ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

FRANÇOIS CHARLOT
BENAMAR CHOUAF
AHMED GUELLIL

Sur les méthodes de processus ponctuels et de renouvellement dans des systèmes de files d'attente. I- Sur la stabilité et la récurrence des chaînes de Markov et de systèmes de files d'attente

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 93, série *Probabilités et applications*, n° 8 (1989), p. 13-47
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1989__93_8_13_0>

SUR LES METHODES DE PROCESSUS PONTUELS ET DE RENOUVELLEMENT DANS DES SYSTEMES DE FILES D'ATTENTE

I - SUR LA STABILITE ET LA RECURRENCE DES CHAINES DE MARKOV ET DE SYSTEMES DE FILES D'ATTENTE

François CHARLOT - Benamar CHOUAF - Ahmed GUELLIL

SUMMARY

The aim of this paper is to introduce and use a form of recurrence in queueing systems. Due to link with coupling, the processes we study are called "Well Selfcoupled Processes" (PBACS). We use stationary point processes method, in particular for queuing systems with several services. This paper will be followed by another on weak convergence (CM1) and on periodicity (CM2).

INTRODUCTION

La méthode des processus ponctuels et en particulier la théorie de Palm est devenue un outil incontournable pour les études de stationnarité de systèmes de files d'attente où les lois d'entrée et de service sont générales. Ceci pour au moins deux raisons. D'abord parce que dans les systèmes simples le service est plus facile à étudier aux instants d'arrivée des clients et la théorie de Palm nous permet alors le passage du "temps discret" (les instants d'arrivée des clients) au temps réel. Ensuite parce que dans les systèmes plus complexes interviennent plusieurs processus d'entrée des clients dans les différents services et seule cette théorie nous permet alors de manipuler ces différents processus ensemble.

Nous étudions ici, dans le cadre de la stabilité des systèmes, une propriété de récurrence satisfaite par un bon nombre de systèmes de files d'attente. Il s'agit d'une propriété d'oubli de l'état initial du système, d'où une propriété de récurrence plus forte que la récurrence au sens de Harris dans le cas Markovien. A cause de ces liens évidents avec le couplage, nous avons appelé ces processus "processus bien autocouplés stables" (PBACS). Une étude de ce genre est faite dans un article de A.A.BOROVKOV (Bo2), mais notre point de vue est différent. Nous montrons au passage qu'une chaine de Markov ergodique sur un espace dénombrable peut être considérée comme un PBACS.

Un problème classique en Théorie des files d'attente est la convergence en loi des temps virtuels d'attente et du processus de queue. En s'appuyant sur un article de Dellasnerie M. nous étudierons dans la seconde partie de cette livraison, une méthode générale permettant d'étudier ce type de théorème pour un bon nombre de systèmes de files d'attente (CM1).

Enfin dans la troisième partie, nous appliquons la méthode des processus ponctuels à l'étude de files dont l'entrée est périodique (CM2).

1)Flots et mesure de Palm.

Un **flot** est un triplet $(\Omega,\mathcal{A},\Theta)$ où

-$(\Omega,\mathcal{A})$ est un espace de probabilisable;

-$\Theta = (\theta_t, t\in\mathbb{T})$, ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $= \mathbb{Z}$, est un groupe à un paramètre de bijections bimesurables de Ω.

-dans le cas $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, l'application de $\mathbb{R}\times\Omega$ dans Ω, $(t,\omega)\text{-->}\theta_t(\omega)$ est mesurable lorsque $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne.

Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, on pose $\theta = \theta_1$ et on a donc, pour $n>0$ $\theta_n = \theta^n$ et $\theta_{-n} = (\theta^{-1})^n = \theta^{-n}$.

Un quadruplet $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ est un **flot stationnaire** si $(\Omega,\mathcal{A},\Theta)$ est un flot et si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ invariante par Θ : $\forall t\in\mathbb{T}$ $\theta_t\mathbb{P} = \mathbb{P}$. Lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, il suffit bien sûr que $\mathbb{P}$ soit invariante par θ et alors $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\theta)$ est appelé système dynamique.

Un processus $(X_t, t\in\mathbb{T})$ défini sur le flot et à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ est dit $(\mathbb{P},\Theta)$-stationnaire (ou $(\mathbb{P},\theta)$-stationnaire dans le cas discret), ou plus simplement stationnaire quand il n'y aura pas d'ambiguité,si:

$$\forall(t,s)\in\mathbb{T}\times\mathbb{T} \quad X_t\theta_s=X_{t+s}.$$

Le flot stationnaire est **ergodique**, si la tribu des évènements invariants par Θ est triviale: pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$:

$$\{A/\forall t\in\mathbb{R}, \theta_t A=A\} = \{\emptyset,\Omega\} \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

et pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$:

$$\{A/\theta A=A\} = \{\emptyset,\Omega\} \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Une filtration du flot stationnaire est une suite $(\mathcal{A}_t, t\in\mathbb{T})$ croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$ telle que $\bigvee_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{A}_t = \mathcal{A}$. Le flot est un **K-système si** $\bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{A}_t = \{\emptyset,\Omega\}$ $\mathbb{P}$-p.s..Il est alors mélangeant, c'est à dire que $\forall X\in\mathbb{L}^2$ $\forall Y\in\mathbb{L}^2$, ou bien $\forall X\in\mathbb{L}^1$ $\forall Y\in\mathbb{L}^\infty$, $\lim_{t\to\pm\infty}\mathbb{E}(X\theta_t Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Un flot mélangeant est ergodique.

Les flots avec lesquels nous opèrerons sont donnés en exemples ci-aprés. Dans ces exemples F sera toujours un espace séparable complet et locallement compact et $\mathcal{F}$ sera sa tribu borélienne.

Premier exemple: Espaces produits.

On prend ici: $\Omega = (\mathbb{R}_+^* xF)^{\mathbb{Z}}$, la suite $((A_n,X_n),n\in\mathbb{Z})$ est la suite des projections de cet espace; $\mathcal{A} = (\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+^*}\otimes\mathcal{F})^{\otimes\mathbb{Z}} = \sigma\{A_n,X_n,n\in\mathbb{Z}\}$; θ est la translation sur Ω définie par: $\forall n\in\mathbb{Z}$ $A_n\theta = A_{n+1}$, $X_n\theta = X_{n+1}$; $\mathcal{A}_n = \sigma\{A_k,X_k,k\le n\}$. Si $\mathbb{P} = P^{\otimes\mathbb{Z}}$, où P est la loi de (A_0,X_0), le système dynamique $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\theta)$ est un K-système (schéma de Bernoulli).

Deuxième exemple: Les processus ponctuels marqués.

Les résultats sur les processus ponctuels peuvent être trouvés par exemple dans Ne2 dont nous suivons pour l'essentiel la présentation et les notations.

On note $M(\mathbb{T};F)$ (M quand il n'y aura pas d'ambiguité) l'espace des mesures μ sur $\mathbb{T}xF$ telles que pour tout compact K de $\mathbb{T}$, $\mu(KxF)<\infty$. $M_p(\mathbb{T};F)$ (M_p quand il n'y aura pas d'ambiguité) est l'espace des mesures ponctuelles sur $\mathbb{T}$ à marques dans F; il est constitué des mesures $\mu\in M$ de la forme $\mu = \sum_{n\in I}\varepsilon_{t_n}\otimes\varepsilon_{x_n}$ où $I \subseteq \mathbb{Z}$, $(t_n,n\in I)$ est une famille de points de $\mathbb{T}$ deux à deux distincts et sans points d'accumulation et $(x_n,n\in I)$ une famille de points de F.

$C(\mathbb{T};F)$ (ou C quand il n'y aura pas d'ambiguité) est l'ensemble des fonctions f continues et bornées sur $\mathbb{T}xF$ telles qu'il existe un compact K de $\mathbb{T}$ avec

$$\forall t\notin K\ \forall x\in F\ f(t,x) = 0.$$

$\mathcal{M}(\mathbb{T};F)$ est la plus petite σ-algèbre rendant mesurable les fonctions $\mu\text{-->}\mu f$ où f parcoure C (ou encore f parcoure l'ensemble des fonctions mesurables bornées de $\mathbb{T}xF$). $M_p\in\mathcal{M}$ et on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{T};F)$ (ou $\mathcal{M}_p$ quand il n'y a pas d'ambiguité) la trace de $\mathcal{M}$ sur M_p.

On notera $(\tau_t, t\in\mathbb{T})$ (plutot que $(\theta_t, t\in\mathbb{T})$ qui servira pour un usage plus général) le groupe des applications de M dans M défini par:

$$\forall\mu\in M\ \forall f\in C\ \forall(x,y)\in\mathbb{T}xF\ \int\tau_t\mu(dx\times dy)f(x,y) = \int\mu(dx\times dy)f(x-t,y).$$

Si $\mu\in M_p$, $\mu = \sum_{n\in I}\varepsilon_{t_n}\otimes\varepsilon_{x_n}$ alors $\tau_t\mu = \sum_{n\in I}\varepsilon_{t_n-t}\otimes\varepsilon_{x_n}$.

Que $(M,\mathcal{M},(\tau_t,t\in\mathbb{T}))$ et $(M_p,\mathcal{M}_p,(\tau_t,t\in\mathbb{T}))$ soient des flots est démontré dans Ne1.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\Theta)$ un flot. N est une **"mesure aléatoire sur $\mathbb{T}$ à marques dans F"** (ou un **"processus ponctuel sur $\mathbb{T}$ à marques dans F"**) si N est une fonction mesurable de $(\Omega,\mathcal{A})$ dans $(M(\mathbb{T},F),\mathcal{M}(\mathbb{T},F))$ (respectivement $(M_p(\mathbb{T};F),\mathcal{M}_p(\mathbb{T};F))$ telle que:

$$\forall t\in\mathbb{T}\quad N\theta_t = \tau_t N$$

c'est à dire que

$$\forall f\in C\quad \int_{\mathbb{T}xF}N(\theta_t\omega,dx\times dy)f(x,y) = \int_{\mathbb{T}xF}N(\omega,dx\times dy)f(x-t,y)$$

Si $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ est un flot stationnaire, N est une **"mesure aléatoire stationnaire sur $\mathbb{T}$ à marques dans F"** (respectivement **"processus ponctuel stationnaire sur $\mathbb{T}$ à marques dans F"**).

