

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. HURWITZ

**Sur le développement des fonctions satisfaisant à une
équation différentielle algébrique**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 6 (1889), p. 327-332

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6_327_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE
DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

SATISFAISANT

A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ALGÈBRIQUE,

PAR M. A. HURWITZ,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE KOENIGSBERG.



Dans le Tome IV (année 1887) de ces *Annales*, M. Gomes Teixeira a énoncé le théorème suivant :

La série

$$(1) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

où a_0, a_1, a_2, \dots représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à $x, y, y', \dots, y^{(i)}$ à coefficients entiers

$$(2) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(i)}) = 0,$$

si les dénominateurs de a_{n+1}, a_{n+2}, \dots contiennent indéfiniment des facteurs premiers supérieurs respectivement à $n + 1, n + 2, \dots$

Mais ce théorème n'est pas juste. En effet, considérons la série

$$y = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots + \frac{x^n}{(2n)!} + \dots,$$

qui satisfait à l'équation

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$

Le dénominateur $(2n)!$ du coefficient de x^n contient, dès $n = 1$, un facteur premier supérieur à n , attendu qu'il y a toujours au moins un nombre premier entre les limites n et $2n$.

Comment faut-il modifier le théorème de M. Teixeira? Pour répondre à cette question, supposons que la série (1) satisfasse à l'équation (2), sans vérifier une équation de degré moindre en $y^{(i)}$. Désignons, en outre, pour plus de simplicité, par les lettres

$$f_r, g_r, \dots$$

des fonctions entières à coefficients entiers des quantités

$$x, y, y', \dots, y^{(r)}.$$

En différentiant l'équation (2), on trouve un résultat de la forme

$$(3) \quad y^{(i+1)}f_i + g_i = 0.$$

La substitution de la série (1) pour y donnera

$$(4) \quad f_i = Cx^k + \dots, \quad k \geq 0,$$

et nous pouvons admettre $C \geq 0$, la série (1) ne satisfaisant pas à l'équation $f_i \equiv \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = 0$.

Cela posé, différencions l'équation (2) 2ρ fois par rapport à x ; nous obtenons

$$(5) \quad y^{(i+2\rho)}f_i + y^{(i+2\rho-1)}f_{i+1} + \dots + y^{(i+\rho+1)}f_{i+\rho-1} + f_{i+\rho} = 0,$$

comme on le démontre aisément par voie d'induction.

Donnons maintenant à l'entier ρ une valeur déterminée, assujettie

seulement à la condition $i + \rho + 1 \leq i + 2\rho - k$, c'est-à-dire $\rho > k$, et faisons, pour abrégier, $i + 2\rho = p$. L'équation (5) peut alors s'écrire comme suit :

$$(6) \quad y^{(p)}f_i + y^{(p-1)}f_{i+1} + \dots + y^{(p-k)}f_{i+k} + f_{p-k-1} = 0.$$

C'est de cette équation, vérifiée par la série (1) et linéaire par rapport à $y^{(p)}$, $y^{(p-1)}$, ..., $y^{(p-k)}$, que je pars. En la différenciant q fois de suite, je trouve

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} y^{(p+q)}f_i + y^{(p+q-1)}[f_{i+1} + qf'_i] + \dots \\ + y^{(p+q-k)} \left[f_{i+k} + qf'_{i+k-1} + \dots + \left(\frac{q}{k}\right)f_i^{(k)} \right] + f_{p+q-k-1} = 0. \end{array} \right.$$

Ici les coefficients de $y^{(p+q)}$, $y^{(p+q-1)}$, ..., $y^{(p+q-k)}$ se réduisent pour $x = 0$ à des fonctions entières de q à coefficients rationnels. Ces fonctions ne peuvent pas s'évanouir tous, le coefficient de q^k dans la dernière fonction étant C . Ainsi, en posant $x = 0$, l'équation (7) se réduit à

$$y_0^{(p+q-\alpha)}(b_0 + b_1q + \dots + b_\alpha q^\alpha) = G(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(p+q-\alpha-1)}),$$

où l'entier α est compris entre 0 et k . Faisons $p + q - \alpha = m$, nous pouvons écrire finalement

$$(8) \quad y_0^{(m)}(c_0 + c_1m + \dots + c_\alpha m^\alpha) = cG(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)})$$

pour toute valeur de m dépassant une certaine limite, les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_\alpha, c$ étant des nombres entiers indépendants de m .

