F. DIDON

Note sur l'attraction

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 49-54
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__49_0>

NOTE SUR L'ATTRACTION,

PAR M. F. DIDON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

I.

Je représenterai la grandeur de l'attraction qui s'exerce entre deux éléments matériels ayant une masse égale à l'unité par $f'(\rho)$, $f'(\rho)$ étant une fonction quelconque de la distance ρ des deux points. Soient, pour cette loi d'attraction,

$$V = -\int f(\rho)\, dm$$

le potentiel d'une masse quelconque relativement au point x, y, z; et X, Y, Z les composantes, suivant les axes supposés rectangulaires, de l'attraction de la masse sur le point. On a

$$\rho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

a, b, c désignant les coordonnées d'un point quelconque de la masse attirante, et

$$X = \int f'(\rho) \frac{a-x}{\rho}\, dm = \frac{dV}{dx},$$

$$Y = \int f'(\rho) \frac{b-y}{\rho}\, dm = \frac{dV}{dy},$$

$$Z = \int f'(\rho) \frac{c-z}{\rho}\, dm = \frac{dV}{dz}.$$

Si le point x, y, z se déplace sur une surface, z sera une fonction de x et de y, dont j'appellerai, suivant l'usage, p et q les dérivées partielles du premier ordre; alors V sera une fonction V_1 de x et de y, et aussi X, Y, Z, et l'on aura

$$\frac{dV_1}{dx} = \int \frac{f'(\rho)}{\rho}[a - x + p(c - z)]\,dm = X + pZ,$$

$$\frac{dV_1}{dy} = \int \frac{f'(\rho)}{\rho}[b - y + q(c - z)]\,dm = Y + qZ.$$

Particularisons maintenant la surface sur laquelle se déplace le point x, y, z, et supposons que l'attraction $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ soit la même sur tous les points de cette surface qu'on pourrait nommer d'égale attraction. Par chacun de ces points passe une droite suivant laquelle est dirigée l'attraction correspondante. Je dis qu'on peut prendre sur chacune de ces droites, à partir de la surface d'égale attraction, une longueur l telle, que le lieu de l'autre extrémité de cette longueur soit une surface normale à toutes ces droites. En effet, x_1, y_1, z_1 désignant les coordonnées de cette extrémité, on a

$$x - x_1 = l\frac{X}{R}, \quad y - y_1 = l\frac{Y}{R}, \quad z - z_1 = l\frac{Z}{R},$$

d'où

$$dx - dx_1 = l.d\frac{X}{R} + dl\frac{X}{R}, \quad dy - dy_1 = l.d\frac{Y}{R} + dl\frac{Y}{R}, \quad dz - dz_1 = l.d\frac{Z}{R} + dl\frac{Z}{R}.$$

Multiplions ces équations respectivement par $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$, et ajoutons les résultats, il viendra, en observant que d'un côté nous voulons satisfaire à l'égalité,

$$X\,dx_1 + Y\,dy_1 + Z\,dz_1 = 0,$$

et que, d'un autre, la relation

$$\left(\frac{X}{R}\right)^2 + \left(\frac{Y}{R}\right)^2 + \left(\frac{Z}{R}\right)^2 = 1$$

entraîne la suivante

$$\frac{X}{R}d\frac{X}{R} + \frac{Y}{R}d\frac{Y}{R} + \frac{Z}{R}d\frac{Z}{R} = 0,$$

$$\frac{1}{R}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dl,$$

ou bien

$$dl = \frac{1}{R}[(X + pZ)\,dx + (Y + qZ)\,dy] = \frac{1}{R}\left(\frac{dV_1}{dx}\,dx + \frac{dV_1}{dy}\,dy\right).$$

Comme R est constant, on a

$$l = \frac{V_1}{R} + C.$$

La constante arbitraire C donne le groupe des surfaces parallèles en nombre infini qu'on devait trouver; si on la suppose nulle, on a

$$l = \frac{V_1}{R}.$$

On peut donc énoncer ce théorème :

Si, pour une loi quelconque d'attraction, on considère relativement à une masse attirante quelconque aussi une surface d'égale attraction, c'est-à-dire telle que l'attraction de la masse sur tous les points de cette surface ait une même valeur R, *les droites suivant lesquelles sont dirigées les attractions sur les divers points de cette surface sont toutes normales à une même seconde surface qui intercepte avec la première sur chacune de ces droites un segment égal au quotient par* R *du potentiel de la masse attirante sur le point correspondant de la première surface.*

II.