Si le flot est ergodique, l'évènement

$\{N(\mathbb{T}_+ xF)=N(\mathbb{T}_- xF)=+\infty\} = \emptyset$ ou $= \Omega$ $\mathbb{P}$-p.s.. On ne considèrera donc que des mesures aléatoires stationnaires N telles que $N(\mathbb{T}_+ xF) = N(\mathbb{T}_- xF) = \infty$ $\mathbb{P}$-p.s.. Dans le cas d'un processus ponctuel, on dit qu'on a un processus ponctuel doublement infini. N s'écrit alors:

$$N = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{T_n}\otimes\varepsilon_{X_n}$$

où $(T_n, n\in\mathbb{Z})$ est une suite strictement croissante de variables aléatoires $\mathbb{P}$-p.s. définies, à valeurs dans $\mathbb{T}$, $\mathbb{P}$-p.s. telle que $\lim_{n\to\pm\infty} T_n = \pm\infty$, et $(X_n, n\in\mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans F. Par convention la suite $(T_n, n\in\mathbb{Z})$ est indexée de façon que $T_0 \le 0 < T_1$.

On pose $\hat{\Omega} = \{N(.,\{0\}xF)=0\} = \{T_0=0\}$. Pour tout n de $\mathbb{Z}$, θ_{T_n} est une application de Ω dans $\hat{\Omega}$. Pour tout couple (n,m) d'entiers on a:

$$\theta_{T_n}\theta_{T_m} = \theta_{T_{n+m}}$$

$$T_n\theta_{T_m} + T_m = T_{n+m}$$

$$X_n\theta_{T_m} = X_{n+m}.$$

On note alors $\hat{\theta}$ la restriction de θ_{T_1} à $\hat{\Omega}$, $\hat{\mathcal{A}}$ la restriction de $\mathcal{A}$ à $\hat{\Omega}$. $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{A}},(\hat{\theta}^n, n\in\mathbb{Z}))$ est un flot.

Soit N une mesure aléatoire stationnaire sur le flot $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$. Pour tout borélien B de $\mathbb{T}$, on a:

$\mathbb{E}(N(BxF)) = i_N\lambda(B)$, où λ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$ ou la mesure de comptage de $\mathbb{Z}$ et i_N est l'"intensité de la mesure aléatoire N", $0 < i_N \le \infty$.

Il existe sur $(\Omega,\mathcal{A})$ une mesure σ-finie $\hat{P}$, appelée **mesure de Palm de N,** telle que pour toute fonction mesurable positive f de $\Omega x\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}$

$$\int_{\Omega}\mathbb{P}(d\omega)\int_{\mathbb{T}}N(\omega,dt\times F)f(\theta_t\omega,t) = \int_{\Omega}\hat{P}(d\omega)\int_{\mathbb{T}}\lambda(dt)f(\omega,t)$$

où λ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$ ou la mesure de comptage de $\mathbb{Z}$.

On a $\hat{P}(\Omega) = i_N$. Si $i_N<\infty$ on introduit alors la probabilité de Palm $\hat{\mathbb{P}} = \hat{P}/i_N$.

On remarque bien sur que la mesure de Palm de N est celle de sa "marginale" sur $\mathbb{T}$: B--->N(BxF).

Si N est un processus ponctuel stationnaire $\hat{P}$ est portée par $\hat{\Omega}$ et est invariante par $\hat{\theta}$. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\hat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(./T_0=0)$. Posons $A_n = T_n-T_{n-1}$, pour tout n de $\mathbb{Z}$. Comme $A_n= A_0\theta_{T_n}$ et $X_n = X_0\theta_{T_n}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ A_n et X_n peuvent être considérées comme définies sur $\hat{\Omega}$. Les suites $(A_n,n\in\mathbb{Z})$ et $(X_n,n\in\mathbb{Z})$ sont $(\hat{\theta},\hat{\mathbb{P}})$-stationnaires. Ce modèle-ci "contient" donc le modèle précédent. Nous allons maintenant voir une réciproque.

Troisième exemple: Flot sous une fonction.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\theta)$ le système dynamique de l'exemple un. On écrit A pour A_1. On suppose que $\mathbb{E}(A)<\infty$ et que le sous-groupe additif fermé engendré par la loi de A est $\mathbb{T}$.

$$\tilde{\Omega} = \{(\omega,t)/(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{T};0\le t<A(\omega)\},$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ est la trace de la tribu $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ sur $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{\mathbb{P}}$ est définie sur $\tilde{\mathcal{A}}$ par:

$$\forall\tilde{B}\in\tilde{\mathcal{A}}\quad \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{B}) = \mathbb{P}\times\lambda(\tilde{B})/\mathbb{E}(A).$$

On pose

$$\tilde{T}_1(\omega,t) = A_1(\omega)-t,$$

$$\tilde{T}_0(\omega,t) = -t$$

et pour $k\ge1$,

$$\tilde{T}_k(\omega,t) = \Sigma_{i=1}^{i=k}A_i(\omega)-t$$

$$\tilde{T}_{-k}(\omega,t) = -t-\Sigma_{i=-k+1}^{i=0}A_i(\omega).$$

On pose enfin, pour tout $s\in\mathbb{T}$ tel que $\tilde{T}_k(\tilde{\omega})\leq t<\tilde{T}_{k+1}(\tilde{\omega})$ $(\tilde{\omega} = (\omega,t))$

$$\tilde{\theta}_s(\omega,t) = (\theta_k\omega, t+s-T_k(\omega)).$$

$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathbb{P}},\tilde{\Theta})$ est alors un flot stationnaire et $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{\tilde{T}_n}\otimes\varepsilon_{X_n}$ est un processus ponctuel marqué stationnaire sur ce flot dont l'espace de Palm est $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\theta)$. $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathbb{P}},\tilde{\Theta})$ est ergodique si et seulement si $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\theta)$ l'est. Si $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\theta)$ est un K-système et si $\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}'_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ $\mathbb{P}$-p.s., où $\mathcal{A}'_0 = \sigma(A_n,X_n,n\geq1)$, alors $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathbb{P}},\tilde{\Theta})$ est un K-système (B1); (on remarquera qu'avec les hypothèses faites, la loi de A est apériodique sur $\mathbb{T}$).

2)PROCESSUS BIEN AUTOCOUPLES.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ un flot stationnaire ergodique muni d'une filtration $(\mathcal{A}_t, t\in\mathbb{T})$.

Définition 21

Soit $(E,\mathcal{E})$ *un espace mesurable et* X *une application de* $E\times\mathbb{T}_+\times\Omega$ *dans* E. X *est un* **Processus** *si:*

(i) X *est* $\mathcal{E}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{T}_+}\otimes\mathcal{A}/\mathcal{E}$ *mesurable*

(ii) pour tout x *de* E *et pour tout* t *de* $\mathbb{T}$:

$$X^x(t):\omega\text{--->}X(x,t,\omega) \text{ est } \mathcal{A}_t/\mathcal{E}\text{-mesurable}$$

(iii) pour tout x *de* E *et pour tout* ω *de* Ω, $X(x,0,\omega) = x$

Un processus X *est un* **Processus Bien Autocouplé** *(PBAC) si de plus:*

(iv) pour tout couple (x,y) *d'éléments de* E *il existe un temps d'arret* T^{xy} *par rapport à la filtration*

$(\sigma\{X^v(s), 0\leq s\leq t, v\in E\}, t\in\mathbb{T}_+)$, $\mathbb{P}$-p.s. *fini, tel que pour tout* $t\geq T^{xy}$ *et pour presque tout* ω *élément de* Ω,

$$X(x,t,\omega) = X(y,t,\omega).$$

Un processus X *bien autocouplé est dit* **fort** *(PBACF), si il existe* $\Omega'\in\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$, *tel que:*

$$\forall(x,y) \in E\text{x}E,\ \forall\omega \in \Omega',\ T^{xy}(\omega) < +\infty$$

On écrira suivant l'opportunité $X^x(t,\omega)$ *pour* $X(x,t,\omega)$, $X^x(t)$ *pour* $X(x,t,.)$ *et* X^x *pour* $X(x,.,.)$.

Remarque: La propriété (iv) est une propriété pour le processus d'oubli de son origine. Cet oubli est réalisé $\mathbb{P}$-p.s. en un temps fini.

Le processus à valeurs dans $(E^2,\mathcal{E}^{\otimes 2})$, (X^x,X^y), est un couplage. S'il possède la propriété (iv), c'est un bon couplage au sens où il atteint la diagonale de E.

Définition 22

Un processus X *sera dit* **stable** *si il existe une variable aléatoire* $\mathcal{X}$ *à valeurs dans* $(E,\mathcal{E})$ *telle que:*

(i) $\mathcal{X}$ *est* $\mathcal{A}_0$*-mesurable*

(ii) $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $X(\mathcal{X},t,.) = \mathcal{X}\theta_t$

Un processus X *bien autocouplé et stable sera dit un* PBACS *si de plus:*

(iii) Pour tout x *de* E *il existe un* $(\mathcal{A}_t,t\in\mathbb{T})$*-temps d'arret* $\mathbb{P}$*-p.s. fini* $T^{x\mathcal{X}}$ *tel que pour presque tout* ω *et pour tout* $t\geq T^{x\mathcal{X}}$, $X(x,t,\omega) = \mathcal{X}(\theta_t\omega)$.

