorème (2.1) pour des martingales por les quelles le processus $h(s, t)$ est continu en plus des hypothèses a et b.

2) Pour des martingales fortes, étant donné que $< M>_z = < M_{.t} >_s = < M_{s.} >_t$, la conclusion du Théorème reste vraie si

$$< M >_z = \int_{R_z} g(u,v) \, du dv$$ ou $g(u, v)$ est $\mathcal{B}(R^2_+) \times \mathcal{F}$ - mesurable, adapté, continu, dérivable en u, avec dérivée conntinue et tel que $g(u, v) > 0$ sur $(0, +\infty)^2$.

3) Si M est une martingale brownienne de carré intégrable, nulle sur les axes, on a la représentation suivante:

$$M_z = \int_{R_z} \phi(z')\, d\, W_{z'} + \int_{R_z}\int_{R_z} \psi(z', z'')\, d\, W_{z'}\, d\, W_{z''} \quad \text{où}$$

$\{ W_z,\ z \in R^2_+\}$ est le drap brownien (cf [7]). Alors,

$$<M>_z = \int_{R_z} g(u, v)\, du\, dv \quad \text{où } g(u, v) = \phi^2(u, v) + \int_{R_{uv}} \psi^2(x, v; u, y) dx\, dy$$

$$\text{et } <M_{.t}>_s = \int_0^s f(x, t) dx \quad \text{où} \quad f(x, t) = \int_0^t (\, \phi\,(x,y) + \int_{R_{xt}} \psi\,(\zeta\,; x,y) dW_\zeta)^2 dy$$

Si $\psi \not\equiv 0$; c'est à dire si la martingale M n'est pas forte [2] , alors $f\,(s, t)$ ne sera pas dérivable à cause de l'intégrale stochastique qui apparaît dans sa définition.

Si $\psi \equiv 0$, la martingale est forte et on revient à la remarque 2).

3. Temps local du processus J_z

Soit $J_{st} = \int_{R_{st}}\int_{R_{st}} 1_D\,(\xi\,, \xi\,')\, dW_\xi\, dW_{\xi'}$. Les variations quadratiques du processus J_z à un et deux indices sont:

$$<J>_{st} = \frac{s^2t^2}{4}$$

$$< J_{.t} >_s = \int_0^s\int_0^t (\, W_{xt} - W_{xy})^2\, dy\, dx$$

$$\text{et} \quad < J_{s.} >_t = \int_0^t\int_0^s (\, W_{sy} - W_{xy})^2\, dx\, dy.$$

Notons que,

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E\,[\ |\int_0^s (\, W_{sv} - W_{xv})^2\, dx\ |^p] < \infty \quad \forall p \geq 1 \qquad \forall s,\ t \geq 0.$$

Comme on a déjà remarqué, le processus J_z ne vérifie pas les hypothèses du Théorème (2.1). Dans la définition (2.1) du temps local on utilise le terme $\frac{\partial}{\partial u}\,(\frac{g(u, v)}{f(u, v)})$ qui maintenant pourrait être interprété comme la différentielle d'une fonctionelle d'une semimartingale.

Cette idée va nous permettre d'appliquer une méthode semblable à celle de la deuxième partie pour construire le temps local de J_z.

Le processus $\{ f(u,v),\ u \geq 0 \}$ a la suivante décomposition de Doob-Meyer:

$$f(u,v) = M_{uv} + V_{uv}$$

avec $M_{uv} = \int_0^v [(W_{uv} - W_{u\tau})^2 - u(v - \tau)] d\tau$ (martingale) et $V_{uv} = \dfrac{uv^2}{2}$ (processus à variation bornée).

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous considérons une fonction de C^2, croissante, $\psi_\varepsilon : R \longrightarrow R$ telle que:

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon \quad \text{si} \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

$$\psi_\varepsilon(x) = x \quad \text{si} \quad |x| \geq 2\varepsilon$$

avec $|\psi_\varepsilon'| \leq 1$ et $|\psi_\varepsilon''| \leq 1$.

