F. GOMES TEIXEIRA

Deuxième note sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 107-110

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__107_0>

DEUXIÈME NOTE

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

SATISFAISANT

A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE,

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,

ANCIEN PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COÏMBRE, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PORTO.

THÉORÈME I. — *La série*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2, ... *représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à* x, y, y', ..., $y^{(i)}$ *à coefficients entiers*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)}) = 0, \tag{2}$$

si les dénominateurs de a_{n+1}, a_{n+2}, ... *contiennent indéfiniment des facteurs premiers supérieurs respectivement à* $n+1$, $n+2$, ...

En effet, on peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\sum A x^a y^b (y')^c \ldots (y^{(i)})^h = 0, \tag{3}$$

et alors, si on la dérive n fois au moyen de la formule de Leibnitz, on trouve le résultat symbolique

$$\sum \mathrm{A}[x^a + y^b(y')^c \ldots (y^{(i)})^h]^{(n)} = 0,$$

qui, en posant $x = 0$, donne

$$\sum \mathrm{A}\, n(n-1)\ldots(n-a+1)\,[y^b(y')^c\ldots(y^{(i)})^h]_{x=0}^{(n-a)} = 0.$$

En appliquant une autre fois la formule de Leibnitz au produit

$$y^b(y')^c\ldots(y^{(i)})^h,$$

on trouve le résultat symbolique

$$\sum \mathrm{A}\, n(n-1)\ldots(n-a+1)\,(y_0 + y_0 + \ldots + y'_0 + y'_0 + \ldots + y_0^{(i)} + y_0^{(i)} + \ldots)^{(n-a)} = 0,$$

où entrent b termes égaux à y, c termes égaux à y', etc.

Donc

$$\sum \mathrm{A}\, n(n-1)\ldots(n-a+1)\, \mathrm{S}\, \frac{(n-a)!\, y_0^{(\alpha)} y_0^{(\alpha')} \ldots y_0'^{(\beta)} y_0'^{(\beta')} \ldots (y_0^{(i)})^{(\lambda)} (y^{(i)})^{(\lambda')} \ldots}{\alpha!\, \alpha'! \ldots \beta!\, \beta'! \ldots \lambda!\, \lambda! \ldots} = 0,$$

où la somme S se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha + \alpha' + \ldots + \beta + \beta' + \ldots + \lambda + \lambda' + \ldots = n - a,$$

et où le nombre des quantités α, α', ... est b, où le nombre des quantités β, β', ... est c, etc.

En séparant maintenant les termes de cette équation qui contiennent $y_0^{(n)}$, on trouve un résultat de la forme suivante

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \mathrm{AS}_\omega \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!} \frac{y_0^{(\alpha')}}{\alpha'!} \cdots \frac{y_0^{(\beta+1)}}{(\beta+1)!} \frac{y_0^{(\beta'+1)}}{(\beta'+1)!} \cdots \frac{y_0^{(\lambda+i)}}{(\lambda+i)!} \frac{y_0^{(\lambda'+i)}}{(\lambda'+i)!} \cdots \\ &\qquad + \sum \mathrm{A}(n+1)\ldots(n+i)\, h\, y_0^a y_0'^b \ldots (y_0^{(i)})^{h-1} \frac{y_0^{(n+i)}}{(n+i)!} = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\omega = (\beta+1)(\beta'+1)\ldots(\lambda+1)(\lambda'+1)\ldots(\lambda+2)(\lambda'+2)\ldots(\lambda+i)(\lambda'+i)\ldots.$$

De cette formule on tire le théorème énoncé. En effet, elle fait voir que $\frac{y_0^{(n+i)}}{(n+i)!} = a_{n+i}$ ne peut contenir en dénominateur que les facteurs premiers qui entrent dans les dénominateurs des fractions antérieures $\frac{y_0^{(n+i-1)}}{(n+i-1)!}, \frac{y_0^{(n+i-2)}}{(n+i-2)!}, \cdots$; ceux qui entrent dans le numérateur de

$$\sum \mathrm{A} h y_0^a y_0'^b \ldots (y_0^{(i)})^{h-1} = \left[\frac{d\mathrm{F}(x, y, \ldots, y^{(i)})}{dy^{(i)}}\right]_{x=0},$$

et ceux qui entrent en $(n+1)\ldots(n+i)$.

Le théorème énoncé est donc démontré si le coefficient $\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy^{(i)}}\right)_{x=0}$ n'est pas nul.

Si l'on a

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy^{(i)}}\right)_{x=0} = 0,$$

on doit séparer, dans l'équation (4), les termes qui contiennent $y_0^{(n+i-1)}$, et l'on trouve un résultat de la forme suivante

$$\begin{aligned}&\sum \mathrm{AS}\,\omega \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!}\frac{y_0^{(\alpha')}}{\alpha'!}\cdots\frac{y_0^{(\beta+1)}}{(\beta+1)!}\frac{y_0^{(\beta'+1)}}{(\beta'+1)!}\cdots\\ &\quad+(n+1)(n+2)\ldots(n+i-1)y_0^{(i+1)}\\ &\qquad\times\sum \mathrm{A}\,h(h-1)y_0^a y_0'^b\ldots y_0^{(i)h-2}\frac{y_0^{(n+i-1)}}{(n+i-1)!} = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on tire le théorème, comme dans le cas précédent.

Si

$$\sum \mathrm{A}\,h(h-1)y_0^a y_0'^b\ldots y_0^{(i)h-2} = \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^{(i)2}}\right)_{x=0} = 0,$$

on doit séparer, dans l'équation (4), les termes qui contiennent $y_0^{(n+i-2)}$, et l'on démontre le théorème si la dérivée $\left(\frac{d^3\mathrm{F}}{dy^{(i)}}\right)_{x=0}$ n'est pas nulle.

En continuant de la même manière, on arrive à une équation d'où l'on peut tirer le théorème énoncé, parce que, l'équation (2) ne pouvant donner un nombre infini de valeurs pour $y_0^{(i)}$, les dérivées $\left(\frac{dF}{dy^{(i)}}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^2F}{dy^{(i)2}}\right)_{x=0}$, $\cdots$ ne peuvent pas être indéfiniment nulles.