Un processus bien autocouplé et stable sera dit **fort** *(PBACSF) si il existe un évènement* $\Omega' \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$, *tel que:*

$$\forall(x,y) \in E\times E,\ \forall\omega \in \Omega',\ T^{xy}(\omega) < +\infty \text{ et } T^{x\mathcal{X}}(\omega) < +\infty$$

$\mathcal{X}$ ou $(\mathcal{X}\theta_t, t\in\mathbb{T})$ est appelé le régime stationnaire du processus X.

Remarques:

1)Dans le cas où X^x est une chaine de Markov, la propriété 21(iv) et la propriété 22(ii) impliquent 22(iii). Dans ce cas le processus X^x est récurrent au sens de Harris. Dans un certain nombre de problèmes de Files d'Attente, la démonstration de la récurrence au sens de Harris passe en fait par la démonstration de propriété de PBACS.

2)*Si* X *est un PBACS,* $\mathcal{X}$ est l'unique variable aléatoire $\mathcal{A}_0$-mesurable satisfaisant la définition 22. Il y a unicité du régime stationnaire.

Le théorème suivant est le théorème d'Orey dans le cas markovien.

<u>Théorème</u> <u>23</u>

Soit X *un PBACS,* $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}_t^x$ *les lois sur* $(E^{\mathbb{T}_+},\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}_+})$ *de* $(\mathcal{X}\theta_s, s\in\mathbb{T})$ *et de* $(X^x(t+s), s\in\mathbb{T})$. *Alors, pour tout* x *de* E

$$\lim_{t\to+\infty} \| \mathbb{Q}_t^x - \mathbb{Q} \| = 0$$

où $\|\ \|$ *désigne la norme de la variation totale des mesures bornées.*

Démonstration

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des fonctions de $E^{\mathbb{T}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}_+}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$-mesurables, uniformément bornées de norme uniforme inférieure ou égale à 1. On a:

$$\|\mathbb{Q}_t^x-\mathbb{Q}\| = 2\sup\{|\mathbb{E}(h(X^x(t+s),s\geq 0)) - \mathbb{E}(h(\mathcal{X}\theta_s,s\geq 0))| \ , \ h\in\mathcal{O}\ \}$$

$$\leq 2\mathbb{E}[\mathrm{esssup}\{|h(X^x(t+s),s\geq 0) - h(\mathcal{X}\theta_{t+s},s\geq 0)| \ , \ h\in\mathcal{O}\ \}]$$

$$= 2\mathbb{E}[\mathrm{esssup}\{|h(X^x(t+s),s\geq 0) - h(\mathcal{X}\theta_{t+s},s\geq 0)|1_{\{T^{x\mathcal{X}}\geq t\}} \ , \ h\in\mathcal{O}\ \}$$

$$\leq 4\mathbb{P}(T^{x\mathcal{X}}\geq t).$$

D'où le résultat. ∎

Les études d'intégrabilité de ces temps $T^{x\mathcal{X}}$ donnent des vitesses de convergence de $\mathbb{Q}_t^x$ vers $\mathbb{Q}$. C'est ce qui a été fait dans Cha2 pour certains modèles de file d'attente. On retrouve ainsi, pour ces cas particulier des resultats de Pittmann (Pi).

3)Application aux Chaines de Markov

$(F,\mathcal{F},P)$ est ici un espace de probabilité, $\Omega = F^{\otimes\mathbb{Z}}$, $\mathcal{A} = \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{Z}}$, $\mathbb{P} = P^{\otimes\mathbb{Z}}$, $(Y_n,n\in\mathbb{Z})$ est la famille des applications coordonnées de Ω, θ la "translation" de Ω: $\forall n\in\mathbb{Z}\ \ Y_n\theta = Y_{n+1}$, et $(\mathcal{A}_n,n\in\mathbb{Z})$ est la filtration: $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_k,k\leq n)$.

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable et H une application de ExF dans E, $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}/\mathcal{E}$-mesurable. On définit un processus $X = (X_n^x,n\in\mathbb{N},x\in E)$ par:

- $X_0^x = x$
- $X_{n+1}^x = H(X_n^x,Y_{n+1})$ pour $n\geq 1$.

Pour tout x élément de E, $(X_n^x\ n\geq 0)$ est une chaine de Markov par rapport aux $(\mathcal{A}_n,n\geq 0)$, d'état initial x, homogène de transition $p(x,A) = \mathbb{E}(1_A(H(x,Y))$ où $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$ et Y représente l'un quelconque des Y_n.

<u>Théorème 31</u>

Si:

1) X est récurrente positive au sens de Harris.

2) X est un processus bien autocouplé.

Alors X est un PBACS.

Démonstration

Soit d la distance de la topologie discrète de E: $\forall(x,y)\in E\times E$, $d(x,y) = 1$, si $x \neq y$, $d(x,x) = 0$.

Soient x et y deux éléments de E, k et n deux entiers positifs. On a:

$$d(X_n^x\theta_{-n}, X_{n+k}^x\theta_{-n-k}) = d(X_n^x, X_n(X_k^x\theta_{-k}, .))o\theta_{-n} ,$$

et donc

$$\mathbb{E}(d(X_n^x\theta_{-n}, X_{n+k}^x\theta_{-n-k})) = \int_E p_k(x,dy)d(X_n^x, X_n^y)$$

Soit μ la probabilité invariante de la chaine. Alors, $\| \ \|$ et $\mathcal{O}$ étant comme dans la démonstration du Théorème 23:

$$\begin{aligned}\|\mu-p_k(x,.)\| &= 2\sup\{|\int_E h(y)\mu(dy) - \int_E p_k(x,dy)h(y)|,\ h\in\mathcal{O}\ \} \\ &\leq 2\sup\{\int_E \mu(dy)|\mathbb{E}(h(X_k^y)-\mathbb{E}(h(X_k^x)|,\ h\in\mathcal{O}\ \} \\ &\leq 4\int_E \mu(dy)\mathbb{P}(T^{xy}\geq k)\end{aligned}$$

où $T^{xy} = \inf(n/n\geq 1,\ X_n^x=X_n^y)$ est bien sûr mesurable en y. Cette dernière intégrale tend vers 0 quand k tend vers l'infini par l'hypothèse de PBAC et par convergence dominée. Alors comme:

$$\mathbb{E}(d(X_n^x\theta_{-n}, X_{n+k}^x\theta_{-n-k})) \leq \|\mu-p_k(x,.)\| + \int_E \mu(dy)\mathbb{E}(d(X_n^x, X_n^y)),$$

on a facilement que $\sup\{\mathbb{E}(d(X_n^x\theta_{-n}, X_{n+k}^x\theta_{-n-k})),\ k\geq 0\}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. $X_n^x\theta_{-n}$ est donc une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité et donc converge en probabilté vers une variable aléatoire $\mathcal{A}_0$-mesurable $\mathcal{X}$.

Commme $\quad X^x_{n+1}\theta_{-n-1}\theta = H(X^x_n\theta_{-n}, Y_1)$

On a $\quad \mathcal{X}\theta = H(\mathcal{X}, Y_1)$

et donc $\quad X^{\mathcal{X}}_n = \mathcal{X}\theta_n$.

Soit $y \in E$ et soit

$$T^{y\mathcal{X}} = \inf(n/n\geq 1, X^y_n = \mathcal{X}\theta_n);$$

on a

$$\mathbb{P}(T^{y\mathcal{X}}>n) = \int_E \mu(dz)\mathbb{P}(T^{yz}>n)$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $\mathbb{P}(T^{y\mathcal{X}}<+\infty) = 1$ ce qui achève la démonstration. ■

Ce théorème montre donc que, sous l'hypothèse pour X d'être un PBAC il est équivalent de démontrer la stabilité ou la récurrence positive. En fait, dans les cas connus de nous, c'est la stabilité qui se démontre naturellement le plus facilement.

Nous allons voir maintenant que, si E est un espace dénombrable, toute chaine récurrente positive et apériodique sur E peut être representée comme un PBACSF.

Soit donc E un espace dénombrable (et donc $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$) et p une transition de probabilité sur E. Soit: $F = E^E$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes E}$, $P = \prod_{x\in E} p(x,.)$. Soit H l'application de ExF dans E définie par: $H(e,f) = f(e)$; H est bien sûr $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}/\mathcal{E}$-mesurable. Soit: $\Omega = F^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{A} = \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{Z}}$, $\mathbb{P} = P^{\otimes\mathbb{Z}}$, $(Y_n, n\in\mathbb{Z})$ les coordonnées de Ω, $(\mathcal{A}_n, n\in\mathbb{Z})$ la filtration $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_k, k\leq n)$ et θ la translation des coordonnées de Ω. Soit:

$$X^x_0 = x$$

$$X^x_{n+1} = H(X^x_n, Y_{n+1}) \text{ pour } n\geq 0.$$

$X = (X_n^x, n\geq 0, x\in E)$ est alors une chaine de Markov par rapport aux $(\mathcal{A}_n, n\geq 0)$, à valeurs dans E, homogène de transition p. Ce modèle permet de comparer des trajectoires issues de deux points initiaux différents.

Théorème 32

Soit p une transition récurrente positive et apériodique. La chaine X construite ci-dessus est un PBACSF.

