

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. GOMES TEIXEIRA

**Deuxième note sur le développement des fonctions satisfaisant  
à une équation différentielle**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 4 (1887), p. 107-110

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1887\\_3\\_4\\_\\_107\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__107_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DEUXIÈME NOTE  
SUR LE  
DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

SATISFAISANT

A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE,

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,

ANCIEN PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COÏMBRE, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
DE PORTO.

THÉORÈME I. — *La série*

$$(1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

où  $a_0, a_1, a_2, \dots$  représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à  $x, y, y', \dots, y^{(i)}$  à coefficients entiers

$$(2) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(i)}) = 0,$$

si les dénominateurs de  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  contiennent indéfiniment des facteurs premiers supérieurs respectivement à  $n + 1, n + 2, \dots$

En effet, on peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$(3) \quad \sum A x^a y^b (y')^c \dots (y^{(i)})^h = 0,$$

et alors, si on la dérive  $n$  fois au moyen de la formule de Leibnitz, on

trouve le résultat symbolique

$$\sum A[x^a + y^b (y')^c \dots (y^{(i)})^h]^{(n)} = 0,$$

qui, en posant  $x = 0$ , donne

$$\sum A n(n-1) \dots (n-a+1) [y^b (y')^c \dots (y^{(i)})^h]_{x=0}^{(n-a)} = 0.$$

En appliquant une autre fois la formule de Leibnitz au produit

$$y^b (y')^c \dots (y^{(i)})^h,$$

on trouve le résultat symbolique

$$\sum A n(n-1) \dots (n-a+1) (y_0 + y_0' + \dots + y_0^{(i)} + y_0^{(i)'} + \dots)^{(n-a)} = 0,$$

où entrent  $b$  termes égaux à  $y$ ,  $c$  termes égaux à  $y'$ , etc.

Donc

$$\sum A n(n-1) \dots (n-a+1) S \frac{(n-a)! y_0^{(\alpha)} y_0^{(\alpha')} \dots y_0^{(\beta)} y_0^{(\beta')} \dots (y_0^{(i)})^{(\lambda)} (y_0^{(i)})^{(\lambda')} \dots}{\alpha! \alpha'! \dots \beta! \beta'! \dots \lambda! \lambda'! \dots} = 0,$$

où la somme  $S$  se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha + \alpha' + \dots + \beta + \beta' + \dots + \lambda + \lambda' + \dots = n - a,$$

et où le nombre des quantités  $\alpha, \alpha', \dots$  est  $b$ , où le nombre des quantités  $\beta, \beta', \dots$  est  $c$ , etc.

En séparant maintenant les termes de cette équation qui contiennent  $y_0^{(n)}$ , on trouve un résultat de la forme suivante

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \sum AS_{\omega} \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!} \frac{y_0^{(\alpha')}}{\alpha'!} \dots \frac{y_0^{(\beta+1)}}{(\beta+1)!} \frac{y_0^{(\beta'+1)}}{(\beta'+1)!} \dots \frac{y_0^{(\lambda+i)}}{(\lambda+i)!} \frac{y_0^{(\lambda'+i)}}{(\lambda'+i)!} \dots \\ & + \sum A(n+1) \dots (n+i) h y_0^a y_0'^b \dots (y_0^{(i)})^{h-1} \frac{y_0^{(n+i)}}{(n+i)!} = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\omega = (\beta + 1)(\beta' + 1) \dots (\lambda + 1)(\lambda' + 1) \dots (\lambda + 2)(\lambda' + 2) \dots (\lambda + i)(\lambda' + i) \dots$$

De cette formule on tire le théorème énoncé. En effet, elle fait voir que  $\frac{y_0^{(n+i)}}{(n+i)!} = a_{n+i}$  ne peut contenir en dénominateur que les facteurs premiers qui entrent dans les dénominateurs des fractions antérieures  $\frac{y_0^{(n+i-1)}}{(n+i-1)!}$ ,  $\frac{y_0^{(n+i-2)}}{(n+i-2)!}$ , ...; ceux qui entrent dans le numérateur de

$$\sum \Lambda h y_0^\alpha y_0^{\beta'} \dots (y_0^{(i)})^{h-1} = \left[ \frac{dF(x, y, \dots, y^{(i)})}{dy^{(i)}} \right]_{x=0},$$

et ceux qui entrent en  $(n+1) \dots (n+i)$ .

Le théorème énoncé est donc démontré si le coefficient  $\left( \frac{dF}{dy^{(i)}} \right)_{x=0}$  n'est pas nul.

Si l'on a

$$\left( \frac{dF}{dy^{(i)}} \right)_{x=0} = 0,$$

on doit séparer, dans l'équation (4), les termes qui contiennent  $y_0^{(n+i-1)}$ , et l'on trouve un résultat de la forme suivante

$$\begin{aligned} & \sum \Lambda S \omega \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!} \frac{y_0^{(\alpha')}}{\alpha'!} \dots \frac{y_0^{(\beta+1)}}{(\beta+1)!} \frac{y_0^{(\beta'+1)}}{(\beta'+1)!} \dots \\ & + (n+1)(n+2) \dots (n+i-1) y_0^{(i+1)} \\ & \times \sum \Lambda h(h-1) y_0^\alpha y_0^{\beta'} \dots y_0^{(i)h-2} \frac{y_0^{(n+i-1)}}{(n+i-1)!} = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire le théorème, comme dans le cas précédent.

Si

$$\sum \Lambda h(h-1) y_0^\alpha y_0^{\beta'} \dots y_0^{(i)h-2} = \left( \frac{d^2 F}{dy^{(i)2}} \right)_{x=0} = 0,$$

on doit séparer, dans l'équation (4), les termes qui contiennent  $y_0^{(n+i-2)}$ , et l'on démontre le théorème si la dérivée  $\left( \frac{d^3 F}{dy^{(i)3}} \right)_{x=0}$  n'est pas nulle.

En continuant de la même manière, on arrive à une équation d'où l'on peut tirer le théorème énoncé, parce que, l'équation (2) ne pouvant donner un nombre infini de valeurs pour  $y_0^{(i)}$ , les dérivées  $\left(\frac{dF}{dy^{(i)}}\right)_{x=0}$ ,  $\left(\frac{d^2F}{dy^{(i)2}}\right)_{x=0}$ , ... ne peuvent pas être indéfiniment nulles.

---