A. PICART

Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 9 (1880), p. 409-418
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__409_0>

MÉMOIRE

SUR

L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES,

PAR M. A. PICART.

NOUVELLE SOLUTION DU PROBLÈME DE L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES.

(Extrait d'un Traité général inédit de Physique mathématique.)

La solution nouvelle que nous proposons repose sur la propriété que possède le potentiel V d'une masse donnée de satisfaire, pour les points extérieurs (x, y, z), à l'équation différentielle partielle du second ordre

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Généralement, lorsque l'on connaît *a priori* la nature des *surfaces de niveau*, c'est-à-dire des surfaces pour lesquelles V est constant, la question se ramène à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre à une seule variable indépendante, qui est le paramètre de ces surfaces.

Or, il est possible de déterminer *a priori* la nature des surfaces de niveau relatives à une couche ellipsoïdale homogène, de densité K, infiniment mince, comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques, car on connaît *a priori* pour chaque point de l'espace extérieur la direction de l'attraction de cette couche, en vertu de ce théorème, dû à Steiner : *La force d'attraction d'une couche ellipsoïdale sur un point exté-*

rieur est dirigée suivant l'axe du cône circonscrit de ce point à la surface.

Nous démontrerons donc d'abord géométriquement ce théorème, puis nous en déduirons la nature des surfaces de niveau, et par suite l'équation différentielle ordinaire du second ordre à laquelle satisfait le potentiel, et dont l'intégration fournira la valeur de ce potentiel avec une constante qui sera déterminée par la recherche directe de l'attraction de la couche sur un point de sa surface extérieure. Le potentiel étant connu, nous en déduirons les composantes de l'attraction, parallèles aux axes des x, y, z, en prenant les dérivées partielles $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ de l'expression trouvée pour ce potentiel.

Il ne restera plus qu'à effectuer des quadratures pour obtenir l'attraction d'un ellipsoïde entier.

Pour démontrer le théorème de Steiner, nous nous appuierons sur cette propriété bien connue de l'ellipse : *Si d'un point* M *on mène les tangentes* MA *et* MB *à une ellipse et la bissectrice* MN *de l'angle* AMB, *que par le point* I *où cette bissectrice rencontre la corde de contact* AB *on mène une corde quelconque* CD, *et qu'on joigne les points* C *et* D *au point* M, *la ligne* MI *est bissectrice de l'angle* CMD.

En effet, considérons la polaire MG du point I; elle est perpendiculaire sur MI, puisque les droites MA, MB, MI, MG forment un faisceau harmonique et que MI est bissectrice de l'angle AMB; une transversale CIDH menée par le point I est divisée harmoniquement par la courbe, ce point et la polaire : donc les droites MC, MD, MI, MH forment un faisceau harmonique, et, comme MH est perpendiculaire sur MI, cette droite MI doit être bissectrice de l'angle CMD.

Cette proposition démontrée, considérons une couche ellipsoïdale et un point M extérieur; circonscrivons à cette surface un cône et menons MX, l'axe intérieur de ce cône, qui rencontre le plan de la courbe de contact au point I. Par cet axe, imaginons deux plans faisant entre eux un angle infiniment petit et déterminant dans la couche une sorte d'anneau elliptique représenté dans l'un des plans par l'ellipse de la figure précédente, et une autre ellipse concentrique et homothétique infiniment voisine. Si l'on prend deux éléments $CC_1C'C'_1$ et $DD_1DD'_1$ de cet anneau compris dans l'ouverture $d\omega$ d'un cône CIC_1 infiniment petit ayant son sommet en I, on voit que les masses de ces éléments sont entre elles comme $\overline{IC}^2$ et $\overline{ID}^2$, car ces éléments sont équivalents à ceux qui sont compris entre les sphères de rayons IC et IC', d'une part et ID, ID' d'autre part, et ceux-ci ont pour masses $K.\overline{IC}^2.CC'.d\omega$, $K.\overline{ID}^2.DD'.d\omega$, c'est-à-dire des masses proportionnelles à $\overline{IC}^2$ et $\overline{ID}^2$, puisque, en vertu de l'homothétie concentrique des deux ellipses, on a $CC' = DD'$. Il en résulte que les actions de ces éléments sur M, qui sont proportionnelles aux masses et en raison inverse du carré de la distance, peuvent être représentées par les rapports $\frac{\overline{IC}^2}{\overline{CM}^2}$, $\frac{\overline{ID}^2}{\overline{DM}^2}$, à un facteur constant près. Mais, MI étant bissectrice de l'angle CMD, on a

$$\frac{IC}{CM} = \frac{ID}{DM};$$

donc ces actions sont égales et ont une résultante dirigée suivant MI.