Démonstration

Considérons la chaine bivariée $((X_n^x, X_n^y), n\geq 0)$ d'état initial (x,y). Lorsque cette chaine atteint la diagonale de ExE elle y reste. La transition de cette chaine est : $q((r,s);(t,u)) = p(r,t)p(s,u)$ si $r\neq s$, $q((r,r);(t,u)) = 0$ si $t\neq u$ et $q((r,r);(t,t)) = p(r,t)$. Soit q' la transition sur ExE definie par: $q'((r,s);(t,u)) = p(r,t)p(s,u)$ pour tous les couples (r,s) et (t,u) d'éléments de ExE. q' est la transition d'un couple de chaines indépendantes chacune de transition p. q' est récurrente positive et apériodique parce que p l'est (Pi) et donc la diagonale de ExE est presque surement atteinte. Il en est donc de même de la chaine $((X_n^x X_n^y), n\geq 0)$ qui se comporte comme la chaine de transition q' jusqu'au moment où elle atteint la diagonale. La chaine X est donc un PBACS d'aprés le thèoreme 31. La propriété forte tient au fait que l'espace est dénombrable. ∎

4)FILES D'ATTENTE.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$, où $\Theta = (\theta_t, t\in\mathbb{R})$, un flot réel et $N = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{T_n}\otimes\varepsilon_{Y_n}$ un processus ponctuel marqué stationnaire doublement infini à marques dans F. Les T_n représentent les instants d'arrivée des clients dans un système de Files d'Attente et Y_n tout ce qui concerne le client arrivé à l'instant T_n vis à vis du système de Files d'Attente. On pose $A_n = T_n - T_{n-1}$. Pour tout nombre réel t, soit $\mathcal{A}_t = \sigma\{N(]u,v]\times G), u<v\le t, G\in\mathcal{F})\}$ et pour tout entier n, $\hat{\mathcal{A}}_n = \sigma\{A_k, Y_k, k\le n\}$. Nous supposerons que $(\mathcal{A}_t, t\in\mathbb{R})$ est une filtration pour $(\Omega,\mathcal{A},\Theta)$ et $(\hat{\mathcal{A}}_n, n\in\mathbb{Z})$ une filtration pour $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{A}},\hat{\theta})$.

Un système de Files d'Attente est souvent entièrement décrit par un processus $W = (W^x(t), t\in\mathbb{R}_+, x\in E)$ à valeurs dans un espace "numérique" E que nous préciserons sur chaque exemple. $W^x(t)$ représentera le plus souvent la charge des serveurs à l'instant t-0, t≥0, lorsque la charge du serveur à l'instant 0^- est x. On dira aussi que $W^x(t)$ est l'état du système à l'instant t. W^x: $t \dashrightarrow W^x(t)$ sera toujours continue à gauche et limitée à droite. Les points de discontinuité de W^x sont les T_n et, lorsqu' il y a plusieurs stations, les sorties d'une station correspondant aux entrées dans une autre station. Comme précédemment W désigne le processus $(W^x, x\in E)$ et nous écrirons suivant l'opportunité $W^x(t)$, $W^x(t,\omega)$, $W(x,t)$, $W(x,t,\omega)$.

Nous avons à faire aussi classiquement au vecteur d'entiers "nombre de clients dans chacune des stations". Nous noterons $Q(x,k,t,\omega)$ ce vecteur, x et k étant respectivement la charge du service et le nombre de clients à l'instant 0^-. Sauf cas particuliers (extrèmement important pour bien des applications!) où les lois d'entrées et de services sont indépendantes et exponentielles (ou plus généralement des lois de Cox par l'introduction d'"états fictifs"), $Q(x,k,t,\omega)$ n'est pas un "vecteur d'état", c'est-à-dire qu'il est insuffisant pour décrire le système de Files d'Attente. Nous étudions donc le couple $(W(x,t,\omega),Q(x,k,t,\omega))$. Nous écrirons aussi $Q^{x,k}$, $Q^{x,k}(t)$, $Q(x,k,t)$, $Q(x,k,t,\omega)$.

Si $s\in\mathbb{R}$ et $t\in\mathbb{R}_+$, $W(x,t,\theta_s\omega)$ représente l'état du système à l'instant t+s-0 lorsque le système était dans l'état x à l'instant s-0. Remarquer que, ici, s peut être négatif. Nous aurons alors, pour tout couple (s,t) de nombres réels positifs:

$$W(x,t+s,\omega) = W(W(x,s,\omega),t,\theta_s\omega).$$

Nous aurons de même:

$$Q(x,k,t+s,\omega) = Q(W(x,s,\omega),Q(x,k,s,\omega),t,\theta_s(\omega)).$$

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in E$, on notera $\hat{W}_n^x$ l'état du système à l'instant T_n-0 lorsque le système était dans l'état x à l'instant T_0-0: $\hat{W}_n^x(\omega) = W(x,T_n\theta_{T_0}(\omega),\theta_{T_0}(\omega))$. On écrira bien sûr suivant l'opportunité $\hat{W}_n^x(\omega)$ ou $\hat{W}_n(x,\omega)$ et on a, pour tout couple (n,m) d'entiers naturels:

$$\hat{W}_{n+m}(x,\omega) = \hat{W}_n(\hat{W}_m(x,\omega),\hat{\theta}^m(\omega))$$

cette dernière écriture étant licite puisque les $\hat{W}_n$ sont définis sur $\hat{\Omega}$.

Nous supposerons toujours que $0<\hat{P}(\Omega)<\infty$ (et alors $\hat{\mathbb{E}}(A_1) = 1/\hat{P}(\Omega) < \infty$) et que le flot $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ est ergodique.

Le système de Files d'Attente possède un régime stationnaire s'il existe une variable aléatoire W,

$\hat{\mathcal{A}}_0$-mesurable telle que le processus $(W(\mathcal{W}(\omega),t,\omega),t\in\mathbb{R}_+)$ soit Θ-stationnaire et donc que, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $W(\mathcal{W}(\omega),t,\omega) = \mathcal{W}(\theta_t\omega)$, que nous écrirons $\mathcal{W}(t)$. Dans ce cas bien sûr, il existe une variable aléatoire $\mathcal{A}_0$-mesurable $\mathcal{Q}$ telle que $Q(\mathcal{W}(\omega),\mathcal{Q}(\omega),t,\omega) = \mathcal{Q}(\theta_t(\omega))$ que nous écrirons aussi $\mathcal{Q}(t)$.

Ceci équivaut à dire qu'il existe une variable aléatoire $\hat{\mathcal{W}}$ définie sur $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{A}},\hat{\mathbb{P}})$, $\hat{\mathbb{P}}$-p.s. finie et à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$, $\hat{\mathcal{A}}_0$-mesurable telle que le processus $(\hat{W}_n(\hat{\mathcal{W}}(\omega),\omega),n\geq 0)$ soit $\hat{\theta}$-stationnaire c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\hat{W}_n(\hat{\mathcal{W}}(\omega),\omega) = \hat{\mathcal{W}}(\hat{\theta}^n\omega)$ que l'on notera aussi $\hat{\mathcal{W}}_n(\omega)$.

Evidemment $\mathcal{W}(t)$ et $\mathcal{Q}(t)$ sont définis pour des $t<0$ et $\hat{\mathcal{W}}_n$ est défini pour des $n<0$.

Quand il existe, le régime stationnaire n'est pas forcément unique (Lo). Nous verrons suivant les cas des conditions necessaires pour qu'il y ait unicité. Dans un certain nombre de cas "simples" (une seule station avec un, plusieurs, ou une infinité de serveurs, un serveur avec impatience...) l' application:

$$(x,k) \dashrightarrow (W(x,t,\omega),Q(x,k,t,\omega))$$

est croissante et continue à gauche. $W(0,t,\theta_{-t}(\omega))$ et $Q(0,0,t,\theta_{-t}(\omega))$ sont alors croissantes en t. On a:

$$\mathcal{W}(\omega) = \lim_t W(0,t,\theta_{-t}(\omega)) \text{ et } \mathcal{Q}(\omega) = \lim_t Q(0,0,t,\theta_{-t}(\omega))$$

qui sont alors le plus petit régime stationnaire du système de Files d'Attente. Il en est bien sûr de même de $\hat{W}_n(x,\omega)$ et alors $\hat{\mathcal{W}}(\omega) = \lim_n \hat{W}_n(0,\hat{\theta}^{-n}(\omega))$ est le plus petit régime stationnaire de W (Lo, Ne(2), Cha(1), Cho).

5)Systèmes pouvant être décrits par des équations de Neveu.

Comme au paragraphe 4, $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ est un flot réel et $N = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{T_n}\otimes\varepsilon_{Y_n}$ un processus ponctuel marqué à marques dans F. On suppose d'abord ici que $F=\mathbb{R}_+$ et que $Y_n=B_n$, avec $\hat{\mathbb{E}}(B)<\infty$. $(D(t),t\in\mathbb{R})$ est un processus Θ-stationnaire, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $D(0)\in\mathcal{A}_0$ et $\mathbb{E}(D(0))<\infty$. On pose $M = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}B_n\varepsilon_{T_n}$.

Théorème de Neveu (Ne2)

Si $i_M = \hat{\mathbb{E}}(B)/\hat{\mathbb{E}}(A) < \mathbb{E}(D)$, *il existe une unique solution* Θ*-stationnaire à l'équation*

$$(1)\quad dW(t) + D(t)1_{\{W(t)>0\}}dt = dM(t)$$

qui signifie que pour a *et* b *réels,* $a < b$,

$$W(b)-W(a) + \int_a^b D(t)1_{\{W(t)>0\}}dt = M([a,b[).$$

5A)Files G/G/1.

Considérons l'équation

$$(2)\quad \begin{cases} dX(t) + 1_{\{X(t)>0\}}dt = dM(t) \text{ pour } t\geq 0 \\ X(0) = x \in\mathbb{R}_+ \end{cases}$$

L' équation (2) a bien sûr une solution unique que nous noterons $(W^x(t),t\geq 0)$. Elle équivaut à:

$$(3)\quad \begin{cases} X(t) = (X(T_n)+B_n-(t-T_n))_+ \ , \ n\geq 1,\ T_n<t\leq T_{n+1} \\ X(t) = (x-t)_+,\ 0\leq t\leq T_1 \end{cases}$$

On note donc $(\hat{W}^x_n,n\geq 0)$ le processus défini par

$$(4)\quad \begin{cases} \hat{W}^x_{n+1} = (\hat{W}^x_n+B_n-A_{n+1})_+ \\ \hat{W}^x_0 = x \end{cases}$$

D'apres le théorème de Neveu, si $i_M < 1$, il existe une variable aléatoire $\mathcal{A}_0$-mesurable et $\mathbb{P}$-p.s. finie $\mathcal{W}$ telle que : $\forall t\geq 0$, $W(\mathcal{W},t) = \mathcal{W}\theta_t = \mathcal{W}(t)$, et donc il existe une variable aléatoire $\hat{\mathcal{A}}_0$-mesurable et $\hat{\mathbb{P}}$-p.s. finie $\hat{\mathcal{W}}_0$ telle que : $\forall n\geq 0$, $\hat{W}_n(\hat{\mathcal{W}}_0,.) = \hat{\mathcal{W}}_0\hat{\theta}^n = \hat{\mathcal{W}}_n$.

