Annales scientifiques de l'É.N.S.

T. J. Stieltjes

Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 409-426
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__409_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUELQUES RECHERCHES

SUR LA

THÉORIE DES QUADRATURES

DITES MÉCANIQUES,

PAR M. T.-J. STIELTJES.

INTRODUCTION.

Les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie ont été l'objet d'une étude d'ensemble, de la part de M. Radau, dans le Tome VI (3e série) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

L'auteur y a réuni à peu près tout ce qui est connu sur ce sujet et, en donnant les constantes dont on peut avoir besoin dans l'application, il a encore augmenté l'utilité de son travail.

Les recherches suivantes ont été dirigées par une autre idée. En me plaçant au point de vue le plus général, mon but a été d'étudier la question de savoir si ces formules permettent d'atteindre une approximation indéfinie.

Jusqu'à présent, il semble que cette étude n'ait pas encore été abordée. On a toujours supposé que la fonction dont il s'agit est développable en série suivant les puissances croissantes de la variable. Or, comme on le verra, ces quadratures où, à l'exemple de Gauss, les abscisses sont déterminées de manière à atteindre le plus haut degré de précision, présentent des circonstances particulières, qui ont pour conséquence qu'elles sont applicables dans des cas bien plus étendus. Par exemple, la quadrature de Gauss elle-même donne une approximation indéfinie pour toute fonction intégrable. Dans l'exposition de la théorie générale de cette quadrature mécanique, j'ai emprunté bien des choses au *Traité des fonctions sphériques* (deuxième édition) de M. Heine, et les n^os^ 1, 2, 4 ne contiennent rien d'essentiel qu'on ne trouve dans ce Traité.

1. *Détermination d'un polynôme qui satisfait à certaines conditions.* — Soit $f(x)$ une fonction *donnée*, qui ne devient pas négative, quand x prend les valeurs a, b et toutes les valeurs intermédiaires, et intégrable dans cet intervalle, en sorte que $\int_a^b f(x)\,dx$ ait un sens déterminé. Il n'est pas nécessaire que $f(x)$ reste toujours finie; mais nous supposons finies les limites a et b, bien que quelques-uns des résultats auxquels nous arriverons restent applicables dans le sens contraire.

Enfin, pour éviter certaines discussions qui n'auraient guère d'utilité, nous ferons encore la restriction suivante : nous supposerons qu'il existe un intervalle (A, B) appartenant à l'intervalle plus étendu (a, b) tel que, lorsque x est situé dans (A, B), $f(x)$ reste constamment supérieure à une quantité positive ε, d'ailleurs tout à fait arbitraire, comme l'intervalle (A, B).

Grâce à cette dernière restriction, la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$ sera donc positive et différente de zéro, et nous avons écarté aussi le cas sans intérêt où $f(x)$ serait constamment égale à zéro dans l'intervalle (a, b).

Cela posé, nous commençons par déterminer un polynôme $P(x)$ d'un degré *donné* n,

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

par les conditions

$$\int_a^b f(x)\,P(x)\,x^k\,dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1}$$

Ces conditions donnent lieu aux équations linéaires suivantes, qui servent à déterminer les inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\left\{\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,x^{n+k}\,dx + a_1\int_a^b f(x)\,x^{n+k-1}\,dx\\ &\qquad + a_2\int_a^b f(x)\,x^{n+k-2}\,dx + \ldots + a_n\int_a^b f(x)\,x^k\,dx = 0.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Le problème est donc déterminé en général, et les inconnues a_1, a_2, ..., a_n dépendent rationnellement des $2n$ constantes $\int_a^b f(x)\,x^k\,dx$, où $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Mais il importe de faire voir qu'en résolvant ces équations linéaires, aucune impossibilité ni indétermination ne sauraient se présenter.

