A. MARKOFF

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 81-88
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__81_0>

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE,

PAR M. MARKOFF,

PRIVAT-DOCENT A L'UNIVERSITÉ DE SAINT-PÉTERSBOURG.

Permettez-moi de vous communiquer les résultats de mes recherches sur un certain genre de questions de maxima et minima, provoquées par le Mémoire de M. Tchebycheff *Sur les valeurs limites des intégrales*, inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, en 1874. La question posée par l'illustre géomètre, dans le Mémoire mentionné, peut être énoncée comme il suit :

Une masse donnée α_0 *est distribuée d'une manière inconnue sur une droite* AB *de longueur* l.

Convenons de déterminer la position de chaque point Y *de cette droite par sa distance du point* A

$$AY = y$$

et désignons par m *la masse du point* Y *ou par* $f(y)$ *la densité au point* Y, *de sorte que*

$$\alpha_0 = \sum m \qquad \text{ou} \qquad \int_0^l f(y)\,dy.$$

On demande de trouver une telle distribution de la masse α_0 *pour laquelle les sommes*

$$\sum m, \quad \sum my, \quad \sum my^2, \quad \ldots, \quad \sum my^n,$$

ou, ce qui est la même chose, les intégrales

$$\int_0^l f(y)\,dy, \quad \int_0^l f(y)y\,dy, \quad \int_0^l f(y)y^2\,dy, \quad \ldots, \quad \int_0^l f(y)y^n\,dy$$

aient des valeurs données a priori, *respectivement égales à*

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

et, en même temps, la masse d'un segment donné CD ($AC = u$, $AD = v$), *c'est-à-dire l'intégrale*

$$\int_u^v f(y)\,dy,$$

soit un maximum ou un minimum.

M. Tchebycheff a donné, mais sans aucune explication, la solution de cette question dans le cas où n est égal à un nombre impair $2k-1$, et les nombres u et v sont deux racines quelconques du dénominateur de la $k^{ième}$ fraction convergente $\frac{\psi_k(z)}{\varphi_k(z)}$ dans le développement de l'intégrale

$$\int_0^l \frac{f(y)\,dy}{z-y}$$

en fraction continue.

Il a aussi indiqué le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_0^v f(y)\,dy$$

dans le cas de trois données

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2.$$

Ayant fixé mon attention sur ce genre de questions, je me suis proposé d'abord de démontrer les inégalités de M. Tchebycheff, qui donnent la solution de la question posée dans le premier cas particulier mentionné ci-dessus, et je suis parvenu au but en 1883.

Ma démonstration, fondée sur la considération des paraboles d'ordres supérieurs, tangentes aux courbes données dans un nombre donné de points, se trouve insérée, en français, dans les *Mathematische Annalen* de M. Klein, pour 1884.

J'ai reconnu ensuite que les mêmes considérations peuvent être appliquées à la solution de la question générale, si le point C coïncide avec A ($u = 0$), c'est-à-dire à la détermination du maximum et minimum de l'intégrale

$$\int_0^v f(y)\,dy,$$

et, en généralisant encore la question, aussi à la détermination du maximum et minimum de l'intégrale

$$\int_0^v \Omega(y) f(y)\,dy,$$

$\Omega(y)$ étant une fonction donnée quelconque, assujettie seulement à quelques restrictions.

Les résultats auxquels je suis parvenu ainsi sont contenus dans les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Pour n égal à un nombre impair $2k-1$, les conditions du problème étant satisfaites, la masse totale de la droite* AB *peut être concentrée sur $k+1$ points de la droite, savoir le point* D, *$k-1$ autres points, qui se déterminent par les données du problème et le point* A *ou* B, *selon que les nombres*

$$\varphi_k(v) \quad \text{et} \quad W_{k-1}(v),$$

$W_{k-1}(z)$ *désignant le dénominateur de la* $(k-1)^{ième}$ *fraction convergente de l'intégrale*

$$\int_0^l \frac{f(y)y(l-y)}{z-y}\,dy$$

ont des signes égaux ou différents.

