V. HIOUX

Racines communes à deux équations algébriques entières. Note additionnelle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 11 (1882), p. 135-136
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1882_2_11__135_0>

RACINES COMMUNES

A DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ENTIÈRES,

PAR M. V. HIOUX,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TOURS.

NOTE ADDITIONNELLE.

Le Mémoire que nous avons publié dans le Tome X de ce Recueil (numéros de novembre et décembre 1881) contient, pages 386 et 387, l'énoncé et la démonstration du théorème suivant, dont nous croyons devoir donner une nouvelle démonstration.

THÉORÈME I. — *Si l'on pose $n-i=p-1$, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations $A=0$ et $B=0$ aient exactement p racines communes sont*

$$N_{i,0}=0,\quad N_{i,1}=0,\quad \ldots,\quad N_{i,n-i}=0 \quad \text{et} \quad N_{i-1,0}\lessgtr 0.$$

En d'autres termes : *Le polynôme T_i doit être identiquement nul et le polynôme T_{i-1} doit être effectivement de degré p.*

Démonstration. — 1° Les conditions sont nécessaires.

En effet, pour que les équations $A=0$ et $B=0$ aient exactement p racines communes, il faut que les polynômes A et B aient un plus grand commun diviseur de degré p. Soit D ce plus grand commun diviseur. Divisons par D les deux termes de la fraction $\frac{A}{B}$; nous pouvons représenter le quotient par $-\frac{A_i}{B_i}$, en désignant par A_i et B_i deux polynômes entiers en x, premiers entre eux, et de degrés respectivement égaux à $m-p$ et à $n-p$.

On devra donc avoir identiquement

$$BA_i + AB_i = 0.$$

Mais, en formant l'identité

$$T_i = BA_i + AB_i,$$

on a constitué les polynômes désignés ci-dessus par A_i et B_i, et pour que ces polynômes soient premiers entre eux et de degrés égaux à $m-p$ et $n-p$, il faut que l'on ait $N_{i-1,0} \gtrless 0$.

D'ailleurs le choix des multiplicateurs employés fait de T_i un polynôme entier en x de degré $p-1$.

L'expression $BA_i + AB_i$ devant être identiquement nulle, il en est de même du polynôme T_i qui lui est identique. On a donc, avec $N_{i-1,0} \gtrless 0$,

$$N_{i,0} = 0, \quad N_{i,1} = 0, \quad \ldots, \quad N_{i,n-i} = 0.$$

Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

2° Les conditions énoncées sont suffisantes.

En effet, en les supposant remplies, on a identiquement

$$BA_i + AB_i = 0,$$

et, comme $N_{i-1,0}$ n'est pas nul, les polynômes A_i et B_i sont premiers entre eux et de degrés égaux à $m-p$ et $n-p$. Il suit de là que les deux polynômes A et B ont un plus grand commun diviseur de degré p, à l'aide duquel on peut remplacer la fraction $\frac{A}{B}$ par la fraction égale $-\frac{A_i}{B_i}$.

Les équations $A = 0$ et $B = 0$ ont deux p racines communes.

Donc les conditions énoncées sont suffisantes.