On a bien sur $\hat{\mathcal{W}}_n = \mathcal{W}(T_n)$ et

(5) $\mathbb{P}(\mathcal{W}(0)=0) = 1-i_M$

Toujours sous la même hypothèse $i_M <1$,

(6) $S^x = \inf(n/n\geq 1, \hat{W}^x_n=0)$

et (7) $S = \inf(n/n\geq 1, \hat{\mathcal{W}}_n=0)$

sont des $(\hat{\mathcal{A}}_n, n\geq 0)$ temps d'arret $\hat{\mathbb{P}}$-p.s. surement finis. Alors comme $\hat{W}^x_n$ est croissant en x:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \forall y\in\mathbb{R}_+,\ \forall n\geq S^x \vee S^y,\ \hat{W}^x_n = \hat{W}^y_n$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \forall n\geq S^x \vee S,\ \hat{W}^x_n = \hat{\mathcal{W}}_n.$$

Par la propriété de croissance de W^x_n en x $S^x \leq S^y$ si $x \leq y$ et donc si $\Omega' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{S^n<+\infty\}\cap\{S<+\infty\}$:

$$\forall (x,y) \in E\times E,\ \forall\omega \in \Omega',\ S^x \vee S^y < +\infty \text{ et } S^x \vee S < +\infty$$

On peut faire la même construction avec les processus $(W^x(t), t\geq 0, x\in\mathbb{R}_+)$ et $(\mathcal{W}(t), t\in\mathbb{R})$.

La suite $(S_n, n\in\mathbb{Z})$ est la suite des instants successifs de passage du processus $(\hat{\mathcal{W}}_n, n\in\mathbb{Z})$ en 0, $S_1 = S$.

Notons, pour $n\in\mathbb{Z}$, $U_n = T_n+\hat{\mathcal{W}}_n+B_n$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$ $U^x_n = T_n+W(x,T_n)+B_n$ qui représentent les instants de sortie des clients en régime stationnaire et transitoire. Bien sûr, pour $n\geq S\vee S^{x-T_0}$, $U^x_n = U_n$. $D = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{U_n}$ est un processus ponctuel stationnaire. Comme

$$U_{n+1}-U_n = A_{n+1} + \hat{\mathcal{W}}_{n+1}-\hat{\mathcal{W}}_n + B_{n+1}-B_n$$

et que

$$\hat{W}_n - \hat{W}_{n+1} = \hat{W}_n \wedge (A_{n+1} - B_n)$$

alors $U_{n+1} - U_n \in \mathbb{L}^1(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbb{P}})$. L'intensité de D est alors $i_D = 1/\hat{\mathbb{E}}(A)$, (Ne2). Notons alors pour $t \geq T_{S_n}$

$$Q(t) = N([T_{S_n}, t[xF) - D([T_{S_n}\ t[)$$

le nombre de clients en régime stationnaire. Notons

$$Q^{x,k}(t) = k + N([0,t[xF) - D^x([0,t[)$$

le nombre de client dans le système à l'instant t-0 en régime transitoire, k étant le nombre de clients à l'instant 0^- devant être servis en un temps x. $(Q(t), t \in \mathbb{R})$ est bien sur un processus stationnaire et pour $t \geq 0$, $Q(t) = Q^{W, Q(0)}(t)$.

Par ailleurs, pour $t \geq T_S x - T_0$,

$$Q^{x,k}(t) = N([T_S x - T_0,\ t[) - D^x([T_S x - T_0, t[).$$

Conformément aux notations précédentes, on note:

$$(W,Q) = \quad ((W^x(t), Q^{x,k}(t)), t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{N})$$

et $\qquad \hat{W} = (W_n^x\ n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}_+)$

Pour résumer:

Théorème 5.1

Sous l'hypothèse $\hat{\mathbb{E}}(B) < \hat{\mathbb{E}}(A)$, *les processus définis plus haut* (W,Q) *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \Theta)$ *et* $\hat{W}$ *sur* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbb{P}}, \hat{\theta})$ *sont des PBACSF.*

5B) Files G/G/1 en tandems

Prenons ici $F = (\mathbb{R}_+^*)^p$, $Y_n = (B_n^1, \dots, B_n^p)$, B_n^q étant le service réclamé par le client arrivé à l'instant T_n dans le q-ième service. On pose, pour q, $1 \leq q \leq p$, $i_q = \hat{\mathbb{E}}(B^q)/\hat{\mathbb{E}}(A)$ et on suppose que pour tout q, $1 \leq q \leq p$, $i_q < 1$. Les clients sont servis successivement par chacun des p serveurs. On pose $M^1 = \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} B_n^1 \varepsilon_{T_n}$

et $W^1 = W^{1x^1}(t), t\geq 0, x^1 \in \mathbb{R}_+)$, $\mathcal{W}^1 = (\mathcal{W}^1(t), t\in\mathbb{R})$.
$\hat{W}^1 = (\hat{W}_n^{1x^1}, n\in\mathbb{N}, x^1\in\mathbb{R}_+)$ $(\hat{\mathcal{W}}_n^1, n\in\mathbb{Z})$ sont définis par rapport à M^1 comme précédemment. Soit pour $n\in\mathbb{Z}$,

$$U_n^1 = T_n + \hat{\mathcal{W}}_n^1 + B_n^1 \ , \ D^1 = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} B_n^2 \varepsilon_{U_n^1}$$

et pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$U_n^{1x^1} = T_n + W^{1x^1}(T_n) + B_n^1 \ , \ D^{1x^1} = \Sigma_{n\in\mathbb{N}^*} B_n^2 \varepsilon_{U_n^{1x^1}}.$$

On construit $W^2 = (W^{2x^1x^2}(t), t\in\mathbb{R}_+, (x^1,x^2)\in\mathbb{R}_+^2)$ et $(\mathcal{W}^2(t), t\in\mathbb{R})$ par:

$$\begin{cases} W^{2x^1x^2}(0) = x^2 \\ dW^{2x^1x^2}(t) + 1_{\{W^{2x^1x^2}(t) > 0\}}dt = dD^{1x^1}(t), \ t\geq 0 \end{cases}$$

$$d\mathcal{W}^2(t) + 1_{\{\mathcal{W}^2(t)>0\}}dt = dD^1(t), \ t\in\mathbb{R}$$

$\mathcal{W}^2(0)$ est bien sur le régime stationnaire de $W^{2x^1x^2}$. On définit de même par étape $D^{2x^1x^2}$, D^2, $W^{3x^1x^2x^3}$, $\mathcal{W}^3$ $\ldots D^{q-1x^1\ldots x^{q-1}}$, D^{q-1}, $W^{qx^1\ldots\ldots x^q}$, $\mathcal{W}^q$ pour tout $q\leq p$. On défini également comme plus haut les processus $Q^{1x^1,k^1}, \ldots,$ $Q^{qx^1..x^q\,k^1..k^q}$ pour $q\leq p$, $(x^1,\ldots,x^p) \in \mathbb{R}_+^p$ et $(k^1,\ldots,k^p) \in \mathbb{N}^p$, et leur régime stationnaire $\mathcal{Q}^1,\ldots,\mathcal{Q}^p$.

Soit N le premier instant où $U_n^{x^1} = U_n$. Au delà de l'instant T_N, les processus $W^{2x^1x^2}(t)$ et $\mathcal{W}^2(t)$ sont définis par les même variables et donc le raisonnement fait pour les G/G/1 s'applique à la seconde file d'attente. Il existe donc un instant V tel que $\mathbb{P}(V < \infty) = 1$ tel que $\forall t\geq V$ $W^{2x^1x^2}(t) = \mathcal{W}^2(t)$. Evidemment on peut recommencer étapes par étapes sur chacune des files. On a donc en notant (W,Q) les processus vectoriels à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}_+^p$ et $\mathbb{N}^p$ dont les composantes sont respectivement les $W^{qx^1..x^q}$ et les $Q^{qx^1..x^qk^1..k^q}$ définis ci-dessus:

Théorème 5.2

Si pour tout q, $1 \le q \le p$, $i_q < 1$, *alors le processus* (W,Q) *définis sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \Theta)$ *est un PBACSF.*

Remarque: Ce Théorème peut être regardé comme une généralisation d'un résultat de Numelin (Nu).

5C Files avec plusieurs classes de clients.