Soit $F(x,y) = \dfrac{x}{\psi_\varepsilon(y)}$ (3.1) ; F est une fonction continue et de classe C^2 en $(0, +\infty) \times R$. Si on applique la formule d'Itô en $[0, u]$ on obtient :

$$F(u, f(u,v)) = \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} = \int_0^u \frac{dx}{\psi_\varepsilon(f(x,v))}$$

$$- \int_0^u \frac{x}{\psi_\varepsilon(f(x,v))^2} \psi_\varepsilon'(f(x,v))\, d_1 f(x,v) + \int_0^u \frac{x}{\psi_\varepsilon(f(x,v))^3} \psi_\varepsilon'(f(x,v))^2 d< M_{.v} >_x$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^u x \frac{\psi_\varepsilon''(f(x,v))}{\psi_\varepsilon(f(x,v))^2} d < M_{.v} >_x .$$

On définit les approximations suivantes pour le candidat à temps local du processus J_z:

$$L_\varepsilon(x, s, t) = \int_0^t \frac{sv}{f(s,v)} L_1(x, s, v)\, dv - \int_0^t\int_0^s \frac{v}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} L_1(x, u, v)\, du\, dv$$

$$+ \int_0^t\int_0^s \frac{uv}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} \psi'_\varepsilon(f(u,v))\, L_1(x, u, v)\, d_1 M_{uv}\, dv$$

$$+ \int_0^t\int_0^s L_1(x, u, v) \frac{uv}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2} \psi'_\varepsilon(f(u,v)) \frac{v^2}{2}\, du\, dv$$

$$- \int_0^t\int_0^s L_1(x, u, v) \left[\frac{u\, v\, \psi'_\varepsilon(f(u,v))^2}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^3} - \frac{uv \quad \psi''_\varepsilon(f(u,v))}{2\ \psi_\varepsilon(f(u,v))^2} \right] .$$

$$. 4 \left(\int_0^v \int_0^v (W_{uv} - W_{u\tau})(W_{uv} - W_{u\tau'})(v - \tau \vee \tau')\, d\tau\, d\tau' \right) du dv,$$

oú $L_1(x, s, t)$ est le temps local du processus $\{ J_{st}, s \geqslant 0 \}$.

Soit alors $L(x, s, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(x, s, t) = \int_0^t \frac{sv}{f(s,v)} L_1(x, s,v) dv$

$$- \int_0^t\int_0^s \frac{v}{f(u,v)} L_1(x, u, v)\, du\, dv + \int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)\, d_1 M_{uv}\, dv$$

$$+ \int_0^t\int_0^s \frac{uv^3}{2f(u,v)^2} L_1(x, u, v)\, du\, dv$$

$$- \int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^3} L_1(x, u, v)\, 4 \int_0^v\int_0^v (W_{uv} - W_{u\tau})(W_{uv} - W_{u\tau'})(v - \tau \vee \tau')\, d\tau\, d\tau' \cdot du dv \tag{3.2}$$

$\forall x \neq 0$ et $\forall s,t \geqslant 0$.

Proposition (3.1)

Il existe une version continue du precessus $L(x, s, t)$ en $(R - \{0\}) \times R^2_+$.

Démonstration

A l'exception de l'intégrale stochastique $\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v) d_1 M_{uv}\, dv$, tous les termes du second membre de (3.2) sont des intégrales par trajectoires des processus continus et, en conséquence, ces termes sont continus.

Pour démontrer la continuité de $\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)\, d_1M_{uv}\, dv$ on utilise le critère de Kolmogorov.

Soit S, T, A > 0 fixes. $\forall s, s' \leq S, \quad t, t' \leq T, |x|, |x'| \leq A$ et $p>1$, nous avons:

$$E[\ |\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x,u,v)\, d_1 M_{uv}\, dv - \int_0^{t'}\int_0^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v) dM_{uv} dv|^{p}]$$

$$\leq C_p\ [\ E[\ |\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} (L_1(x,u,v) - L_1(x',u,v)) d_1M_{uv}\, dv\ |^{p}]$$

$$+ E[|\int_0^t\int_s^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v)\, d_1M_{uv}\, dv\ |^{p}]$$

$$+ E[|\int_t^{t'}\int_0^{s'} \frac{uv}{f(u,v)^2} L_1(x',u,v)\, d_1 M_{uv}\, dv\ |^{p}]\ ] \overset{(\text{déf})}{=} C_p(B_1+B_2+B_3)$$

a) Les inégalitées de Hölder, Doob et Burkholder montrent que:

$$B_1 \leq t^{2p-1}\int_0^t E[\sup_{s\in[0,S]} |\int_0^s \frac{u}{f(u,v)^2} [\ L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)\ ] dM_{uv}\ |^{p}]dv$$

$$\leq t^{2p-1}\int_0^t C_p\ E[\ |\int_0^S \frac{u}{f(u,v)^2} [\ L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)]\ d\, M_{uv}\ |^{p}]\ dv$$

$$\leq C_p\ t^{2p-1}\int_0^t E[\int_0^S \frac{u^2}{f(u,v)^4} [\ L_1(x,u,v)-L_1(x',u,v)\ ]^2 d\langle M_{.v}\rangle_u|^{p/2}]\ dv$$