Les distances

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{k-1}$$

du point A aux $k-1$ points en question sont les racines de l'équation

$$\frac{\varphi(z)}{(z-v)(z-v')} = 0,$$

v' étant égal à 0 dans le premier cas et à l dans le second et $\varphi(z)$

une fonction entière de degré $k+1$ déterminée par les conditions

$$\varphi(v)=0, \qquad \varphi(v')=0,$$

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)y^i\,dy=0 \qquad \text{pour } i=0,1,2,\ldots,k-2.$$

La masse correspondant à la distance x_i est donnée par la formule

$$m_i=\frac{\psi(x_i)}{\varphi(x_i)},$$

où

$$\psi(z)=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}\,dy.$$

Cette distribution de la masse donne le maximum de la masse du segment AD, quand on rapporte le point D au segment AD, et le minimum, quand on le rapporte au segment DB.

La même distribution donne aussi le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_0^v \Omega(y)f(y)\,dy,$$

$\Omega(y)$ étant une fonction quelconque, dont les dérivées

$$\Omega'(y), \quad \Omega''(y), \quad \ldots, \quad \Omega^{(n+1)}(y)$$

ne deviennent jamais négatives entre les limites 0 et l, ainsi que la fonction $\Omega(y)$ elle-même.

Théorème II. — *Si n est égal à $2k-1$, comme ci-dessus, pour toute fonction $\Omega(y)$ dont la dérivée d'ordre $n+1$ n'est jamais négative entre les limites 0 et l, le minimum de l'intégrale*

$$\int_0^l \Omega(y)f(y)\,dy$$

correspond à la concentration de la masse totale sur k points dont les distances de A sont les racines de l'équation

$$\varphi_k(z)=0,$$

et le maximum à la concentration sur les points A *et* B *et* $k - 1$ *autres points dont les distances de* A *sont les racines de l'équation*

$$W_{k-1}(z) = 0.$$

THÉORÈME III. — *Pour n égal à un nombre pair $2k$, les conditions du problème étant satisfaites, la masse totale peut être concentrée sur le point* D *et k autres points ou sur les points* D, A, B *et* $k - 1$ *autres points, selon que les dénominateurs*

$$U_k(v, 0) \quad \text{et} \quad U_k(v, l)$$

des $k^{\text{ièmes}}$ fractions convergentes respectivement des intégrales

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y}{v - y}\,dy \quad \text{et} \quad \int_0^l \frac{(l - y)\,f(y)}{v - y}\,dy$$

ont des signes égaux ou contraires.

Dans le premier cas, les distances du point A aux K points en question se déterminent comme les racines de l'équation

$$\frac{\varphi(z)}{z - v} = 0,$$

où $\varphi(z)$ est une fonction entière du degré $k + 1$, déterminée par les conditions

$$\varphi(v) = 0,$$

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,y^i\,dy = 0 \qquad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, k - 1.$$

Dans le second, les distances du point A aux $k - 1$ points cherchés seront les racines de l'équation

$$\frac{\varphi(z)}{z(z - l)(z - v)} = 0,$$

où $\varphi(z)$ est une fonction entière de degré $k + 2$ s'annulant pour $z = 0$, $z = l$, $z = v$ et satisfaisant aux conditions

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,y^i\,dy = 0 \qquad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, k - 2.$$

La même distribution donne aussi le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_0^v \Omega(y) f(y)\, dy,$$

$\Omega(y)$ étant une fonction quelconque, qui ne devient jamais négative, ainsi que ses dérivées

$$\Omega'(y), \qquad \Omega''(y), \qquad \ldots, \qquad \Omega^{(n+1)}(y),$$

entre les limites o et l.