Remarquons pour cela que le déterminant Δ du système (2) est composé d'une série de termes, dont chacun est un produit de n intégrales de la forme $\int_a^b f(x)x^k\,dx$. En écrivant un tel produit sous la forme d'une intégrale multiple d'ordre n, on arrive à l'expression suivante de Δ

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1)\,f(x_2)\ldots f(x_n)$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & \ldots & x_3^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^n & x_n^{n+1} & \ldots & x_n^{2n-2} \end{vmatrix} dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

ou bien

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1)\,f(x_2)\ldots f(x_n)\,x_2 x_3^2 x_4^3 \ldots x_n^{n-1}\,\Pi\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

où l'on a

$$\Pi = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

La notation des variables étant indifférente, on peut, dans cette expression, permuter de toutes les manières les indices 1, 2, ..., n. Par une permutation quelconque Π ne change pas : on change seulement de signe, et, en ajoutant toutes les équations qu'on obtient, on aura

$$\Sigma \pm x_2 x_3^2 \ldots x_n^{n-1} = \Pi\,;$$

donc

$$(3)\quad 1.2.3\ldots n\Delta = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)(\Pi)^2\, dx_1\, dx_2\ldots dx_n.$$

D'après les conditions que nous avons imposées à $f(x)$, il est évident que Δ a une valeur positive, différente de zéro.

Le polynôme cherché $P(x)$ existe donc pour toute valeur de n, et nous désignerons ces polynômes, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, par $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, ...

2. *Propriétés des polynômes* $P(x)$. — La propriété principale du polynôme $P_n(x)$ consiste en ce que l'on a

$$(4)\qquad \int_a^b f(x)\,P_n(x)\,(\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \lambda x + \mu)\,dx = 0,$$

ce qui est une conséquence immédiate des équations (1) qui ont servi à le déterminer.

Les indices m et n étant différents, on a donc aussi

$$(5)\qquad \int_a^b f(x)\,P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0.$$

A l'aide d'un raisonnement dû à Legendre, nous pouvons maintenant établir la proposition suivante :

Les racines de l'équation $P_n(x) = 0$ *sont* RÉELLES, INÉGALES *et* COMPRISES ENTRE *a et b en excluant les limites.*

En effet, désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les racines réelles comprises entre a et b. Le nombre de ces racines est au moins égal à 1, parce que, à cause de l'équation

$$\int_a^b f(x)\,P_n(x)\,dx = 0,$$

$P_n(x)$ doit changer de signe dans l'intervalle (a, b).

En posant

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)\,Q(x),$$

$Q(x)$ ne changera point de signe dans l'intervalle (a, b).

Or, si $Q(x)$ n'était *pas* simplement égal à l'unité,

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$$

serait *au plus* du degré $n-1$, et l'on aurait, d'après (4),

$$\int_a^b f(x)\,P_n(x)\,(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\,dx=0,$$

ce qui est évidemment impossible, parce que l'intégrale a une valeur positive.

Toutes les racines de $P_n(x)=0$ sont donc comprises dans l'intervalle (a, b), mais il ne saurait y avoir deux racines égales entre elles. En effet, supposons

$$P_n(x)=(x-x_1)^2 R(x),$$

$R(x)$ étant un polynôme du degré $n-2$; on devra avoir

$$\int_a^b f(x)\,P_n(x)\,R(x)\,dx=0,$$

ce qui est impossible.

3. *Relations entre les polynômes* $P(x)$. — Le polynôme $Q(x)$ du degré n, le plus général qui satisfasse aux conditions (1),

$$\int_a^b f(x)\,Q(x)\,x^k\,dx=0 \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

ne se distingue de $P_n(x)$ que par un facteur constant.

En effet, tout polynôme $Q(x)$ du degré n peut se mettre sous la forme

$$Q(x)=a_0 P_n(x)+\ldots+a_k P_{n-k}(x)+\ldots+a_{n-1}P_1(x)+a_n.$$

Or, en multipliant par $P_{n-k}(x)f(x)\,dx$ et intégrant entre les limites a, b, on trouve, à l'aide de (5),

$$0=a_k\int_a^b f(x)\,[P_{n-k}(x)]^2\,dx \quad (k=1, 2, 3, \ldots, n),$$

c'est-à-dire $a_k=0$.

Considérons maintenant l'expression

$$R(x) = P_n(x) - x P_{n-1}(x) + A P_{n-1}(x),$$

A étant une constante quelconque. Ce polynôme satisfait évidemment aux conditions

$$\int_a^b f(x) R(x) x^k \, dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-3).$$

Mais on peut choisir A de manière que $R(x)$ soit du degré $n-2$; pour cela, il suffit que $x - A$ soit le quotient qu'on obtient en divisant $P_n(x)$ par $P_{n-1}(x)$.