Ici $F = \{1,\ldots,p\} \times (\mathbb{R}_+^*)^p$, $Y_n = (K_n, B_n^1, \ldots, B_n^p)$ $K_n \in \{1,\ldots,p\}$ répresentant la classe du client arrivé à l'instant T_n, et, si $K_n = k$, B_n^k représente le travail demandé par le client. Un client de classe k est prioritaire sur un client de classe l si k<l. M_k est la mesure aléatoire stationnaire d'intensité i_k définie par: $M_k = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} B_n^k . 1_{\{K_n=k\}} \varepsilon_{T_n}$. On suppose que $\Sigma_{k=1}^{k=p} i_k < 1$ et on construit par étapes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \Theta)$, le processus à valeurs dans $\mathbb{R}_+^p$, $((W^1(t),\ldots,W^p(t)), t\in\mathbb{R})$ de la façon suivante: les W^k pour $1 \le k \le p$ sont les solutions stationnaires, définies pas à pas, des équations (Ne2) :

$$dW^1(t) + 1_{\{W^1(t)>0\}} dt = dM_1(t)$$

et pour k, $2 \le k \le p$

$$dW^k(t) + 1_{\{W^1(t)=0,\ldots,W^{k-1}(t)=0\}} 1_{\{W^k(t)>0\}} dt = dM_k(t).$$

Il est connu que $\mathbb{P}(W^1(t)=0) = 1-i_1$. Comme $W^1+\ldots+W^k$ est la solution stationnaire de l'équation:

$$dZ(t) + 1_{\{Z(t)>0\}} dt = d(M_1+\ldots+M_k)(t)$$

alors:

$$\mathbb{P}(W^1(t)=0,\ldots,W^2(t)=0) = \mathbb{P}(W^1(t)+\ldots+W^k(t)=0) = 1-(i_1+\ldots+i_k),$$

et le théorème de Neveu assure bien l'existence de la solution à la k-ième étape.

Notons aussi pour $(x^1,\dots,x^p) \in \mathbb{R}_+^p$:

$$W^{1x^1}(0) = x^1$$

$$dW^{1x^1}(t) + 1_{\{W^{1x^1}(t)>0\}}dt = dM_1(t), \quad t\geq 0$$

et pour k, $2\leq k\leq p$

$$W^{kx^1\dots x^k}(0) = x^k$$

$$dW^{kx^1..x^k}(t) + 1_{\{W^{1x^1}(t)=0,\dots,W^{k-1x^1\dots x^{k-1}}(t)=0\}}1_{\{W^{kx^1..x^k}>0\}}dt$$
$$= dM_k(t), \quad t\geq 0.$$

Soit Y^y et $\mathcal{Y}$ définis par:

$$\begin{cases} Y^y(0) = y \\ dY^y(t) + 1_{\{Y^y(t)>0\}}dt = d(\sum_{i=1}^{i=p}M_i(t)) \quad \text{pour } t\geq 0 \end{cases}$$

$$d\mathcal{Y}(t) + 1_{\{\mathcal{Y}(t)>0\}}dt = d(\sum_{i=1}^{i=p}M_i(t)) \quad \text{pour } t\in\mathbb{R}$$

On a bien sur $\mathcal{Y} = \mathcal{W}^1+\dots+\mathcal{W}^p$, et si $y = x^1+\dots+x^p$, $Y^y = W^{1x^1}+\dots+W^{px^1\dots x^p}$

Si

$$U^y = \inf(t>0/Y^y(t)=0)$$

$$U = \inf(t>0/\mathcal{Y}(t)=0)$$

alors pour $t\geq U^y \vee U$, on a bien:

$$\forall k,\ 1\leq k\leq p,\ W^{kx^1\dots x^k}(t) = \mathcal{W}(t)$$

Alors en notant $W = (W^{kx^1\dots x^k}(t), 1\leq k\leq p, (x^1,..x^p)\in\mathbb{R}_+^p, t\in\mathbb{R}_+)$ et Q le vecteur de $\mathbb{N}^p$ donnant le nombre de clients par classe, on a:

<u>Théorème</u> <u>53</u>

Si $\Sigma_{k=1}^{k=p}\ i_k < 1$, *le processus* (W,Q) *défini sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ *est un PBACSF.*

6) Files à plusieurs serveurs.

6A) Files G/G/q.

Ici $F = \mathbb{R}_+^*$, $Y_n = B_n$ est le temps de service réclamé par le client arrivé à l'instant T_n dans un service composé de q serveurs identiques. Il y a une seule file d'attente et le client se dirige vers le premier serveur libre, c'est-à-dire celui qui est le moins chargé quand il arrive. Ces files ont été étudiées, entre autre, dans Bo, CHG, Cho, KW.

On note $\mathbf{S} = \{s=(s^1,..,s^q)\in\mathbb{R}^q/0\leq s^1\leq..\leq s^q\}$ et R l'application de $\mathbb{R}^q$ dans lui-même qui réordonne les coordonnées, c'est-à-dire que pour x dans $\mathbb{R}^q$:

$$(Rx)^1\leq(Rx)^2\leq\ldots\leq(Rx)^q.$$

Les charges des serveurs sont ordonnées par ordre croissant. $\hat{W}_n^s$ est la charge du service à l'instant T_n-0 lorsque la charge du service à l'instant T_0-0 est $s\in\mathbf{S}$. La règle de service étant "premier arrivé premier servi" la première coordonnée de $\hat{W}_n^s$, soit $\hat{W}_n^{s,1}$, est le temps d'attente du client arrivé à l'instant T_n. On a donc:

$$(8)\ \begin{cases} \hat{W}_0^s = s \\ \hat{W}_{n+1}^s = R(\hat{W}_n^s + B_n\bar{e} - A_{n+1}\bar{i})_+ \text{ pour } n\geq 0 \end{cases}$$

où $\bar{e} = (1,0,\ldots,0)$, $\bar{i} = (1,1,\ldots,1)$ et $x_+ = \max(x,0)$.

On pose aussi:

$$(9)\ \begin{cases} W^s(0) = s, \text{ où } s\in\mathbf{S} \\ W^s(t) = R(W_n^s + B_n\bar{e} - (t-T_n\bar{i}))_+, \text{ où } T_n<t\leq T_{n+1} \end{cases}$$

$W^s(t)$ représente donc la charge du service à l'instant t-0 lorsque le système a commencé avec une charge s à l'instant 0^-. On demontre que (Bo, Lo, Cho, Cha1):

Théorème 61

Si $\hat{\mathbb{E}}(B) < q\hat{\mathbb{E}}(A)$ *il existe un régime stationnaire. En général ce régime stationnaire n'est pas unique.*

Puisqu'il n'y a pas unicité du régime stationnaire les processus définis par les équations (8) et (9) ne sont pas des PABCS. Nous donnons deux conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Hypothèse α : *Pour tout* C *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{A_i, B_{i-1}, i\le 0\}$ *et pour tout* D *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{A_i, B_{i-1}, i\ge 1\}$, *si* $\hat{\mathbb{P}}(C) > 0$ *et* $\hat{\mathbb{P}}(D) > 0$, *alors* $\hat{\mathbb{P}}(C\cap D) > 0$.

Hypothèse β: *Pour tout* C *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{A_i, i\in\mathbb{Z}\}$, *pour tout* D *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{B_i, i\le 0\}$ *et pour tout* E *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{B_i, i\ge 1\}$, *si* $\hat{\mathbb{P}}(C) > 0$, $\hat{\mathbb{P}}(D) > 0$ *et* $\hat{\mathbb{P}}(E) > 0$ *alors* $\hat{\mathbb{P}}(C\cap D\cap E) > 0$.

La condition α est réalisée en particulier si la suite $(A_n, B_{n-1}, n\in\mathbb{Z})$ est une suite de variables indépendantes et la condition β si la suite $(B_n, n\in\mathbb{Z})$ est une suite de variables indépendantes, indépendantes des $(A_n, n\in\mathbb{Z})$. Cette dernière hypothèse est la plus naturelle. Elle nous sera utile en particulier dans l'étude des files périodiques. Notons:

$$\hat{W} = (\hat{W}_n^s, n\in\mathbb{N}, s\in\mathbb{S}).$$

Théorème 64

Si $\hat{\mathbb{E}}(B)/\hat{\mathbb{E}}(A) < q$ *et sous l'hypothèse* α *ou l'hypothèse* β, *alors* $\hat{W}$ *est un PABCSF sur* $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{A}},\hat{\mathbb{P}},\hat{\theta})$.

Démonstration.

Pour l'étude sous l'hypothèse α, nous renvoyons à (Cho). La méthode est une simple extension de celle utilisée dans (CHG) qui systématisait elle-même (KW). Nous faisons donc la démonstration sous l'hypothèse β.

a)Soit

$$b = \sup(t\in\mathbb{R}/\hat{\mathbb{P}}(B_0\geq t)=1)$$

et b' et b" tels que:

$$b < b' < b''$$
$$\hat{\mathbb{P}}(b'\leq B_0\leq b'') > 0$$
$$b'' < q\hat{\mathbb{E}}(A_0)$$

b' et b" existent sauf peut-être si $\hat{\mathbb{P}}(B_0=b) > 0$, ce qui simplifierait la démonstration ci-dessous (prendre dans ce cas b = b' = b").

Soit $z\in S$, $z \leq b'\bar{e}$ et soit D_N l'évènement

$$D_N = \{\hat{W}_0\leq b'\bar{e}\}\cap\{b'\leq B_1\leq b'';\ \forall i, 1\leq i\leq Nq-1, B_i\leq B_{i+1}\leq b'';\ b'+Nb''-\Sigma_{i=1}^{i=Nq}A_i\leq 0\}$$

Si $\hat{\mathbb{P}}(\hat{W}_0\leq b'\bar{e}) > 0$ et si N est assez grand, $\hat{\mathbb{P}}(D_N) > 0$. Sur D_N les coordonnées de $\hat{W}^z_{Nq}$ sont:

$$(z^j + \Sigma_{p=0}^{p=N-1}B_{pq+j} - \Sigma_{i=1}^{i=Nq}A_i)\vee\max(\Sigma_{p=k}^{p=N-1}B_{pq+j} - \Sigma_{i=kq+j}^{i=Nq}A_i,\ 0\leq k\leq N)$$

pour j, $1\leq j\leq q$. Ces égalités se démontrent en remarquant que sur D_N le passage de n à n+1 s'opère par une permuttation circulaire des coordonnées; exactement sur D_N:

$$\hat{W}^{z,k}_{n+1} = (\hat{W}^{z,k+1}_n - A_{n+1})_+ \text{ pour } 1\leq k\leq q-1, \text{ et } \hat{W}^{z,q}_{n+1} = (\hat{W}^{z,1}_n + B_n - A_{n+1})_+.$$

On remarque que:

$$D_N \subset \{\forall z\leq b'\bar{e},\ \forall n\geq N,\ \hat{W}^z_n = \hat{W}^0_n\}$$

b) Soit $s\in\mathbb{R}_+$ et

$$\tau = \inf(k/k\geq 1,\ s + (1+[\tfrac{k}{q}])b' - \Sigma_{i=1}^{i=k} A_i \leq 0\}$$

(où [x] est la partie entière de x) c'est-à-dire que si

$\tau = k = pq+l$, $0\leq l<q$, $\forall(p',l')$, $0\leq p'<p$, $0\leq l'<q$,

$$s + (p'+1)b' - \Sigma_{i=1}^{i=p'q+l'} A_i > 0$$
$$s + (p+1)b' - \Sigma_{i=1}^{i=pq+l-1} A_i > 0$$
$$s + (p+1)b' - \Sigma_{i=1}^{i=pq+l} A_i \leq 0.$$

Bien sur $\hat{\mathbb{P}}(\tau<+\infty) = 1$ puisque $b' < q\hat{\mathbb{E}}(A_0)$.