A partir d'une certaine valeur n de m , le coefficient de $y_0^{(m)}$ ne peut jamais s'annuler. Par conséquent, si $m \geq n$, les facteurs premiers contenus dans le dénominateur de $y_0^{(m)}$ divisent

$$g(m) = c_0 + c_1m + \dots + c_\alpha m^\alpha,$$

autant qu'ils ne sont pas contenus dans les dénominateurs de y_0 ,

$\gamma'_0, \dots, \gamma_0^{(m-1)}$ (1). Désignons par P le produit des nombres premiers qui divisent les dénominateurs de $\gamma_0, \gamma'_0, \dots, \gamma_0^{(m-1)}$. Alors les facteurs premiers des dénominateurs de

$$a_n = \frac{\gamma_0^{(n)}}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{\gamma_0^{(n+1)}}{(n+1)!}, \quad \dots$$

divisent respectivement

$$n! P g(n), \quad (n+1)! P g(n) g(n+1), \quad \dots$$

ou, ce qui revient au même, respectivement

$$\gamma(n), \quad \gamma(n)\gamma(n+1), \quad \dots;$$

si l'on pose

$$\gamma(m) = (m-1)! P m g(m) = \gamma_0 + \gamma_1 m + \dots + \gamma_\nu m^\nu \quad (\gamma_0 = 0, \nu = z+1).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si la série à coefficients rationnels

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

satisfait à une équation différentielle algébrique, il existe une fonction entière à coefficients entiers

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_\nu z^\nu,$$

et un nombre entier n tel que les facteurs premiers contenus dans les dé-

(1) En désignant par d_0, d_1, \dots, d_{n-1} les dénominateurs de $\gamma_0, \gamma'_0, \dots, \gamma_0^{(n-1)}$, on trouve évidemment, à l'aide de l'équation (8),

$$\gamma_0^{(m)} = \frac{A_m}{d_0^{z_0} d_1^{z_1} \dots d_{n-1}^{z_{n-1}} [g(n)]^{\beta_0} [g(n+1)]^{\beta_1} \dots g(m)},$$

A_m représentant un nombre entier.

nominateurs des fractions réduites

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

divisent respectivement

$$\gamma(n), \gamma(n)\gamma(n+1), \gamma(n)\gamma(n+1)\gamma(n+2), \dots$$

Les nombres $\gamma(n)$, $\gamma(n+1)$, $\gamma(n+2)$, ... sont tous différents de zéro.

Nous avons omis l'hypothèse que l'équation différentielle en question soit à coefficients entiers, parce que la série γ satisfait nécessairement à une telle équation, si elle vérifie une équation algébrique quelconque.

C'est là le théorème (généralisation d'une proposition connue d'Eisenstein) qu'il faut substituer au théorème de M. Teixeira.

En se fondant sur notre théorème, il est aisé de former des séries ne vérifiant aucune équation différentielle algébrique.

Considérons, par exemple, la série

$$\gamma = 1 + x + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{27!} + \dots + \frac{x^n}{(n^n)!} + \dots,$$

qui représente une fonction holomorphe pour toutes les valeurs finies de x . Si cette série satisfaisait à une équation différentielle algébrique, il existerait une fonction $\gamma(z)$ jouissant des propriétés énoncées plus haut. Supposons, comme il est permis, que γ , soit positif et déterminons m tellement grand que

$$\gamma(m) > \gamma(m-1), \quad \gamma(m) > \gamma(m-2), \quad \dots, \quad \gamma(m) > \gamma(n), \quad m^m > 2\gamma(m).$$

Comme il y a toujours un nombre premier entre les limites $\gamma(m)$ et $2\gamma(m)$, il est clair que $(m^m)!$ contient au moins un facteur premier qui ne divise pas le produit

$$\gamma(n)\gamma(n+1)\dots\gamma(m).$$

Mais cela ne s'accorde pas avec notre théorème. Ainsi nous avons la proposition :

La fonction

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{27!} + \dots + \frac{x^n}{(n^n)!} + \dots$$

ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique.

Je remarque, en terminant, qu'il y a des fonctions de la même propriété déjà parmi les fonctions élémentaires. En effet, M. Hölder, dans un autre ordre d'idées, a démontré (*Math. Annalen*, t. XXVIII) que la fonction $\Gamma(x)$ d'Euler ne vérifie aucune équation différentielle algébrique.