D'après la remarque que nous venons de faire, $R(x)$, pour cette valeur particulière de A, ne différera que par un facteur constant de $P_{n-2}(x)$, en sorte que nous avons une relation de cette forme

$$P_n(x) = (x - \alpha_{n-1}) P_{n-1}(x) - \lambda_{n-1} P_{n-2}(x) \tag{6}$$

avec

$$P_1(x) = x - \alpha_0,$$
$$P_2(x) = (x - \alpha_1) P_1(x) - \lambda_1.$$

On peut arriver facilement à des expressions élégantes des constantes α_k, λ_k. L'équation

$$P_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) P_k(x) - \lambda_k P_{k-1}(x)$$

donne, en effet, en multipliant par $P_k(x) f(x) \, dx$ et intégrant de $x = a$ jusqu'à $x = b$,

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b x P_k(x) P_k(x) f(x) \, dx}{\int_a^b P_k(x) P_k(x) f(x) \, dx}. \tag{7}$$

En multipliant la même équation par $P_{k-1}(x) f(x) \, dx$ et intégrant, il vient

$$\lambda_k = \frac{\int_a^b P_k(x) P_k(x) f(x) \, dx}{\int_a^b P_{k-1}(x) P_{k-1}(x) f(x) \, dx}, \tag{8}$$

en remarquant que $x P_{k-1}(x) = P_k(x) +$ un polynôme de degré $k-1$.

On voit que α_k reste compris entre a et b, tandis que λ_k est toujours positif.

Les relations (6), (7) et (8) permettent de calculer de proche en proche tous les polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... On a d'abord

$$\alpha_0 = \int_a^b x f(x)\,dx : \int_a^b f(x)\,dx,$$

ce qui fait connaître $P_1(x)$. Les formules (7) et (8) donnent alors α_1, λ_1, ce qui fait connaître $P_2(x)$, ...

Mais les relations (6) conduisent encore à une autre conséquence, qui complète la proposition démontrée sur les racines de l'équation $P_n(x) = 0$.

Substituons la valeur $x = \alpha_0$, racine de $P_1(x) = 0$ dans

$$P_2(x) = (x - \alpha_1) P_1(x) - \lambda_1,$$

il vient

$$P_2(\alpha_0) = -\lambda_1,$$

quantité négative, par conséquent. L'équation $P_2(x) = 0$ a donc ses racines β, γ, l'une supérieure, l'autre inférieure à α_0.

On trouvera de même

$$P_3(\beta) = -\lambda_2 P_1(\beta),$$
$$P_3(\gamma) = -\lambda_2 P_1(\gamma),$$

mais $P_1(\beta)$ est positif, $P_1(\gamma)$ négatif; donc l'équation $P_3(x) = 0$ a une racine supérieure à β, une autre comprise entre β et γ, enfin la troisième inférieure à γ.

En continuant ainsi, on voit que généralement les racines de $P_{k-1}(x) = 0$ séparent les racines de $P_k(x) = 0$.

4. *Application des résultats précédents à la quadrature mécanique.* — Soit $\varphi(x)$ un polynôme entier en x, du degré $2n-1$ au plus. La division de $\varphi(x)$ par $P_n(x)$ donnera

$$\varphi(x) = Q(x) P_n(x) + R(x);$$

le quotient $Q(x)$, ainsi que le reste $R(x)$ étant tous les deux du degré $n-1$ au plus.

En faisant attention à (4), on en tire

$$\int_a^b f(x)\,\mathcal{G}(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\mathrm{R}(x)\,dx.$$

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation $\mathrm{P}_n(x) = 0$, rangées par ordre de grandeur croissante; $\mathrm{R}(x)$ étant du degré $n-1$, on a identiquement

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_1)\mathrm{P}'_n(x_1)}\,\mathrm{R}(x_1) + \ldots + \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_n)\mathrm{P}'_n(x_n)}\,\mathrm{R}(x_n);$$

en posant donc

$$\mathrm{A}_k = \int_a^b f(x)\,\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_k)\mathrm{P}'_n(x_k)}\,dx, \tag{9}$$

il vient

$$\int_a^b f(x)\,\mathcal{G}(x)\,dx = \mathrm{A}_1\,\mathrm{R}(x_1) + \ldots + \mathrm{A}_n\,\mathrm{R}(x_n),$$

mais $\mathrm{R}(x_1) = \mathcal{G}(x_1), \ldots$; donc

$$\int_a^b f(x)\,\mathcal{G}(x)\,dx = \mathrm{A}_1\,\mathcal{G}(x_1) + \mathrm{A}_2\,\mathcal{G}(x_2) + \ldots + \mathrm{A}_n\,\mathcal{G}(x_n), \tag{10}$$

où les constantes $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ ne dépendent en aucune façon de la fonction $\mathcal{G}(x)$.

