T. J. STIELTJES

Sur une généralisation de la série de Lagrange

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 93-98
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__93_0>

SUR UNE

GÉNÉRALISATION DE LA SÉRIE DE LAGRANGE,

PAR M. T.-J. STIELTJES.

En posant

$$X = x + a\varphi(X),$$

la série de Lagrange donne le développement d'une fonction quelconque de X sous la forme

$$f(X) = f(x) + \sum_1^\infty \frac{a^m}{1.2\ldots m}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[f'(x)\varphi^m(x)].$$

En prenant la dérivée par rapport à x, et écrivant $f(X)$ au lieu de $f'(X)$, on a aussi

$$f(X)\frac{dX}{dx} = \sum_0^\infty \frac{a^m}{1.2\ldots m}\frac{d^m}{dx^m}[f(x)\varphi^m(x)].$$

Sous cette forme, la série de Lagrange est susceptible d'une généralisation élégante, donnée pour la première fois par M. Darboux (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII).

Supposons que les r variables X, Y, Z, ... soient liées aux variables x, y, z, ... en même nombre par les r équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= x + a\varphi(X, Y, Z, \ldots),\\ Y &= y + b\psi(X, Y, Z, \ldots),\\ Z &= z + c\chi(X, Y, Z, \ldots),\end{aligned}\right.$$

alors, $f(X, Y, Z, \ldots)$ étant une fonction quelconque, on a le développement

$$
\begin{aligned}
f(X, Y, Z, \ldots) \times \Delta
&= \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sum_0^\infty \cdots \frac{a^m b^{m'} c^{m''} \ldots}{1.2\ldots m.1.2\ldots m'.1.2\ldots m''} \\
&\times \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}[f(x, y, z, \ldots)\, \varphi^m(x, y, z, \ldots)\, \psi^{m'}(x, y, z, \ldots)\, \chi^{m''}(x, y, z, \ldots)\ldots]}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},
\end{aligned}
$$

où

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
\frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} & \cdots \\
\frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} & \cdots \\
\frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}.
$$

M. Darboux a donné ce développement dans le cas $r = 2$.

Dans la démonstration suivante, je supposerai $r = 3$, mais elle s'applique dans le cas général.

Comme on le verra, le point principal consiste dans l'établissement des identités

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d}{da}[\Delta f(X, Y, Z)] &= \frac{d}{dx}[\Delta f(X, Y, Z)\, \varphi(X, Y, Z)], \\
\frac{d}{db}[\Delta f(X, Y, Z)] &= \frac{d}{dy}[\Delta f(X, Y, Z)\, \psi(X, Y, Z)], \\
\frac{d}{dc}[\Delta f(X, Y, Z)] &= \frac{d}{dz}[\Delta f(X, Y, Z)\, \chi(X, Y, Z)].
\end{aligned}
\right.
$$

Il suffira, d'ailleurs, de vérifier la première de ces relations, le calcul étant tout à fait analogue pour les deux autres.

Mais, en développant cette relation, il vient

$$
\begin{aligned}
&\Delta\left(f'_X \frac{dX}{da} + f'_Y \frac{dY}{da} + f'_Z \frac{dZ}{da}\right) + f \frac{d\Delta}{da} \\
&= \varphi\Delta\left(f'_X \frac{dX}{dx} + f'_Y \frac{dY}{dx} + f'_Z \frac{dZ}{dx}\right) + f \frac{d(\varphi\Delta)}{dx},
\end{aligned}
$$

en sorte qu'il s'agira d'établir les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{da} = \varphi\,\dfrac{dX}{dx}, \\[2mm] \dfrac{dY}{da} = \varphi\,\dfrac{dY}{dx}, \\[2mm] \dfrac{dZ}{da} = \varphi\,\dfrac{dZ}{dx} \end{cases}$$

et

$$(4)\qquad \frac{d\Delta}{da} = \frac{d(\varphi\Delta)}{dx}.$$

La différentiation de la première des formules (1) donne

$$(5)\qquad \begin{cases} (1 - a\varphi'_X)\,\dfrac{dX}{da} = \varphi + a\varphi'_Y\,\dfrac{dY}{da} + a\varphi'_Z\,\dfrac{dZ}{da}, \\[2mm] (1 - a\varphi'_X)\,\dfrac{dX}{dx} = 1 + a\varphi'_Y\,\dfrac{dY}{dx} + a\varphi'_Z\,\dfrac{dZ}{dx}, \end{cases}$$

et l'on obtient de même

$$(6)\qquad \begin{cases} b\psi'_X\,\dfrac{dX}{da} + (b\psi'_Y - 1)\,\dfrac{dY}{da} + \quad b\psi'_Z\,\dfrac{dZ}{da} = 0, \\[2mm] c\chi'_X\,\dfrac{dX}{da} + \quad c\chi'_Y\,\dfrac{dY}{da} + (c\chi'_Z - 1)\,\dfrac{dZ}{da} = 0 \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad \begin{cases} b\psi'_X\,\dfrac{dX}{dx} + (b\psi'_Y - 1)\,\dfrac{dY}{dx} + \quad b\psi'_Z\,\dfrac{dZ}{dx} = 0, \\[2mm] c\chi'_X\,\dfrac{dX}{dx} + \quad c\chi'_Y\,\dfrac{dY}{dx} + (c\chi'_Z - 1)\,\dfrac{dZ}{dx} = 0. \end{cases}$$