En associant ainsi deux à deux tous les éléments de l'anneau elliptique, on reconnaît que la résultante des attractions de tous ces éléments sur le point M est dirigée suivant MI. Il en est de même pour tous les anneaux dans lesquels on peut décomposer la couche ellipsoïdale par des plans infiniment rapprochés, menés suivant MI. Donc l'action de la couche entière est dirigée suivant l'axe MI du cône circonscrit.

Or, c'est une propriété connue des surfaces homofocales du second degré que *les axes du cône circonscrit d'un point donné à une surface du second degré sont les normales aux trois surfaces homofocales à cette surface, qui passent par ce point*.

On peut la démontrer simplement en la rattachant à cette propriété fondamentale des surfaces du second degré homofocales que *le lieu des pôles d'un même plan par rapport à ces surfaces est une droite perpendiculaire à ce plan et passant par le point de contact de ce plan avec l'une des surfaces*. En effet, il résulte de là que le plan mené par le sommet du cône circonscrit tangentiellement à l'ellipsoïde homofocal qui passe par ce point a pour pôle, relativement à la couche ellipsoïdale, un point du plan de la courbe de contact situé sur la perpendiculaire à ce plan tangent menée par le sommet du cône, ce qui revient à dire que la droite polaire du plan par rapport au cône circonscrit est perpendiculaire sur ce plan. Or, la seule droite menée par le sommet d'un cône qui ait pour plan polaire un plan perpendiculaire est un axe du cône; en d'autres termes, les axes d'un cône sont caractérisés par cette propriété que leurs plans polaires leur sont perpendiculaires. Donc l'axe du cône circonscrit est normal à l'ellipsoïde homofocal qui passe par son sommet.

L'attraction de la couche ellipsoïdale étant dirigée suivant l'axe du cône, il s'ensuit que, si l'on considère l'ellipsoïde homofocal à celui qui limite extérieurement la couche et passant par le point M, pour tous les points de cet ellipsoïde l'attraction exercée par la couche est dirigée suivant la normale correspondante; c'est donc une *surface de niveau*, et tous les ellipsoïdes homofocaux extérieurs forment le système de surfaces de niveau relatives à la couche ellipsoïdale.

Si donc l'équation de l'ellipsoïde donné est

$$\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_1^2 - c^2} - 1 = 0,$$

l'équation générale des surfaces de niveau pour les points extérieurs est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

le paramètre ρ variant de ρ_1 à $+\infty$, et le potentiel V, qui est constant sur chacune de ces surfaces, peut être regardé comme une simple fonction du paramètre ρ.

Proposons-nous maintenant de trouver cette fonction.

Comme ρ est une fonction de x, y, z déterminée par l'équation précédente, on a

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\rho}\frac{d\rho}{dx},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dV}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2,$$

de même

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{dV}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2V}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2,$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{dV}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dz^2} + \frac{d^2V}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}$$
$$=\frac{d^2V}{d\rho^2}\left[\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]+\frac{dV}{d\rho}\left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right).$$

Pour les points extérieurs à la couche ellipsoïdale ou situés sur sa surface, on a donc

(2) $$h^2\frac{d^2V}{d\rho^2}+H\frac{dV}{d\rho}=0,$$

en désignant par h et H les paramètres différentiels du premier et du second ordre de la fonction ρ par rapport à x, y, z.

Mais l'équation (1) donne

(3) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{\rho^2}-\rho\left[\frac{x^2}{\rho^4}+\frac{y^2}{(\rho^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\rho^2-c^2)^2}\right]\frac{d\rho}{dx}=0,\\ &\frac{y}{\rho^2-b^2}-\rho\left[\frac{x^2}{\rho^4}+\dots\dots\dots\dots\right]\frac{d\rho}{dy}=0,\\ &\frac{z}{\rho^2-c^2}-\rho\left[\frac{x^2}{\rho^4}+\dots\dots\dots\dots\right]\frac{d\rho}{dz}=0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$\rho^2h^2=\frac{1}{\dfrac{x^2}{\rho^4}+\dfrac{y^2}{(\rho^2-b^2)^2}+\dfrac{z^2}{(\rho^2-c^2)^2}}$$

ou

(4) $$\rho^2Ah^2=1,$$

en posant

$$\frac{x^2}{\rho^4}+\frac{y^2}{(\rho^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\rho^2-c^2)^2}=A.$$