et d'après Schwartz et Jensen :

$$B_1 \leq C(p,S,T)\ (E[\ |\int_0^S \frac{u^8}{f(u,v)^{16}} du\ |^{p/2}])^{1/4}\ .$$

$$.\ \sup_{s\in[0,S]} (E[\,|L_1(x,s,v) - L_1(x',s,v)|^{8p}]\ )^{1/8}.$$

$$\cdot \left(\int_0^S \int_0^v \int_0^v E\left[|(W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'})|^{2p}\right] (v-\tau\vee\tau')^{2p} d\tau d\tau' du \right)^{1/4}.$$

La variable aléatoire $\displaystyle\int_0^v \frac{(W_{uv} - W_{u\tau})^2}{u} d\tau$ a la même loi que $\displaystyle\int_0^1 W_{1\tau}^2 \, d\tau$, ainsi donc elle a des moments de tous les ordres, et par conséquent

$$\left(\int_0^S E\left[\left| \frac{u^{8p}}{f(u, v)^{16p}} du \right| \right] \right)^{1/8} \leqslant C_1(p , S).$$

D'autre part, le Théorème (3.2) de Barlow et Yor [1] montre que $\forall\, p \in (0, \infty)$, il existe une constante universelle k_p telle que pour tout couple de martingales continues (M, N) leurs temps locaux $L_t^a(M)$ et $L_t^a(N)$ vérifient:

$$\sup_{a \in R} \left\| \sup_{t \geqslant 0} |L_t^a(M)- L_t^a(N)| \right\|_{L^p} \leqslant k_p \, \|M-N\|_{H_p}^{1/2} \{ \|M\|_{H_p}^{1/2} + \|N\|_{H_p}^{1/2} \} .$$

En utilisant ce résultat en $a = 0$ avec $M = J_{sv} - x$ et $N = J_{sv} - x'$ on obtient:

$$\sup_{s \in [0,S]} (E \, | L_1(x,s,v) - L_1(x', s, v)|^{8p})^{1/8p} \leqslant C_2(p, A, T)|x-x'|^{p/2}.$$

Finalement:

$$\left(\int_0^S \int_0^v \int_0^v E\left[|(W_{uv}- W_{u\tau}) (W_{uv} - W_{u\tau'})|^{2p} \right] (v -\tau \vee \tau')^{2p} d\tau d\tau' du \right)^{1/4}$$

$$\leqslant C_3 (p, S, T) ;$$

ainsi donc $B_1 \leqslant K_1 (p, S, T, A) \, | x - x' |^{p/2}$.

b) Pour le terme B_2 on procède de la même façon que pour B_1, jusqu'à obtenir:

$$B_2 \leqslant C_p\, t^{2p-1} \left(E \left| \int_s^{s'} \frac{u^8}{f(u,v)^{16}} du \right|^{P/2}\right)^{1/4} |s - s'|^{P/8} .$$

$$. \sup_{v \in [0,T]} \left[\sup_{s \in [0,s']} E\left[\left| L_1 (x'\, s, v) \right|^{8p}\right] \right]^{1/8} .$$

$$. \sup_{v \in [0,T]} 4^{p/2} \left(\int_0^{s'}\int_0^{v}\int_0^{v} E\left[\left|(W_{uv} - W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'}) \right|^{2p}\right] (v-\tau\vee\tau')^{2p} d\tau\, d\tau' du\right)^{1/4}$$

Les inégalités démontrées au paragraphe a) entraînent que

$$E\left(\left| \int_s^{s'} \frac{u^{8p}}{f(u, v)^{16p}} du \right|^{P/2} \right)^{1/4} \leqslant C_4(p, S)\, | s' - s|^{p/8} ,$$

$$\sup_{v \in [0,T]} \left(\sup_{s \in [0, s']} E\left[|L_1(x', s, v)|^{8p} \right]\right)^{1/8} \leqslant C_5 (p, A, T) \quad \text{et}$$

$$\sup_{v \in [0,T]} 4^{p/2} \left(\int_s^{s'}\int_0^{v}\int_0^{v} E\left[\left|(W_{uv}-W_{u\tau})(W_{uv}-W_{u\tau'}) \right|^{2p}\right] (v-\tau\vee\tau')^{2p} d\tau d\tau' du\right)^{1/4}$$

$$\leqslant C_6 (p, T, S),$$

ce qui donne $B_2 \leqslant K_2(p, S, T, A)\, |s - s'|^{p/4}$

c) Finalement,

$$B_3 \leqslant |t-t'|^{p-1} \int_t^{t'} E\left[\left|\int_0^s \frac{uv}{f(u, v)^2} L_1(x', u, v)\, d_1 M_{uv} \right|^p \right] dx$$

$$\leqslant K_3 (p, S , T, A)\, |t - t'|^p . \square$$

__Thèorème (3.2)__

Le processus $L(x, s, t)$ est un temps local pour la martingale $(J_z)_{z \in R_+^2}$ par rapport à sa variation quadratique.