La masse attirante et la loi d'attraction étant toujours quelconques, et le point x, y, z étant encore assujetti à se mouvoir sur une surface, on peut se proposer la question suivante :

Trouver une relation entre les dérivées partielles de V_1 *et de* Z *relativement à x et y.*

La solution de cette question aurait de l'importance dans plusieurs recherches, entre autres dans celle des figures d'équilibre d'une masse fluide tournant autour d'un axe d'un mouvement uniforme, et dont tous les points s'attirent mutuellement suivant une certaine loi fonction de la distance. Car, en prenant l'axe de rotation pour axe des Z, on doit avoir, pour la surface,

$$\left(\frac{dV}{dx} + \omega^2 x\right) dx + \left(\frac{dV}{dy} + \omega^2 y\right) dy + \frac{dV}{dz}(p\,dx + q\,dy) = 0,$$

ou

$$\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz} = \frac{dV_1}{dx} = -\omega^2 x, \quad \frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz} = \frac{dV_1}{dy} = -\omega^2 y,$$

ou enfin

$$V_1 = C - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

En substituant donc dans la relation dont il est question, et qu'on appliquerait en particulier à la surface du fluide, cette valeur de V_1, on aurait une équation aux dérivées partielles à laquelle satisferait la surface d'équilibre cherchée. Malheureusement, la solution du problème posé au commencement de ce paragraphe semble difficile pour une loi d'attraction quelconque, et en particulier pour la loi de la gravitation; mais il y a une infinité de formes de la fonction $f(\rho)$ pour lesquelles on peut le résoudre, ainsi que je vais le faire voir. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V_1}{dx^2} &= -\int \frac{\rho f'' - f'}{\rho^3}[x - a + p(z - c)]^2 dm \\
&\quad - (1 + p^2)\int \frac{f'}{\rho} dm - r\int \frac{f'}{\rho}(z - c)\,dm, \\
\frac{d^2V_1}{dx\,dy} &= -\int \frac{\rho f'' - f'}{\rho^3}[x - a + p(z - c)][y - b + q(z - c)]\,dm \\
&\quad - pq\int \frac{f'}{\rho} dm - s\int \frac{f'}{\rho}(z - c)\,dm, \\
\frac{d^2V_1}{dy^2} &= -\int \frac{\rho f'' - f'}{\rho^3}[y - b + q(z - c)]^2 dm \\
&\quad - (1 + q^2)\int \frac{f'}{\rho} dm - t\int \frac{f'}{\rho}(z - c)\,dm,
\end{aligned}$$

r, s, t étant les dérivées partielles du second ordre de Z.

Si $\rho f'' - f' = 0$ ou $f' = h\rho$, c'est-à-dire si l'attraction est proportionnelle à la distance, on peut éliminer des équations précédentes les deux intégrales

$$\int \frac{f'}{\rho} dm \quad \text{et} \quad \int \frac{f'}{\rho}(z - c)\,dm,$$

et il vient

$$[pqt-(1+q^2)s]\frac{d^2V_1}{dx^2}-[(1+p^2)t-(1+q^2)r]\frac{d^2V_1}{dx\,dy}+[(1+p^2)s-pqr]\frac{d^2V_1}{dy^2}=0.$$