Les équations (3), différentiées respectivement par rapport à x, y, z, donnent, la première,

$$\rho A\frac{d^2\rho}{dx^2}+A\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2-4\rho^2B\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+4\rho\frac{x}{\rho^4}\frac{d\rho}{dx}=\frac{1}{\rho^2},$$

B désignant la quantité $\frac{x^2}{\rho^6}+\frac{y^2}{(\rho^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\rho^2-c^2)^3}$; et les deux autres,

$$\rho A\frac{d^2\rho}{dy^2}+A\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2-4\rho^2 B\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+4\rho\frac{y}{(\rho^2-b^2)^3}\frac{d\rho}{dy}=\frac{1}{\rho^2-b^2},$$

$$\rho A\frac{d^2\rho}{dz^2}+A\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2-4\rho^2 B\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2+4\rho\frac{z}{(\rho^2-c^2)^2}\frac{d\rho}{dz}=\frac{1}{\rho^2-c^2};$$

et, si l'on ajoute ces trois dernières équations, on obtient après réduction, en tenant compte de (3) et (4),

$$(5)\qquad \rho A H=\frac{1}{\rho^2-b^2}+\frac{1}{\rho^2-c^2}.$$

Des équations (4) et (5) on déduit

$$(6)\qquad \frac{H}{h^2}=\frac{\rho}{\rho^2-b^2}+\frac{\rho}{\rho^2-c^2}.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$(7)\qquad \frac{d^2 V}{d\rho^2}+\left(\frac{\rho}{\rho^2-b^2}+\frac{\rho}{\rho^2-c^2}\right)\frac{dV}{d\rho}=0,$$

d'où, en intégrant,

$$(8)\qquad \frac{dV}{d\rho}=\frac{C}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}},$$

C désignant une constante.

Par suite,

$$\frac{dV}{dx}=\frac{C}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\,\frac{x}{\rho^3 A},$$

$$\frac{dV}{dy}=\frac{C}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\,\frac{y}{\rho(\rho^2-b^2)A},$$

$$\frac{dV}{dz}=\frac{C}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\,\frac{z}{\rho(\rho^2-c^2)A}.$$

Ce sont là les composantes de la force qui s'exerce au point x, y, z.

Pour déterminer la constante C, nous chercherons directement l'attraction qui s'exerce en un point de la surface extérieure de la couche.

Soit I le point attiré. Imaginons un cône infiniment petit ayant son sommet en I et interceptant dans son ouverture $d\omega$ des portions IMN et PQRS de la couche. Décomposons ces volumes en éléments par des sphères infiniment voisines ayant pour centre commun le point I. L'un de ces éléments a pour masse $\mathrm{K}r^2\,d\omega\,dr$, et son attraction sur le point I est $\frac{r^2\,d\omega\,dr}{r^2}$ ou $\mathrm{K}\,d\omega\,dr$; donc la somme des attractions exercées par tous les éléments compris dans le cône $d\omega$ est $\mathrm{K}\,d\omega.\mathrm{IM}+\mathrm{K}\,d\omega\,\mathrm{PS}$ ou, comme $\mathrm{IM}=\mathrm{PS}$, $2\mathrm{K}\,d\omega.\mathrm{IM}$, et sa composante suivant la normale IZ à la surface est $2\mathrm{K}\,d\omega.\mathrm{IM}\cos\mathrm{MIZ}$ ou $2\mathrm{K}\,d\omega.\mathrm{IT}$, IT étant l'épaisseur de la couche en I. Pour avoir la composante suivant IZ de l'attraction totale de la couche, il faut intégrer par rapport à ω sur toute l'étendue d'une hémisphère de rayon 1, ce qui donne

$$4\pi\mathrm{K}.\mathrm{IT};$$

c'est donc là la résultante des attractions de la couche sur le point I de sa surface. On voit qu'elle est proportionnelle à l'épaisseur IT de la couche en ce point.