Les équations (6) déterminent les rapports $\dfrac{dX}{da} : \dfrac{dY}{da} : \dfrac{dZ}{da}$, les équations (7) les rapports $\dfrac{dX}{dx} : \dfrac{dY}{dx} : \dfrac{dZ}{dx}$. Or, les coefficients dans les systèmes (6) et (7) étant les mêmes, on a

$$\frac{dX}{da} : \frac{dY}{da} : \frac{dZ}{da} = \frac{dX}{dx} : \frac{dY}{dx} : \frac{dZ}{dx}.$$

Dès lors les équations (5) mettent en évidence les relations (3).

Il reste à vérifier la formule (4). On a

$$\frac{d\Delta}{da} = \begin{vmatrix} \frac{d^2X}{dx\,da} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{d^2Y}{dx\,da} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{d^2Z}{dx\,da} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{d^2X}{dy\,da} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{d^2Y}{dy\,da} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{d^2Z}{dy\,da} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{d^2X}{dz\,da} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{d^2Y}{dz\,da} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{d^2Z}{dz\,da} \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Quant à Δ_1, on a, à cause des relations (3),

$$(8) \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{dX}{dx}\right) & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{dY}{dx}\right) & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{dZ}{dx}\right) & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}.$$

Il vient ensuite

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\frac{dX}{dx}\right) & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\frac{dY}{dx}\right) & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\frac{dZ}{dx}\right) & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \varphi\frac{d^2X}{dy\,dx} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \varphi\frac{d^2Y}{dy\,dx} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \varphi\frac{d^2Z}{dy\,dx} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}$$

ou bien

$$(9) \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi\frac{dX}{dx} & \frac{d^2X}{dy\,dx} & \frac{dX}{dz} \\ \varphi\frac{dY}{dx} & \frac{d^2Y}{dy\,dx} & \frac{dY}{dz} \\ \varphi\frac{dZ}{dx} & \frac{d^2Z}{dy\,dx} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix},$$

et de même

$$(10) \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \varphi\frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{d^2X}{dz\,dx} \\ \varphi\frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{d^2Y}{dz\,dx} \\ \varphi\frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{d^2Z}{dz\,dx} \end{vmatrix}.$$

Les équations (8), (9) et (10) donnent de suite

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{d\Delta}{da} = \frac{d(\varphi\Delta)}{dx},$$

c'est-à-dire la formule (4).

La première des équations (2) est ainsi établie parfaitement, les deux autres s'obtiennent de la même manière.

Par une application répétée de ces relations, on trouve de suite

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{m+m'+m''}[\Delta f(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})]}{da^m\, db^{m'}\, dc^{m''}} \\ &\quad = \frac{d^{m+m'+m''}[\Delta f(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})\, \varphi^m(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})\, \psi^{m'}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})\, \chi^{m''}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})]}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}}. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir le coefficient de $\dfrac{a^m b^{m'} c^{m''}}{1.2\ldots m.1.2\ldots m'.1.2\ldots m''}$ dans le développement de $\Delta f(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$, il suffit de supposer $a = b = c = 0$, dans cette formule (11). Or, dans cette supposition, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{X}}{dx} = 1, \quad \frac{d\mathrm{X}}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathrm{X}}{dz} = 0, \\ &\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = 0, \quad \frac{d\mathrm{Y}}{dy} = 1, \quad \frac{d\mathrm{Y}}{dz} = 0, \\ &\frac{d\mathrm{Z}}{dx} = 0, \quad \frac{d\mathrm{Z}}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = 1, \end{aligned}$$

donc $\Delta = 1$; de plus $\mathrm{X} = x$, $\mathrm{Y} = y$, $\mathrm{Z} = z$, en sorte que ce coefficient est égal à

$$\frac{d^{m+m'+m''}[f(x,y,z)\,\varphi^m(x,y,z)\,\psi^{m'}(x,y,z)\,\chi^{m''}(x,y,z)]}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}},$$

comme nous l'avons annoncé.

Je terminerai par la remarque suivante. Dans le Tome 54 du *Journal de Crelle,* M. Heine a déduit la formule de Lagrange à l'aide du calcul des variations. Cette démonstration peut être généralisée facilement, de manière à obtenir la formule que nous venons de démontrer, le déterminant fonctionnel Δ s'introduisant alors de la manière la plus naturelle. Mais les formules (2) et la formule (11) qui s'en déduit immédiatement paraissent assez remarquables en elles-mêmes : c'est ce qui nous a fait préférer la méthode plus élémentaire que nous venons de développer.