ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

R. LIPSCHITZ

Sur la théorie des fonctions elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 315-320

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__315_0>

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. R. LIPSCHITZ,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BONN.

Extrait d'une Lettre à M. HERMITE.

Comme j'avais étudié, il y a peu de temps, votre beau Mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques,* j'ai suivi avec d'autant plus de plaisir les développements de votre Lettre. Un intérêt particulier me semble attaché à l'expression

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(z+\omega)}{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}(\omega)},$$

pour laquelle vous donnez les deux développements

$$\cot\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}+\sum\left[\cot\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+2ni\mathrm{K}')+\varepsilon i\right]e^{\frac{ni\pi z}{\mathrm{K}}},$$

où $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, ε étant $1, 0, -1$, suivant que n est positif, nul ou négatif, et

$$\cot\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}+\cot\frac{\pi\omega}{2\mathrm{K}}+4\sum q^{2nn'}\sin\frac{\pi}{\mathrm{K}}(nz+n'\omega),$$

où $n, n'=1, 2, 3, \ldots$.

La seconde série est distinguée par le fait que l'exposant de q contient, par rapport aux deux nombres n et n', la moitié de la différence des deux carrés $(n+n')^2-(n-n')^2$, tandis que toutes les généralisations usitées de Θ contiennent dans l'exposant de q des formes essentiellement positives. Un autre résultat se prête au moment où l'on introduit pour z et ω deux quantités complexes conjuguées : $z=x+iy$, $\omega=x-iy$, et en même temps, au lieu de la période K', une expression $K'+gt$, où g désigne une quantité réelle constante, t une quantité réelle variable.

Si l'on écrit $H(z,q)$ au lieu de $H(z)$, la fonction réelle

$$U=\frac{2K}{\pi}\,\frac{H\left[o,e^{-\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\right]H\left[2x,e^{-\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\right]}{H\left[x+iy,e^{-\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\right]H\left[x-iy,e^{-\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\right]}$$

est égale à la série

$$\cot\frac{\pi(x+iy)}{2K}+\cot\frac{\pi(x-iy)}{2K}+4\sum e^{-2nn'\frac{\pi(K'+gt)}{K}}\sin\frac{\pi}{K}[n(x+iy)+n'(x-iy)].$$

La dernière a la propriété de satisfaire à l'équation différentielle partielle, qui détermine le mouvement de la chaleur dans un plan, dont les points ont les coordonnées rectilignes x, y, le temps étant désigné par t.

En effet, cette équation est la suivante

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},$$

où a désigne une constante physique.

Les deux premiers membres donnent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=o$$

et en même temps

$$\frac{\partial u}{\partial t}=o.$$

Le terme général de la série, en formant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, reçoit le facteur $-\frac{\pi^2}{K^2}[(n+n')^2-(n-n')^2]$; en formant $\frac{\partial u}{\partial t}$, il reçoit le facteur

$-2nn'\frac{\pi}{K}g$. Cela vu, l'équation du mouvement de la chaleur se trouve remplie aussitôt que l'on détermine la constante g par l'équation

$$g = \frac{2a^2\pi}{K}.$$

Or je me suis proposé de trouver le problème du mouvement de la chaleur, qui est résolu par votre fonction. Le fait qu'elle devient infinie dans le rectangle des périodes

$$-K \leqq x \leqq K, \quad -(K'+gt) \leqq y \leqq (K'+gt),$$

seulement pour le point $x+iy=0$, conduit aux considérations suivantes. Supposez que la température u soit égale à la somme d'une fonction v, qui reste finie et continue dans les environs du point $x+iy=0$, et de l'expression $\sigma \log r$, où σ désigne une constante et où $x+iy=re^{i\theta}$; j'admets que l'on décrive au point milieu $x+iy=0$ un cercle de rayon R, et que l'on détermine la quantité de chaleur qui entre dans le plan par le cercle. Alors, une constante physique positive étant nommée b, il faut évaluer l'intégrale

$$-b\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}R\,d\theta.$$

Pour une valeur décroissante de R la fonction finie et continue v donne une partie infiniment petite, mais la fonction $\sigma \log r$ donne la partie finie $-2\pi\sigma b$. Nous avons donc le phénomène d'un orifice, par lequel s'écoule pendant l'unité de temps une quantité constante de chaleur $-2\pi\sigma b$. Dans notre cas, la fonction u pour $x+iy=0$ devient égale à la somme d'une fonction finie et continue et de l'expression

$$\frac{2K}{\pi}\left(\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{x-iy}\right).$$

Soit dénotée par α une quantité positive, ladite expression est la limite vers laquelle converge le quotient

$$\frac{4K}{} \frac{\frac{1}{2}\log[(x+\alpha)^2+y^2]-\frac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+y^2]}{}$$

pour une valeur décroissante de α. Il faut donc décrire au point milieu $x+iy=0$ un cercle de rayon R, et faire ainsi que les deux quantités α et R décroissent de manière que $\frac{\alpha}{R}$ décroisse aussi. Alors la chaleur qui s'écoule par le cercle de rayon R entre dans ce plan de telle sorte que s'il y a deux orifices, l'un au point $x+iy=\alpha$, l'autre au point $x+iy=-\alpha$, et que par le premier s'écoule une quantité de chaleur égale à $\frac{4K}{\alpha}b$, par le second une quantité égale à $-\frac{4K}{\alpha}b$, les deux quantités de chaleur sont égales et opposées, et leur grandeur absolue devient d'autant plus grande que la distance 2α devient plus petite, supposition semblable à celle sur laquelle est fondée la définition des masses magnétiques. D'ailleurs il est clair que, par la définition de la quantité de chaleur qui s'écoule par les deux orifices voisins, la période K est entièrement déterminée.