En appliquant cette équation au problème spécial énoncé plus haut, on la transforme, puisque

$$\frac{d^2V_1}{dx^2}=\frac{d^2V_1}{dy^2}=-\omega^2,\quad \frac{d^2V_1}{dx\,dy}=0,$$

et

$$(p^2-q^2)s-pq(r-t)=0.$$

Ainsi la figure permanente d'équilibre doit satisfaire à cette relation pour la loi d'attraction précédente. Cette relation ne permet pas de déterminer les figures d'équilibre qui sont de révolution, parce qu'elle est satisfaite pour toute surface de révolution. On peut en trouver facilement l'intégrale générale par les méthodes connues : il n'y a qu'à appliquer la méthode de Cauchy à l'une ou à l'autre des deux intégrales premières

$$p^2+q^2=\varphi(z),\quad y-x\frac{q}{p}=\varphi\left(\frac{q}{p}\right),$$

auxquelles on arrive aisément. En l'appliquant, par exemple, à la première, on met l'intégrale générale sous la forme

$$V=x^2+(y-\beta)^2-[\varphi(z)-\varphi(\psi\beta)]^2=0,\quad \frac{dV}{d\beta}=0,$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

Nous allons maintenant supposer non plus $\rho f''-f'=0$, mais

$$\frac{d\,\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}}{d\rho}=\frac{\rho^2 f'''-3\rho f''+3f'}{\rho^4}=0,$$

ce qui correspond à la loi d'attraction

$$f'=C\rho+C'\rho^3,$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires. Dans ce cas, si l'on prend les dérivées de V_1, des ordres plus élevés que le second, les expressions de ces dérivées contiendront des termes qui seront exclusivement renfermés dans les types suivants :

$$\mathrm{A}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}\,dm,\quad \mathrm{B}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(x-a)\,dm,\quad \mathrm{C}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(y-b)\,dm,$$

$$\mathrm{D}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(z-c)\,dm,\quad \mathrm{E}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(x-a)(z-c)\,dm,$$

$$\mathrm{F}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(y-b)(z-c)\,dm,\quad \mathrm{G}\int\frac{\rho f''-f'}{\rho^3}(z-c)^2\,dm,$$

$$\mathrm{H}\int\frac{f'}{\rho}\,dm,\quad \mathrm{K}\int\frac{f'}{\rho}(z-c)\,dm,$$

A, B, C, D, E, F, G, H, K ne renfermant rien qui se rapporte au corps attirant. Si donc on veut résoudre la question proposée pour la loi particulière d'attraction qui nous occupe, on aura neuf quantités à éliminer, et pour le faire il suffira de dix équations. On pourra prendre les quatre qui se rapportent aux dérivées de V_1 du troisième ordre, les cinq qui correspondent aux dérivées de V_1 du quatrième ordre, et l'une quelconque de celles qui donnent les dérivées du cinquième ordre de V_1, et l'on aura ainsi une équation du cinquième ordre par rapport aux dérivées partielles de V_1, et ainsi de Z qui résout la question, et qui ne contiendra aucune dérivée de V_1 d'un ordre inférieur au troisième. C'est dire qu'elle se réduira à une identité dans la recherche des figures d'équilibre; mais la première question est résolue dans le cas dont nous parlons. On la résoudrait encore de la même façon si, au lieu de la relation $\rho^2 f''' - 3\rho f'' + 3f' = 0$, on avait la suivante :

$$\frac{d}{d\rho}\frac{\dfrac{\rho^2 f'''-3\rho f''+3f'}{\rho^5}}{d\rho}=\frac{\rho^3 f^{\mathrm{iv}}-6\rho^2 f'''-15\rho f''-15 f'}{\rho^6}=0,$$

qui donne

$$f'=C\rho+C'\rho^3+C''\rho^5,$$

et, en général, quand f' est une fonction entière et impaire quelconque de ρ; mais, à mesure que le degré de cette fonction s'élèvera, l'ordre de l'équation cherchée s'élèvera également.

Le théorème démontré par Didon, page 31, avait été énoncé et démontré d'une autre manière par M. Laurent (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 24 août 1858). Nous avons tenu néanmoins à publier le travail de notre regretté camarade. (*Note du Directeur.*)