5. *Propriétés des constantes* A_k. — La première de ces propriétés consiste en ce que tous les A_k sont positifs. Cela ne résulte pas immédiatement de la formule (9) qui a servi à leur définition, quoiqu'on pourrait le déduire de cette formule.

Mais il est plus facile de remarquer que la formule (10) subsiste pour un polynôme $\mathcal{G}(x)$ du degré $2n-1$ au plus, tout à fait arbitraire; d'ailleurs, il est permis de prendre $\mathcal{G}(x) = \left[\frac{\mathrm{P}_n(x)}{x-x_k}\right]^2$, ce qui donne

$$\int_a^b f(x)\left[\frac{\mathrm{P}_n(x)}{x-x_k}\right]^2 dx = \mathrm{A}_k[\mathrm{P}'_n(x_k)]^2, \tag{11}$$

d'où résulte immédiatement la propriété énoncée.

Cette propriété est donc une conséquence nécessaire de (10), même dans le cas où l'équation (10) ne subsisterait qu'en prenant pour $\mathcal{G}(x)$ un polynôme du degré $2n-2$.

Nous arrivons maintenant à une autre propriété plus cachée des A_k, que nous énonçons d'abord en écrivant les deux inégalités

$$(12)\qquad A_1+A_2+A_3+\ldots+A_k>\int_a^{x_k} f(x)\,dx \quad (k=1,2,3,\ldots,n-1,n),$$

$$(13)\qquad A_1+A_2+A_3+\ldots+A_k<\int_a^{x_{k+1}} f(x)\,dx \quad (k=1,2,3,\ldots,n-1).$$

La démonstration de ces inégalités dépend de nouveau de la formule (10), où nous prendrons pour $\mathcal{G}(x)$ un polynôme $T(x)$ du degré $2n-2$ défini par les conditions

$$\begin{array}{ll}
T(x_1)\ \ =1, & T'(x_1)\ \ =0,\\
T(x_2)\ \ =1, & T'(x_2)\ \ =0,\\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots,\\
T(x_{k-1})=1, & T'(x_{k-1})=0,\\
T(x_k)\ \ =1, & \\
T(x_{k+1})=0, & T'(x_{k+1})=0,\\
T(x_{k+2})=0, & T'(x_{k+2})=0,\\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots,\\
T(x_n)\ \ =0, & T'(x_n)\ \ =0.
\end{array}$$

Le nombre de ces conditions étant $2n-1$, et les quantités x_1, x_2, ..., x_n étant inégales, $T(x)$ est parfaitement défini, et l'on aura, d'après (10),

$$(14)\qquad \int_a^b f(x)T(x)\,dx = A_1+A_2+A_3+\ldots+A_k.$$

Considérons maintenant l'équation

$$T'(x)=0.$$

Nous voyons d'abord qu'elle admet les racines

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{k-1},$$
$$x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$$

au nombre de $n-1$.

Ensuite, le théorème de Rolle nous apprend l'existence des $k-1$ racines

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \ldots, \ \xi_{k-1},$$

qui séparent les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$.

Enfin, le même théorème nous apprend l'existence des $n-k-1$ racines

$$\eta_{k+2}, \ \eta_{k+3}, \ \ldots, \ \eta_n$$

qui séparent les quantités $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$.

Le nombre total des racines énumérées s'élève à $2n-3$, et, comme l'équation est du degré $2n-3$, elle n'en a pas d'autres. Nous voyons donc que toutes les racines de $T'(x)=0$ sont réelles et inégales. Il s'ensuit que $T'(x)$ change de signe chaque fois que x passe une des racines. Les racines ξ_{k-1} et x_{k+1} sont deux racines consécutives, tandis que x_k est compris entre ξ_{k-1} et x_{k+1}. Mais $T(x_k)=1$, $T(x_{k+1})=0$; donc $T'(x)$ est constamment négatif dans l'intervalle (ξ_{k-1}, x_{k+1}).