Théorème IV. — *Le nombre n étant égal à $2k$, pour toute fonction $\Omega(y)$ dont la dérivée d'ordre $n+1$ ne devient jamais négative entre les limites o et l, le minimum de l'intégrale*

$$\int_0^l \Omega(y) f(y)\, dy$$

correspond à la concentration de la masse totale sur le point A *et k autres points, dont les distances de* A *sont les racines de l'équation*

$$U_k(x, o) = o,$$

et le maximum à la concentration sur le point B *et k autres points dont les distances de* A *sont les racines de l'équation*

$$U_k(x, l) = o.$$

Toutes ces propositions, contenant la solution complète des questions posées ci-dessus, ont été démontrées par moi dans ma dissertation *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, publiée en russe en 1884.

Eu égard au théorème II, je ferai remarquer qu'il m'a servi aussi pour le terme complémentaire de la formule connue des quadratures de Gauss et d'autres formules analogues.

D'ailleurs, j'ai obtenu l'expression de ce terme complémentaire en suivant encore une autre voie et prenant pour point de départ l'expression précise du terme complémentaire de la formule d'interpolation de Lagrange, que vous avez donnée dans le T. 84 du *Journal de Crelle*.

Cette nouvelle déduction est publiée en français dans un article des *Mathematische Annalen* pour 1885. Dans ce dernier temps, je suis parvenu à la conclusion que des théorèmes, tout à fait analogues aux précédents (en faisant abstraction des formules qui servent à déterminer les distances des points cherchés au point A), peuvent être énoncés dans le cas très général, quand les données sont les intégrales

$$\int_0^l f(y)\lambda_1(y)\,dy, \quad \int_0^l f(y)\lambda_2(y)\,dy, \quad \ldots, \quad \int_0^l f(y)\lambda_{n+1}(y)\,dy,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ étant des fonctions quelconques données, assujetties seulement aux conditions que les déterminants

$$\lambda_1, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \\ \lambda''_1 & \lambda''_2 & \lambda''_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n+1} \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \ldots & \lambda'_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n-1)} \\ \lambda_1^{(n)} & \lambda_2^{(n)} & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

soient toujours positifs entre les limites $y = 0$ et $y = l$, et quand il s'agit de trouver les maxima et minima des intégrales

$$\int_0^l \Omega(y) f(y)\,dy \quad \text{et} \quad \int_0^v \Omega(y) f(y)\,dy.$$

Seulement, quand on a à trouver le maximum et le minimum de la première intégrale, il faut restreindre la fonction $\Omega(y)$ par la condition que

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n+1} & \Omega \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \ldots & \lambda'_{n+1} & \Omega' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{(n)} & \lambda_2^{(n)} & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n)} & \Omega^{(n)} \\ \lambda_1^{(n+1)} & \lambda_2^{(n+1)} & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n+1)} & \Omega^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

soit > 0 pour toutes les valeurs de y de 0 à l, et, dans la recherche du maximum et minimum de la seconde intégrale, il faudra poser $n+2$ conditions analogues. Ces restrictions me sont indispensables pour pouvoir étendre certaines propositions, concernant les fonctions entières, aux fonctions de la forme

$$p_1\lambda_1(y) + p_2\lambda_2(y) + \ldots + p_{n+1}\lambda_{n+1}(y),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ désignant des constantes.

Ainsi, par exemple, au lieu du théorème I, je puis énoncer le suivant :

Théorème I généralisé. — *Pour n impair égal à $2k - 1$, le maximum et le minimum de l'intégrale*

$$\int_0^v \Omega(y) f(y)\, dy$$

correspond à la concentration de la masse de AB *sur le point* D, *sur un des points* A *et* B *et sur $k - 1$ certains autres points.*

Les trois autres théorèmes peuvent être généralisés d'une manière analogue.

En terminant, je dois faire remarquer que M. Stieltjes a démontré les inégalités de M. Tchebycheff presque à la même époque que moi et, en outre, dans la Note des *Comptes rendus* (novembre 1884), a indiqué une proposition analogue aux théorèmes II et IV.

Cette proposition de M. Stieltjes est contenue dans mes théorèmes II et IV généralisés, comme cas particulier.