__Démonstration__

Soit ϕ une fonction borelienne et bornée. Alors, étant donné que

$L_1(x, s, t)$ est un temps local du processus $(J_{t.})_s$ on peut écrire:

$$\int_R L(x, s, t)\,\phi(x)\,dx = \int_0^t \frac{sv}{f(s, v)} \left(\int_0^s \phi(J_{xv})\, f(x, v)dx\right) dv$$

$$-\int_0^t\int_0^s \frac{v}{f(u,v)} \left(\int_0^u \phi(J_{xv})\, f(x,v)\,dx\right) du\,dv$$

$$+\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u,v)^2} \left(\int_0^u \phi(J_{xv})\, f(x,v)\,dx\right) d_1 M_{uv}\; dv$$

$$+\int_0^t\int_0^s \frac{uv^3}{2f(u,v)^2} \left(\int_0^u \phi(J_{xv})\, f(x,v)\,dx\right) du\,dv$$

$$-\int_0^t\int_0^s \frac{uv}{f(u, v)^3} \left(\int_0^u \phi(J_{xv})\, f(x, v)\,dx\right) d < M_{.v} >_u dv.$$

Considérons la fonction F qui a été définie en (3.1). Appliquons F à la semimartingale $(f(u,v))_{u \geq 0}$ et au processus de variation bornée $\left(u\int_0^u f(x, v)\phi(J_{xv})dx\right)_{u \geq 0}$.

La formule d'Itô en $[0, s]$ montre alors que:

$$\frac{s}{\psi_\varepsilon(f(s,v))} \int_0^s f(u,v)\;\phi(J_{uv})du = \int_0^s \frac{1}{\psi_\varepsilon(f(u,v))} \left(\int_0^u f(x,v)\;\phi(J_{xv})dx\right)du$$

$$+\int_0^s \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))}\; f(u,v)\;\phi(J_{uv})\,du$$

$$-\int_0^s \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^2}\,\psi'_\varepsilon(f(u,v))\left(\int_0^u \phi(J_{xv})\, f(x,v)dx\right) d_1 f(u,v)$$

$$+\int_0^s \frac{u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))^3}\;\psi'_\varepsilon(f(u,v))^2 \left(\int_0^u \phi(J_{xv}) f(x,v)\,dx\right)d < M_{.v} >_u$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^s \frac{2u}{\psi_\varepsilon(f(u,v))}\;\psi''_\varepsilon(f(u,v))\left(\int_0^u \phi(J_{xv})\, f(x, v)dx\right)d< M_{.v} >_u ;$$

En faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ nou trouvons:

$$\int_R L(x,s,t)\,\phi(x)\,dx = \int_0^t \int_0^s uv\,\phi(J_{uv})\,du\,dv\ . \square$$

<u>Références</u>

[1] M.T. Barlow, M. Yor, (Semi-)martingale inequalities and local times, Z.Wahrsch. Verw. Gebiete 55 (1981), 237-254.

[2] R. Cairoli, J. B. Walsh, Stochastic integrals in the plane, Acta Math. 134 (1975) 111-183.

[3] E. Merzbach, M. Zakai, Predictable and dual predictable projections for two-parameter stochastic processus, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 53 (1980) 263-269.

[4] D.Nualart, On the quadratic variation of two-parameter continuous martingales, Ann. Prob. 12 (1984) 445-457.

[5] D. Nualart, Une formule d'Itô pour les martingales continues à deux indices et quelques applications, Ann. Inst. Henri Poincaré, 20,nº 3 (1984) 251-275.

[6] J. B. Walsh "The local time of the Brownian Sheet, Astérisque 52-53 (1978) 47-61.

[7] E. Wong, M. Zakai, Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter , Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 29 (1974) 109-122.

[8] M. Yor, Sur la transformée de Hilbert des temps locaux Browniens, et une

extension de la formule d'Itô, Lectures Notes, 920, (1980-81) 238-247.

O. Julià

Departament d'Estadística

Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

Gran Via 585 08007 Barcelona

ESPAGNE

Reçu en Octobre 1985