Connaissant maintenant le signe de $T'(x)$, dans un des intervalles compris entre deux racines consécutives, on en déduit aussitôt le signe de $T'(x)$ pour une valeur quelconque de x; on trouve ainsi :

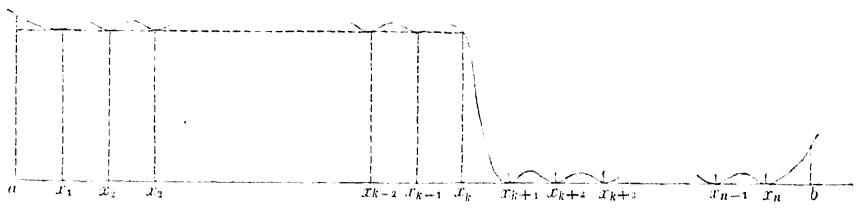
Intervalle.	Signe de $T'(x)$.
(a, x_1)........................	$-$
(x_1, ξ_1)........................	$+$
(ξ_1, x_2)........................	$-$
(x_2, ξ_2)........................	$+$
....	..
(x_{k-1}, ξ_{k-1})..................	$+$
(ξ_{k-1}, x_{k+1})..................	$-$
(x_{k+1}, η_{k+2})..................	$+$
(η_{k+2}, x_{k+2})..................	$-$
....	..
(x_{n-1}, η_n)..................	$+$
(η_n, x_n)........................	$-$
(x_n, b)........................	$+$

D'après cela, on peut se représenter facilement la série des valeurs que prend le polynôme $T(x)$, et qui est indiquée dans la figure ci-jointe.

On voit :

1° Que $T(x)$ ne devient pas négatif dans l'intervalle (a, b);

2° Que $T(x)$ ne devient pas inférieur à l'unité dans l'intervalle (a, x_k).



Dès lors nous pouvons conclure de l'équation (14)

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k \geqq \int_a^{x_k} f(x) T(x)\, dx.$$

Le signe $=$ ne saurait convenir que lorsque l'intervalle (A, B) dont nous supposons l'existence (n° **1**) tombe entièrement dans l'intervalle (a, x_k). En remplaçant enfin $T(x)$ par sa valeur minima dans l'intervalle (a, x_k), qui est égale à l'unité, nous avons, dans tous les cas,

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k > \int_a^{x_k} f(x)\, dx.$$

Ce raisonnement s'applique aux valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$ de k; d'après une remarque que l'on trouvera plus loin (n° **7**), cette inégalité reste encore vraie pour $k = n$.

Quant à l'inégalité (13), on pourrait la déduire d'une manière analogue; mais il est un peu plus court de remarquer qu'on démontrera précisément de la même manière que (12) cette autre inégalité

$$A_{k+1} + A_{k+2} + \ldots + A_n > \int_{x_{k+1}}^{b} f(x)\, dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1),$$

en considérant l'autre limite (b) de l'intégrale. Or

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \int_a^b f(x)\, dx;$$

donc, par soustraction,

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k < \int_a^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Nous savons déjà que A_k est positif; cela se confirme de nouveau par les inégalités (12), (13) en remplaçant dans la dernière k par $k-1$.

Avant d'aller plus loin dans les considérations générales, nous allons maintenant considérer un cas spécial, celui de la quadrature de Gauss, ou de $f(x) = 1$.

6. *Sur la quadrature de Gauss.* — Supposons donc $f(x) = 1$, et pour simplifier (sans nuire réellement à la généralité), $a = -1$, $b = +1$.

Alors, comme l'on sait, le polynôme $P_n(x)$ ne se distingue que par un facteur constant du polynôme X_n de Legendre. Les inégalités (12) et (13) deviennent

$$(14)\qquad \begin{cases} -1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_k > x_k, \\ -1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_k < x_{k+1}. \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'on applique la quadrature à une fonction $\mathfrak{F}(x)$ quelconque; on aura pour valeur approchée de

$$\int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(x)\,dx$$

l'expression

$$(15)\qquad A_1\,\mathfrak{F}(x_1) + A_2\,\mathfrak{F}(x_2) + \ldots + A_n\,\mathfrak{F}(x_n).$$

Mais, d'après les inégalités (14), x_1, x_2, x_3, ... tombent dans les intervalles

$$(-1, -1 + A_1),\ (-1 + A_1, -1 + A_1 + A_2),$$
$$(-1 + A_1 + A_2, -1 + A_1 + A_2 + A_3),\ \ldots.$$

Cette expression (15) rentre donc dans celle-ci, qui sert de définition de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(x)\,dx$,

$$\lim.\,[\delta_1\,\mathfrak{F}(\xi_1) + \delta_2\,\mathfrak{F}(\xi_2) + \ldots + \delta_n\,\mathfrak{F}(\xi_n)],$$

et comme les différences $x_1 + 1$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ... deviennent infiniment petites avec $\frac{1}{n}$, nous arrivons à cette conclusion, que l'expression (15) donnera avec une approximation indéfinie la valeur de $\int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(x)\,dx$, en augmentant n, toutes les fois que $\mathfrak{F}(x)$ est intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$, et reste comprise entre deux limites finies.