Si s est assez grand, il existe un entier K tel que si

$$F_K = \{\hat{W}_0\leq s\bar{e}\}\cap\{\tau=K\}\cap\{B_i\leq b',\forall i\ 1\leq i\leq K\},$$
$$\hat{\mathbb{P}}(F_K) > 0.$$

Sur F_K

$$\hat{W}^{s\bar{e}}_{K-1} \leq (s + (1+[\tfrac{K-1}{q}])b' - \Sigma_{i=1}^{i=K-1} A_i)\bar{e}, \text{ et donc}$$
$$\hat{W}^{s\bar{e},q}_K \leq (s + (1+[\tfrac{K-1}{q}])b' - \Sigma_{i=1}^{i=K} A_i + b')_+ \leq b'$$

par définition de τ.

Comme l'évènement $\theta^{-n}(F_K)$ est presque surement réalisé une infinité de fois, $\hat{W}_n$ passe presque surement une infinité de fois sous $b'\bar{e}$, et donc $\hat{\mathbb{P}}(\hat{W}_0\leq b'\bar{e}) > 0$.

c) Mais l'évènement $G = F_K\cap\theta^{-K}(D_N)$ est de probabilité strictement positive et donc $\theta^{-n}(G)$ est réalisé une infinité de fois. Ce qui signifie qu'il existe une variable aléatoire $\hat{\mathbb{P}}$-presque surement définie T telle que pour tout $n \geq T$ $\hat{W}_n = \hat{W}^0_n$.

Si $t\in S$, $t \leq \hat{W}_0$, alors pour $n \geq T(\omega)$ on a aussi $\hat{W}^t_n(\omega) = \hat{W}^0_n(\omega) = \hat{W}_n$.

Supposons $\hat{W}_0$ non bornée. Pour tout t de S, il existe un n tel que $\hat{W}_{-n} = \hat{W}_0 o\theta^{-n} \geq t$. Et donc $\hat{W}^t_k o\theta^{-n} \leq \hat{W}_{k-n}$ passe presque surement une infinité de fois sous b', et donc aussi

$\hat{W}^t_k$. Mais alors on peut recommencer la démonstration faite pour $\hat{W}_n$ en remarquant que l'évènement

$\{\hat{W}^t_n \le b'\bar{e}\} \cap \{b' \le B_{n+1} \le b"; \forall i \ n+1 \le i \le n+Nq-1 \ B_i \le B_{i+1} \le b"; b'+Nb"-\Sigma_{n+1}^{n+Nq} A_i \le 0\}$

se réalise une infinité de fois. On a alors l'existence d'un entier aléatoire T tel que pour tout $n \ge T$ $\hat{W}^t_n = \hat{W}_n = \hat{W}^0_n$.

Si $\hat{W}_0$ est borné, on remplace les variables B_n par $\underline{B}_n = B_n + B'_n$, où les $(B'_n, n\in\mathbb{Z})$ sont des variables indépendantes équidistribuées positives, indépendantes des $(A_n, n\in\mathbb{Z})$ et des $(B_n, n\in\mathbb{Z})$ et telles que $\hat{\mathbb{E}}(B_0+B'_0)<q\hat{\mathbb{E}}(A_0)$, $\hat{\mathbb{P}}(B'_0=0)>0$ et B'_0 non essentiellement bornée. Soit $\hat{\underline{W}}_n$ le processus construit avec les A_n et les $\underline{B}_n$. On a $\hat{W}_n \le \hat{\underline{W}}_n$ pour tout n et $\hat{\underline{W}}_0$ est non-essentiellement bornée. Il suffit de recommencer la démonstration précédente avec $\hat{\underline{W}}_n$ pour voir que $\hat{\underline{W}}_n = \hat{W}^0_n$ presque-surement une infinité de fois et donc la démonstration est achevée, la propriété forte étant du, comme pour les files à un serveur, à la croissance de W^s_n en s ∎

Soit, toujours sous l'hypothèse β $(Q(t), t\in\mathbb{R})$ le processus stationnaire donnant le nombre des clients dans la file à l'instant t-0.

$$Q(0) = \lim_{t\to+\infty} Q(0,0,t,\theta_{-t})$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \Sigma_{n\le 0} 1_{[-t,0[}(T_n) - \Sigma_{n\le 0} 1_{[-t,0[}(T_n + W(0,T_n+t,\theta_{-t}) + B_n)$$

$Q(t)$ récurre en $j = \inf(n: \hat{\mathbb{P}}(Q(0)=n) > 0)$. On a $0 \le j < q$. En effet, si $j \ge q$, tous les serveurs sont toujours occupés ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\hat{\mathbb{E}}(B_0) < q\hat{\mathbb{E}}(A_1)$. On pose:

$$(W,Q) = ((W^s(t), Q^{s,n}(t)), t\in\mathbb{R}_+, s\in\mathbf{S}, n\in\mathbb{N})$$

Corollaire 65

Sous les hypotheses du théorème 64, le processus (W,Q), *est un PBACSF sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$.

On remarque que le processus des sorties

$$\mathcal{D} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{T_n+\hat{W}^1_n+B_n}$$

est un processus ponctuel stationnaire dont l'intensité est $1/\hat{\mathbb{E}}(A)$. En effet on voit facilement que $-A_1 \le \hat{W}^1_1-\hat{W}^1_0 \le B_0$, et on en déduit donc que $T_{n+1}+\hat{W}_{n+1}+B_n-(T_n+\hat{W}_n+B_{n-1}) \in \mathbb{L}^1(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{A}},\hat{\mathbb{P}})$ d'où le résultat (confère Ne2).

6B)Files G/G/q en tandems.

On a ici p stations de services à plusieurs serveurs, la i-ème station ayant q_i serveurs, $q_i\in\mathbb{N}$. Chaque service pris individuellement est décrit comme au paragraphe précédent. Chaque client passe successivement dans chacun des services dans l'ordre naturel des services. Ici donc: $F = (\mathbb{R}^*_+)^p$, $Y_n = (B^1_n,..,B^p_n)$, B^j_n étant le service réclamé par le client arrivé à l'instant T_n à la j-ème station. On suppose que, pour tout j, $1\le j\le p$, $\hat{\mathbb{E}}(B^j)<q_j\hat{\mathbb{E}}(A)$.

On définit comme en 6A, $\mathbf{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^{q_1},..,$ $\mathbf{S}_p \subseteq \mathbb{R}^{q_p}$. $({}^1W^{s^1}(t),t\in\mathbb{R}_+,s^1\in\mathbf{S}_1)$ et $({}^1W(t),t\in\mathbb{R})$ sont les processus définis en 6A pour la première station. Comme en 5B soit $U^{1s^1}_n = T_n+{}^1\hat{W}^{s^1}_n+B^1_n$, $D^{1s^1} = \Sigma_{n\ge1}\varepsilon_{U^{1s^1}_n}$, $U^1_n = T_n+\hat{W}^1_n+B^1_n$, $\mathcal{D}^1= \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{U^1_n}$ et ${}^2\hat{W}^{s^1s^2}_n$ le processus à q_2 composantes défini à partir des temps $U^{1s^1}_n$ d'entrée dans la seconde station et des temps de service

B_n^2. Il faut remarquer que , bien sûr, les temps $U_n^{1s^1}$ ainsi que les temps U_n^1 ne sont pas ordonnés par ordre croissant des indices et que on n'a pas forcemment $U_0^1 \leq 0$. Du fait de l'hypothèse et de ce que l'intensité du processus $\mathcal{D}^1$ est $1/\hat{\mathbb{E}}(A)$ on peut trouver un régime stationnaire $({}^2W(t), t\in\mathbb{R})$ pour la seconde station. En recommençant sur chacune des stations, on voit qu'il existe un régime stationnaire pour le système tout entier. Nous noterons:

$$W^s(t) = ({}^1W^{s^1}(t), {}^2W^{s^1s^2}(t), \ldots, {}^pW^{s^1s^2..s^p})$$

$$Q^{s,k}(t) = ({}^1Q^{s^1,k^1}(t), {}^2Q^{s^1s^2,k^2}(t), \ldots, {}^pQ^{s^1..s^p,k^p}(t))$$

où $s = (s^1, s^2, \ldots, s^p) \in \prod_{i=1}^{i=p} S_i$ et $k = (k^1, k^2, \ldots, k^p) \in \mathbb{N}^p$, la charge du service et le nombre de clients dans chaque station en régime transitoire et:

$$W(t) = ({}^1W(t), {}^2W(t), \ldots, {}^pW(t))$$

$$Q(t) = ({}^1Q(t), {}^2Q(t), \ldots, {}^pQ(t))$$

le régime stationnaire de ces processus.

Pour avoir la propriété de PBACS il nous faut comme en 6A se placer sous l'une des hypothèses α' ou β' suivantes.

