ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. DIDON

Sur une équation aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 6 (1869), p. 377-380

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__377_0>

SUR UNE ÉQUATION
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. DIDON,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

On connaît le rôle important que joue dans la théorie des fonctions de Laplace l'équation aux dérivées partielles de Legendre

$$(1)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dz}{dx}\right]+\frac{d}{d\alpha}\left(\alpha^2\frac{dz}{d\alpha}\right)=0,$$

qui admet pour solution l'expression $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$; mais je ne sache pas qu'on ait donné d'autres solutions de cette équation. On peut, cependant, en trouver facilement de très-générales de la manière suivante. Si l'on cherche à satisfaire à l'équation (1) par l'expression

$$(2)\qquad z=R_0(x)+\alpha R_1(x)+\ldots+\alpha^n R_n(x)+\ldots,$$

on voit de suite que $R_n(x)$ doit vérifier l'équation différentielle

$$(3)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dR_n(x)}{dx}\right]+n(n+1)R_n(x)=0,$$

dont l'intégrale complète est

$$R_n(x)=C_n X_n(x)+C'_n Q_n(x),$$

C_n et C'_n étant des constantes quelconques, $X_n(x)$ la fonction X_n de

Legendre, et $Q_n(x)$ représentant l'expression $\int_{-1}^{+1} \frac{X_n(t)\,dt}{x-t}$; par conséquent, la quantité

$$(4) \qquad z = \Sigma C_n \alpha^n X_n + \Sigma C'_n \alpha^n Q_n(x),$$

dans laquelle les sommations peuvent s'étendre de $n=0$ à $n=+\infty$, est une solution de l'équation (1). Cette quantité se réduit, dans le cas où les C sont tous égaux à 1, et où les C′ sont nuls, à

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \omega,$$

et, dans le cas, au contraire, où les C′ sont égeux et où les C sont nuls, elle se réduit, à un facteur constant près, à

$$(5) \qquad \omega \log \frac{(x-\alpha)\omega+1}{(x-\alpha)\omega-1},$$

expression qui est la fonction génératrice des fonctions $Q_n(x)$. En effet, dans la dernière hypothèse, on a

$$\Sigma C'_n \alpha^n Q_n(x) = C' \int_{-1}^{+1} \frac{\Sigma \alpha^n X_n(t)}{x-t}\,dt = C' \int_{-1}^{+1} \frac{(1-2\alpha t+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}}{x-t}\,dt,$$

et il suffit de calculer l'intégrale précédente pour retrouver l'expression (5) donnée plus haut. Mais on peut effectuer les deux sommations qui entrent dans l'expression (4) de z, même dans le cas où les C et les C′ sont quelconques. Pour cela, on n'a qu'à employer la formule de Laplace

$$X_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x-\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\,d\varphi,$$

qui donne

$$\Sigma C_n \alpha^n X_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Sigma C_n(\alpha x-\alpha\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\,d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi} \varphi(\alpha x-\alpha\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,d\varphi$$

et

$$\Sigma C'_n \alpha^n Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{x-t} \int_0^\pi \psi(\alpha t - \alpha \cos\varphi \sqrt{x^2-1})\, d\varphi,$$

où les fonctions φ et ψ ne sont assujetties qu'à la condition que $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ puissent se mettre sous la forme $A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$.

On peut aussi chercher à satisfaire à l'équation (1) par l'expression

$$(6) \qquad z = \frac{1}{\alpha} S_0(x) + \ldots + \frac{1}{\alpha^{n+1}} S_n(x) + \ldots;$$

on trouve alors que $S_n(x)$ doit vérifier l'équation différentielle (3), ce qui donne les nouvelles solutions

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\pi \chi\left(\frac{x - \cos\varphi\sqrt{x^2-1}}{\alpha}\right) d\varphi$$

et

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{x-t} \int_0^\pi \varpi\left(\frac{t - \cos\varphi\sqrt{t^2-1}}{\alpha}\right) d\varphi,$$

où χ et ϖ sont des fonctions arbitraires constituées comme les fonctions φ et ϖ de tout à l'heure.

Les formes (2) et (6) ne comprennent pas toutes les solutions de l'équation (1), par exemple, la solution suivante :

$$z = \log \alpha \sqrt{x^2 - 1}.$$

En terminant, je fais remarquer que l'on ramène facilement l'équation (1) à la forme type d'Ampère, en faisant le changement de variables suivant :

$$s = \alpha(x - \sqrt{x^2-1}), \quad t = \alpha(x + \sqrt{x^2-1});$$

l'équation (1) devient alors

$$2(t-s)\frac{d^2 z}{dt\,ds} - \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{ds} = 0$$

ou

$$\frac{d}{ds}\left[(t-s)\frac{dz}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[(s-t)\frac{dz}{ds}\right].$$

Enfin, on peut observer encore que l'équation (1) se déduit de l'équation

$$(1 - x^2)\frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha^2 \frac{d^2 u}{d\alpha^2} = 0$$

en posant

$$\frac{d^2 u}{dx\, d\alpha} = z.$$

FIN DU TOME SIXIÈME.