7. *Sur la distribution des racines de l'équation* $P_n(x) = 0$. — Dans le cas spécial que nous venons de considérer, les connaissances acquises sur les polynômes de Legendre nous ont permis de conclure que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont distribuées de manière que les quantités $+1 + x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}, 1 - x_n$ deviennent infiniment petites avec $\frac{1}{n}$. Il nous reste à chercher la proposition analogue pour le cas général. Voici une première observation à cet égard :

Supposons d'abord qu'il existe un nombre a_1 plus grand que a, mais plus petit que b, tel que

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = 0,$$

donc aussi

$$\int_a^{a_1} x^k f(x)\,dx = 0.$$

Il est évident alors que le polynôme $P_n(x)$, que nous déterminons, sera identique à celui qu'on aurait obtenu en considérant directement les limites a_1 et b au lieu de a et b. Les racines de $P_n(x) = 0$ seront donc comprises dans l'intervalle (a_1, b) (excluant les limites), et il n'y aura aucune racine dans l'intervalle (a, a_1). Une remarque analogue s'applique à l'autre limite b, et nous pouvons donc dire que, lorsqu'un intervalle (α, β), tel que

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0,$$

s'étend jusqu'à une des limites a ou b, cet intervalle ne comprendra *aucune* racine de $P_n(x) = 0$.

Mais nous ajoutons maintenant que, lorsque cet intervalle (α, β) ne s'étend pas jusqu'à une des limites a ou b, cet intervalle (incluant les limites α, β) ne comprend jamais plus d'*une* racine.

C'est, en effet, une conséquence immédiate des inégalités (12) et (13), qui donnent

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx > 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

Des exemples font voir, du reste, que les deux cas, où un tel intervalle (α, β) comprend *une* ou *aucune* racine, se présentent tous les deux.

Supposons, par exemple, que la fonction $f(x)$ ait la propriété exprimée par l'équation

$$f(a+x) = f(b-x);$$

alors on verra facilement que, à chaque racine x_1 de $P_n(x) = 0$, correspond une racine $a + b - x_1$. Supposons de plus que $f(x)$ soit constamment égale à zéro dans l'intervalle $\left(\frac{a+b}{2} - h, \frac{a+b}{2} + h\right)$; alors, n étant pair, il n'y aura aucune racine de $P_n(x)$ dans cet intervalle (parce qu'il ne peut y en avoir deux); mais si n est impair, la racine $\frac{a+b}{2}$ tombe dans cet intervalle, et c'est la seule.

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

Soit (α, β) un intervalle quelconque, faisant partie de l'intervalle plus étendu (a, b) et tel que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

ait une valeur positive différente de zéro; alors, pour toutes les valeurs de n au-dessus d'une certaine limite, au moins une racine de $P_n(x) = 0$ tombe dans cet intervalle (α, β).

Prenons un intervalle (α', β'), $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, tel que

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx = M,$$

M ayant une valeur *positive,* ce qui est possible, d'après la supposition que nous avons faite.

Construisons maintenant un polynôme $T(x)$ d'un degré fini k, tel que

$$\text{Val. abs. } T(x) < \varepsilon, \quad a \leqq x \leqq \alpha, \quad \beta \leqq x \leqq b,$$
$$T(x) \geqq 1, \quad \alpha' \leqq x \leqq \beta',$$

et supposons de plus que $T(x)$ soit positif dans l'intervalle (α, α') et dans l'intervalle (β', β). Admettons pour un moment l'*existence* d'un tel polynôme $T(x)$ d'un degré fini k, ε étant une quantité arbitraire. Alors, lorsque n est supérieur à $\frac{1}{2}k$, il y aura au moins une racine de $P_n(x)$ dans l'intervalle (α, β).