Hypothèse α': *Pour tout* C *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{A_i, Y_{i-1}, i\leq 0\}$, *pour tout* D *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{A_i, Y_{i-1}, i\geq 1\}$, *si* $\hat{\mathbb{P}}(C)>0$ et *si* $\hat{\mathbb{P}}(D)>0$ *alors* $\hat{\mathbb{P}}(C\cap D)>0$.

Hypothèse β': *Pour tout* C *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{A_i, i\in\mathbb{Z}\}$ *pour tout* j, $1\leq j\leq p$, *pour tout* D_j *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{B_i^j, i\leq 0\}$ *et pour tout* E_j *de la* σ*-algèbre* $\sigma\{B_i^j, i\geq 1\}$ *si* $\hat{\mathbb{P}}(C)>0$ *et si, pour tout* j, $1\leq j\leq p$, $\hat{\mathbb{P}}(D_j)>0$ et $\hat{\mathbb{P}}(E_j)>0$ alors $\hat{\mathbb{P}}(C\cap \bigcap_{j=1}^{j=p} D_j \cap E_j)>0$.

L'hypothèse β'est la plus intéressante. Elle est réalisée en particulier si les suites $(B_i^j, i\in\mathbb{Z})$ sont des suites de variables indépendantes, indépendantes entres elles et indépendantes des $(A_i, i\in\mathbb{Z})$. On note:

$$(W,Q) = ((W^{s}(t),Q^{s,k}(t)),t\geq 0, s\in\prod_{i=1}^{i=p} S_i, k\in\mathbb{N}^p)$$

Théorème 66

Si pour tout k, $1\leq k\leq p$, $\hat{\mathbb{E}}(B_0^k) < q_k\hat{\mathbb{E}}(A)$, *et sous l'hypothèse* α' *ou* β', *le processus* (W,Q) *est un PBACS.*

Indiquons la démonstration sous l'hypothèse β': on procède par étapes à partir de la première file, puisque, sous l'hypothèse β', le processus d'entrée dans la seconde file a les mêmes propriétés que celui de la première file; en effet, pour n assez grand $U_n^{s^1} = U_n^1$ et donc on peut faire le même raisonnement qu'en 5B. D'où le résultat. Ce résultat peut bien sûr être regardé comme une extension d'un résultat de Numelin (Nu). K.Sigman (Si) a abordé le même genre de question sans utiliser les processus ponctuels stationnaires

7)Files avec impatience et autres équations.

Ici, $F=\mathbb{R}_+^2$, $Y_n=(B_n,C_n)$, où C_n représente l'"impatience" du client arrivé à l'instant T_n. La charge du serveur à l'instant T_n-0 est donnée par l'équation de récurrence (CP, Gu).

$$\begin{cases} \hat{W}^x_0 = x \in \mathbb{R}_+ \\ \hat{W}^x_{n+1} = (\hat{W}^x_n + B_n - A_{n+1})_+ \wedge (\hat{W}^x_n \vee C_n - A_{n+1})_+ \end{cases}$$

Si $\hat{\mathbb{E}}(B_1 1_{\{C_1=+\infty\}}) < \hat{\mathbb{E}}(A)$ cette équation admet un régime stationnaire. Ce régime stationnaire n'est pas unique en géneral. Sous une hypoyhèse de type α ou β le processus est un PBACSF:

Il en va de même du processus de charge en temps réel défini par:

$$\begin{cases} W^x(0) = x \in \mathbb{R}_+ \\ W^x(t) = (W^x(T_n)+B_n-(t-T_n))_+ \wedge (W^x(T_n) \vee C_n - (T_{n+1}-t))_+ \end{cases}$$

pour $T_n < t \leq T_{n+1}$, et du processus "longeur de la file d'attente".

De même, on peut envisager des tandems de files avec impatience. Toutes ces démonstrations sont identiques au cas des files avec plusieurs serveurs.

L'équation suivante se trouve par exemple dans (Bo3) et dans (Gu):

$$\begin{cases} \hat{W}^x_0 = x \in \mathbb{R}_+ \\ \hat{W}^x_{n+1} = C_{n+1} \wedge (\hat{W}^x_n + B_{n+1} - A_{n+1})_+ \end{cases}$$

Elle admet un régime stationnaire si $\hat{\mathbb{P}}(C_1 \neq \infty) < 1$ ou si $\hat{\mathbb{E}}(B_1) < \hat{\mathbb{E}}(A)$. C'est un PBACSF si $\hat{\mathbb{E}}(B_1) < \hat{\mathbb{E}}(A)$, W est un PBACS, et sinon W est un PBACSF une hypothèse de type α ou β ou si $\hat{\mathbb{E}}(B_1) \neq \hat{\mathbb{E}}(A)$.

On peut aussi envisager des files avec une infinité de serveurs, ou des tandems de files à une infinité de serveurs. Toutes ces files conduisent à des PBACSF.

8)Conclusion.

Tous les processus envisagés ici sont "ergodiques" en un sens trés fort. Ils possèdent également des propriétés de type régénératif qui permettent d'obtenir des théorèmes limites (Ig, Gui). Nous utiliserons ces propriétés régénératives pour obtenir une méthode systématique de démonstration de certaines convergences en loi, dans l'article suivant (CM1), et pour les files périodiques (CM2).

BIBLIOGRAPHIE

Bo1:BOROVKOV A.A.: Stochastic processes in queuing theory. Springer-Verlag 1976.

Bo2:BOROVKOV A.A.:Ergodicity and stability theorem for a class of stochastic equations and their applications. Th.Prob.App. vol.XXIII N°2, 220-247, (1978)

BB:BACELLI F. et BREMAUD P.: Palm probabilities and stationary queues. Lectures notes in statistics 41. Springer-Verlag 1987.

Bl:BLANCHARD F.: K-Flots et théorème de renouvellement. Z.Wahrscheinlichkeitstheory verw.Gebiete 36, 345-358(1976).

Cha1:CHARLOT F.: Files d'attente définies par des équations de récurrence croissantes. Existence et unicité du régime stationnaire. Problèmes de récurrence. Exposé dactylographié de séminaire, Labo. de proba. de Rouen (1981).

Cha2: CHARLOT F.: Intégrabilité des temps de renouvellement des files d'attente et applications. Ann. Sc. Clermont-Ferrand II, N 87, 1-41, (1985).

CHG: CHARLOT F., GUIDOUCHE M., HAMAMI M.: Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des temps d'attente des GI/G/q. Z. Wahrscheinlichkeistheory verw. Gebiete 43, 187-203, (1978).

CP: CHARLOT F., PUJOLLE J.: Recurrence in single server queues with impatient customers. Ann. Inst. Henri Poincarré, Vol. XIV, No4, 399-410, (1978).

CM1: CHARLOT F. et MERAD D.: Sur les méthodes de processus ponctuels et de renouvellement dans les systèmes de files d'attente. II Convergence en loi dans les systèmes de files d'attente.

CM2: CHARLOT F. et MERAD D.: Sur les méthodes de processus ponctuels et de renouvellement dans les systèmes de files d'attente. III Processus ponctuels périodiques et systèmes de files d'attente périodique.

Cho: CHOUAF B.: Equations de récurrence des Files d'attente à plusieurs serveurs en hypothèse de stationnarité et semi-markoviennes. Thése de magister, Inst. Math., USTHB, ALGER, (1981).

Gu: GUELLIL A.: Files d'attente avec impatience en hypothèse de stationnarité et processus ponctuels. Thèse de magister, Inst. Math., USTHB, ALGER, (1983).

Gui: GUIDOUCHE M.: Théorèmes limites pour les Files GI/G/q. Thèse de troisième cycle, ROUEN (1977).

Ig: IGLEHART D.: Functionnals limits theorems for the GI/G/1 in light traffic. Adv. Appl. Prob., 3, 269-281, (1971).

Ja: JAIBI R.: Evolution d'une file d'attente avec priorité. Ann. Inst. Henri Poincarré Vol. XVI, N°3 p 211-223, (1980).

KW: KIEFFER J. et WOLFOWITZ J.: On the theory of queues with many servers. Trans. Amer. Math. Sco., 78, 1-18, (1955).

Lo: LOYNES R.M.: The stability of queues with non-indépendant inter-arrival and service time. Proc. Cambridge Philos. Soc., 58, 497-520, (1962).

Me: MERAD D.: Convergence en loi des processus ponctuels marqués. Application aux files d'attente stationnaires et aux files d'attente périodiquement stationnaires. Thèse de Magiter, USTHB, ALGER, Mars 1988.

Ne1: NEVEU J.: Processus Ponctuels, Ecole d'été de probabilité de Saint-Flour VI, Lecture Notes in Maths 598, Springer-Verlag (1977).

Ne2: NEVEU J.: Construction de files d'attente stationnaires, Lect. Notes on Control and Information Sciences 60. Springer-Verlag, 31-41, (1983).

Nu: NUMELIN E.: A conservative property for general GI/G/1 queues with an application to tandem queues. Adv. App. Prob. 11,660-672, (1979).

Pi: PITTMAN J.W.: Uniform rate of convergence for Markov Chains transition probabilities. Z. Wahrscheinlichkeiststheory verw. Gebiete, 29, 193-227, (1974).

Si: SIGMAN K.: Regeneration in tandem queues with multiserver stations. J. Appl. Prob. 25, 391-403 (1988).

To: TOTOKI H.: On a class of special flows. Z. Wahrscheinlichkeists-theory verw. Gebiete, 15, 157-167, (1970).

François CHARLOT
Laboratoire de Calcul des
Probabilités et Statistique
Université de Rouen, BP 118
76134 MONT-SAINT-AIGNAN Cédex
FRANCE

Benamar CHOUAF & Ahmed GUELLIL
Département de Probabilités
Institut de Mathématiques
USTHB
16112 BAB-EZZOUAR
ALGERIE