Évidemment la fonction u est construite ainsi, qu'elle satisfait aux deux équations

$$u(-x,y)=-u(x,y), \tag{1}$$
$$u(x,-y)=u(x,y). \tag{2}$$

De plus les équations

$$\begin{aligned} H(x+iy+2K) &= -H(x+iy), \\ H(x+iy+2iK') &= -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iy)+\frac{\pi K'}{K}}H(x+iy) \end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned} H(x+iy+2K)\ H(x-iy-2K) &= H(x+iy)\,H(x-iy), \\ H(x+iy+2iK')\,H(x-iy-2iK') &= e^{\frac{2\pi}{K}(y+K')}H(x+iy)\,H(x-iy). \end{aligned}$$

La fonction remplit donc les deux relations

$$u(x+2K,y)=u(x,y), \tag{3}$$
$$u[x,y+2(K'+gt)]=\frac{u(x,y)}{e^{\frac{2\pi}{K}(y+K'+gt)}}. \tag{4}$$

D'ailleurs il est clair que, dans le rectangle

$$-K\leqq x\leqq +K,\quad -K'-gt\leqq y\leqq K'+gt,$$

la fonction s'évanouit aux deux côtés

$$x = -\mathrm{K} \quad \text{et} \quad x = \mathrm{K}$$

par le facteur

$$\mathrm{H}\left[2x, e^{-\frac{\pi}{\mathrm{K}}(\mathrm{K}'+gt)}\right];$$

il règne donc ici la température fixe $u = 0$. Afin de connaître l'état de la température dans le côté $y = \mathrm{K}' + gt$, formons, pour une quantité positive β, la différence des températures

$$u(x, \mathrm{K}' + gt + \beta) - u(x, \mathrm{K}' + gt - \beta),$$

qui, suivant (2), est égale à la différence

$$u(x, \mathrm{K}' + gt + \beta) - u[x, -(\mathrm{K}' + gt) + \beta]$$

et, suivant (4), égale au produit

$$u[x, -(\mathrm{K}' + gt) + \beta]\left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\mathrm{K}}\beta}} - 1\right).$$

En divisant par 2β et en faisant décroître β, on trouve la limite

$$-u[x, -(\mathrm{K}' + gt)]\frac{\pi}{\mathrm{K}} = -u(x, \mathrm{K}' + gt)\frac{\pi}{\mathrm{K}}.$$

Le quotient différentiel partiel de u pris par rapport à y devient donc égal au produit de la fonction et du facteur constant $-\frac{\pi}{\mathrm{K}}$. Pour le côté $y = -(\mathrm{K}' + gt)$, le quotient différentiel partiel pris par rapport à y donne la fonction u multipliée par le facteur opposé $\frac{\pi}{\mathrm{K}}$.

Mais, si notre plan est entouré, aux deux côtés $y = \mathrm{K}' + gt$ et $y = -\mathrm{K}' - gt$, par un gaz de la température zéro, le quotient différentiel de la température pris par rapport à la normale de la ligne limite doit tenir un rapport fixe à la température elle-même existante dans la ligne limite. Donc votre fonction u exprime en forme finie la température dans un plan rectiligne, où la chaleur entre dans les environs de $x + iy = 0$ par deux orifices voisins de la manière exposée, où, dans les deux côtés $x = \mathrm{K}$, $x = -\mathrm{K}$, est donnée la température fixe égale à zéro, où les deux côtés $y = \mathrm{K}' + gt$, $y = -(\mathrm{K}' + gt)$ ont un mouvement prescrit proportionnel au temps t, où, dans ces deux côtés le quotient $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u}$ a la raison fixe $-\frac{\pi}{K}$ pour le premier, $+\frac{\pi}{K}$ pour le second côté, conformément à la symétrie, et où, pour $t=0$, l'état initial est exprimé par la fonction

$$u=\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'\left(0, e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right)H\left(2x, e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right)}{H\left(x+iy, e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right)H\left(x-iy, e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right)}.$$

Pendant que le temps procède, le rectangle retient la même hauteur $2K$, tandis que la largeur $2(K'+gt)$ devient de plus en plus grande. Pour un temps infini, la largeur devient infinie, et la température, en équilibre dans le bandeau, est exprimée par la fonction simple

$$\cot\frac{\pi(x+iy)}{2K}+\cot\frac{\pi(x-iy)}{2K}.$$