En effet, supposons que cela n'eût pas lieu. Parce que $n > \frac{1}{2}k$, on a exactement

$$\int_a^b f(x) T(x)\, dx = A_1 T(x_1) + \ldots + A_n T(x_n),$$

et cette intégrale serait inférieure à

$$\varepsilon(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \varepsilon \int_a^b f(x)\, dx.$$

Mais, d'autre part, il est évident que la valeur de cette intégrale est supérieure à

$$M - \varepsilon \int_a^b f(x)\, dx,$$

ce qui implique contradiction, ε étant arbitraire.

Quant à l'*existence* du polynôme $T(x)$, on peut s'en convaincre ainsi qu'il suit :

Soit $F(x)$ une fonction continue, à un nombre fini de maxima et minima, dans l'intervalle (a, b). En posant

$$\frac{b + a - 2x}{b - a} = \cos\varphi,$$

on aura

$$F(x) = \mathcal{G}(\varphi)$$

et les limites $x = a$, $x = b$ correspondent à $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; $\mathcal{G}(\varphi)$ est développable en une série telle que

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots,$$

et cette série converge uniformément, c'est-à-dire qu'on peut prendre k assez grand pour que

$$\mathcal{G}_1(\varphi) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\varphi + \ldots + a_k \cos k\varphi$$

diffère, pour toutes les valeurs, de $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, moins que ε de $\mathcal{G}(\varphi)$. En introduisant x au lieu de φ, on aura ainsi un polynôme $F_1(x)$ du degré k, tel que

$$\text{val. abs.}\,[F(x) - F_1(x)] < \varepsilon \quad (a \leqq x \leqq b).$$

A l'aide de ce résultat, il est facile de voir qu'il existe, en effet, un polynôme $T(x)$, doué des propriétés que nous avons supposées.

En résumant les résultats obtenus, nous pouvons conclure que, n augmentant indéfiniment, les intégrales

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx,\quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,\quad \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx,\quad \ldots,\quad \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx,\quad \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

convergent toutes vers zéro, sans qu'on puisse dire la même chose des différences

$$x_1 - a,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1},\ b - x_n.$$

D'après les inégalités (12), (13), on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k \quad < \int_a^{x_{k+1}} f(x)\,dx,$$
$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1} > \int_a^{x_{k-1}} f(x)\,dx;$$

donc

$$A_k < \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx,$$

ce qui fait voir, d'après ce qui précède, que les A_k convergent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

8. *Application des résultats obtenus.* — On ne saurait douter, il nous semble, que les propositions que nous avons obtenues seront d'un

grand usage, si l'on veut étudier la question que nous avons posée au début de l'introduction.

Toutefois, en considérant l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx,$$

les conditions à imposer aux fonctions $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ deviennent la source de difficultés qu'on ne saurait vaincre qu'à l'aide de nouvelles recherches sur les principes mêmes du Calcul intégral.

Je me contenterai seulement de considérer un cas assez simple. Assujettissons la fonction $f(x)$ à cette *nouvelle condition,* qu'il n'existe pas un intervalle (α, β) tel que

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0.$$

En posant

$$y = \int_a^x f(x)\,dx,$$

y sera donc une fonction continue de x, toujours croissante, et, en posant

$$x = \psi(y),$$

la fonction $\psi(y)$ sera de même continue et toujours croissante.

En introduisant y au lieu de x, il vient

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx = \int_0^c \mathrm{F}[\psi(y)]\,dy, \quad c = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Déterminons maintenant les constantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ par

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_k = \int_a^{\xi_k} f(x)\,dx;$$

on aura, d'après (12) et (13),

$$x_k < \xi_k < x_{k+1}.$$

Désignons encore par y_k, η_k les valeurs de y correspondant aux valeurs x_k, ξ_k de x, l'expression

$$A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n)$$

deviendra

$$\eta_1 F[\psi(y_1)] + (\eta_2 - \eta_1) F[\psi(y_2)] + \ldots + (c_n - \eta_{n-1}) F[\psi(y_n)];$$

et, comme on a

$$0 < y_1 < \eta_1 < y_2 < \eta_2 < \ldots < \eta_{n-1} < y_n < c,$$

cette expression rentre dans celle qui sert de définition à $\int_0^c F[\psi(y)]\,dy$. De plus, d'après les recherches du n° **7**, les intervalles deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$.

Ainsi encore, dans ce cas, la quadrature peut donner une approximation indéfinie, à la seule condition que $F(x)$ soit intégrable.