Mais, si l'on appelle G le point où la normale IZ rencontre le plan parallèle au plan tangent mené par le centre et H le point où le rayon OI rencontre la surface intérieure de la couche, les triangles semblables ITH et IGO donnent

$$\frac{\mathrm{IT}}{\mathrm{IG}}=\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{IO}}=\frac{d\rho_1}{\rho_1},$$

en représentant par $d\rho_1$ l'épaisseur de la couche à l'extrémité de l'axe de demi-longueur ρ_1, d'où l'on déduit

$$\mathrm{IT}=\frac{d\rho_1}{\rho_1}\,\mathrm{IG}.$$

Mais IG est la distance du centre au plan tangent en I; c'est

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_1^2}{\rho_1^4}+\dfrac{y_1^2}{(\rho_1^2-b^2)^2}+\dfrac{z_1^2}{(\rho_1^2-c^2)^2}}}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}.$$

La force d'attraction est donc

$$\frac{4\pi\mathrm{K}\,d\rho_1}{\rho_1}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}.$$

On en déduit, pour la composante suivant l'axe des x,

$$\frac{4\pi K x_1 \, d\rho_1}{\rho_1^3 A}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle que prend l'expression de $\frac{dV}{dx}$ trouvée ci-dessus lorsqu'on y remplace ρ, x, y, z par ρ_1, x_1, y_1, z_1, on reconnaît que la constante C est égale à

$$4\pi K \, d\rho_1 \sqrt{(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}.$$

Par suite, on peut écrire les valeurs de $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ pour un point quelconque (x, y, z) sous la forme

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi K \sqrt{(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}\, x \, d\rho_1}{\rho^3 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, A},$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{4\pi K \sqrt{(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}\, y \, d\rho_1}{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)^3(\rho^2 - c^2)}\, A},$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{4\pi K \sqrt{(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}\, z \, d\rho_1}{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)^3}\, A},$$

ou, plus simplement, en désignant par p_1, q_1, r_1 les demi-axes de la surface extérieure de la couche ellipsoïdale et par p, q, r les demi-axes de l'ellipsoïde homofocal passant par le point (x, y, z),

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi K q_1 r_1 x_1 \, dp_1}{p^3 q r \left(\frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)},$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{4\pi K q_1 r_1 y_1 \, dp_1}{p q^3 r \left(\frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)},$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{4\pi K q_1 r_1 z \, dp_1}{p q r^3 \left(\frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)}.$$

Il est facile maintenant d'obtenir l'attraction de la masse entière d'un ellipsoïde sur un point extérieur.

Il suffit de décomposer cette masse en couches ellipsoïdales analogues à celle que nous venons de considérer par une série d'ellipsoïdes concentriques et homothétiques à sa surface.

En désignant par P_1, Q_1, R_1 les demi-axes de la surface et par X, Y, Z les composantes de l'attraction totale, on aura

$$X = 4\pi \int_{P_1}^{0} \frac{K q_1 r_1 x \, dp_1}{p^3 q r \left(\frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)},$$

$$Y = 4\pi \int_{P_1}^{0} \frac{K q_1 r_1 y \, dp_1}{p q^3 r \left(\frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)},$$

$$Z = 4\pi \int_{P_1}^{0} \frac{K q_1 r_1 z \, dp_1}{p q r^3 \left(\frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)},$$

p, q, r et q_1, r_1 pouvant s'exprimer en fonction de p_1 au moyen des relations

$$\frac{p_1}{P_1} = \frac{q_1}{Q_1} = \frac{r_1}{R_1}, \quad p^2 - p_1^2 = q^2 - q_1^2 = r^2 - r_1^2,$$

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

Mais, au lieu de p_1, nous prendrons pour variable différentielle la quantité u égale à $\frac{p_1}{p}$, c'est-à-dire au rapport des demi-grands axes de la couche élémentaire et de l'ellipsoïde homofocal passant par le point (x, y, z). En d'autres termes, nous poserons $p = \frac{p_1}{u}$ et alors, comme

$$q_1 = \frac{Q_1}{P_1} p_1, \quad r_1 = \frac{R_1}{P_1} p_1, \quad q^2 = p^2 - p_1^2 + q_1^2, \quad r^2 = p^2 - p_1^2 + r_1^2,$$

nous aurons, en posant $\frac{Q^2}{P^2} - 1 = -\lambda$, $\frac{R^2}{P^2} - 1 = -\mu$,

$$q = \frac{p_1}{u} \sqrt{1 - \lambda u^2}, \quad r = \frac{p_1}{u} \sqrt{1 - \mu u^2}$$

et

$$\frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4} = \frac{u^4}{p_1^4} \left[x^2 + \frac{y^2}{(1 - \lambda u^2)^2} + \frac{z^2}{(1 - \mu u^2)^2}\right];$$