

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. BRIOSCHI

Sur l'équation du sixième degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 12 (1895), p. 343-350

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__343_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉQUATION DU SIXIÈME DEGRÉ,

PAR M. F. BRIOSCHI.



1. Soient

$$f(x) = (a_0, a_2, \dots, a_6)(x, 1)^6$$

une forme du sixième degré, et

$$k = \frac{1}{2}(ff)_4,$$

un de ses covariants du quatrième ordre. Les invariants A, B, C des second, quatrième, sixième degrés seront

$$A = \frac{1}{2}(ff)_6,$$

et B, C les deux invariants de la forme biquadratique k . Au lieu de B, C, j'introduirai les invariants suivants

$$L = 4.5(4A^2 - 3.5^2B), \quad M = 8.5(7.8A^3 - 4.3^2.5^2AB - 3^3.5^3C),$$

et j'indiquerai par $6^6\Delta$ le discriminant de f .

Soient φ, ψ deux formes du troisième ordre, et

$$u = \frac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \quad v = \frac{1}{2}(\psi\psi)_2,$$

on a, comme il est connu, les deux invariants simultanés

$$J = (\varphi\psi)_3, \quad E = (uv)_2,$$

et les deux D, R étant D le produit des discriminants des formes φ, ψ , et R le résultant des formes mêmes.

Si l'on suppose $f = \varphi\psi$, on a, entre ces invariants, les relations

$$5A = G - \frac{9}{8}J^2, \quad L = RJ - G^2 - \frac{3^5}{4}D,$$

$$M = G^3 - \frac{3}{2}RJG - \frac{3^6}{4}DG + \frac{1}{2}R^2, \quad 6^6\Delta = 3^6R^2D,$$

ayant posé

$$G = J^2 - 9E,$$

2. Soient x_0, x_1, \dots, x_5 les racines de l'équation $f(x) = 0$; x_0, x_2, x_4 celles de $\varphi(x) = 0$; x_1, x_3, x_5 celles de $\psi(x) = 0$. Les six expressions de ces racines

$$\begin{aligned} l &= a_0(01)(23)(45), & \lambda &= a_0(01)(25)(43), \\ m &= a_0(03)(25)(41), & \mu &= a_0(03)(21)(45), \\ n &= a_0(05)(21)(43), & \nu &= a_0(05)(23)(41), \end{aligned}$$

dans lesquelles $(rs) = x_r - x_s$ ont des propriétés remarquables. On a en premier lieu

$$\begin{aligned} l + m + n &= \lambda + \mu + \nu = 3J, \\ lmn &= \lambda\mu\nu = R, \end{aligned}$$

et, en indiquant par s_1, s_2, s_3 les sommes des trois premières puissances de l, m, n , et par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ celles de λ, μ, ν , on trouve

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 = 3J, \\ s_2 &= 9J^2 - 6G + 3^3D^{\frac{1}{2}}, & \sigma_2 &= 9J^2 - 6G - 3^3D^{\frac{1}{2}}, \\ s_3 &= 3R + 3^3J^3 - 3^3JG + \frac{3^5}{2}JD^{\frac{1}{2}}, & \sigma_3 &= 3R + 3^3J^3 - 3^3JG - \frac{3^5}{2}JD^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et, en conséquence,

$$\begin{aligned} s_2 - \sigma_2 &= 2 \cdot 3^3D^{\frac{1}{2}}, \\ s_2 + \sigma_2 - 2s_1\sigma_1 &= -3 \cdot 4G \end{aligned}$$

ou aussi

$$(1) \quad \begin{cases} \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu - (mn + nl + lm) = 3^3D^{\frac{1}{2}}, \\ \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu + (mn + nl + lm) = 2 \cdot 3G. \end{cases}$$

Je pose

$$\begin{aligned} l &= -(\varepsilon_3 + \varepsilon_5), & \lambda &= \varepsilon_2 + \varepsilon_0, \\ m &= -(\varepsilon_5 + \varepsilon_1), & \mu &= \varepsilon_0 + \varepsilon_4, \\ n &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_3), & \nu &= \varepsilon_4 + \varepsilon_2; \end{aligned}$$

évidemment les équations dont les racines sont $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5$ ou $\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_4$ auront pour coefficients des fonctions des invariants simultanés J, G, D, R. Soient

$$\begin{aligned} z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 &= (z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_3)(z - \varepsilon_5), \\ z^3 + q_1 z^2 + q_2 z + q_3 &= (z - \varepsilon_0)(z - \varepsilon_2)(z - \varepsilon_4); \end{aligned}$$

on trouve, à cause des relations supérieures, que

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{3}{2}J, & q_1 &= -\frac{3}{2}J, \\ p_2 &= 3G - \frac{9}{4}J^2 - \frac{3^3}{2}D^{\frac{1}{2}}, & q_2 &= 3G - \frac{9}{4}J^2 + \frac{3^3}{2}D^{\frac{1}{2}}, \\ p_3 &= -R + \frac{3}{2}Jp_2, & q_3 &= R - \frac{3}{2}Jq_2, \end{aligned}$$

et, en conséquence,

$$p_1 + q_1 = 0, \quad p_3 + q_3 + p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0.$$

Il en résulte que, dans l'équation du sixième degré dont les racines sont $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$, les coefficients de z^5 et z^3 seront nuls, et l'équation même prendra la forme

$$(z^2 + 2.5A)^3 + 3L(z^2 + 2.5A) + 6^3 \Delta^{\frac{1}{2}} z - 2M = 0,$$

A, L, M, Δ étant les invariants définis supérieurement.

Cette équation n'est pas nouvelle, elle a été déjà calculée par le P. Joubert dans son beau travail *Sur l'équation du sixième degré* ⁽¹⁾; mais, dans la forme indiquée ci-dessus, elle se prête à une importante transformation.

3. Avant d'aborder cette transformation, il est nécessaire d'exposer d'autres propriétés des quantités $l, m, n; \lambda, \mu, \nu$.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mai-juin 1867.

Ann. de l'Éc. Normale. 3^e Série. Tome XII. — NOVEMBRE 1895.

Les dix quantités suivantes

$$\begin{aligned} c_{23}^1 &= a_0^2(02)(24)(40)(13)(35)(51), & c_0^1 &= a_0^2(01)(13)(30)(24)(45)(52), \\ c_{12}^1 &= a_0^2(01)(14)(40)(23)(35)(52), & c_{34}^1 &= a_0^2(02)(23)(30)(14)(45)(51), \\ c_{23}^2 &= a_0^2(03)(34)(40)(12)(25)(51), & c_{14}^1 &= a_0^2(01)(12)(20)(34)(45)(53), \\ c_4^1 &= a_0^2(02)(25)(50)(13)(34)(41), & c_{03}^1 &= a_0^2(01)(15)(50)(23)(34)(42), \\ c_{01}^1 &= a_0^2(03)(35)(50)(12)(24)(41), & c_2^1 &= a_0^2(04)(45)(50)(12)(23)(31) \end{aligned}$$

s'expriment par les λ, l, \dots comme il suit

$$(2) \quad \begin{cases} c_0^1 = \lambda\mu - lm, & c_{14}^1 = \lambda\mu - nl, & c_{23}^1 = \lambda\mu - mn, \\ c_{12}^1 = \nu\lambda - lm, & c_{03}^1 = \nu\lambda - nl, & c_4^1 = \nu\lambda - mn, \\ c_{34}^1 = \mu\nu - lm, & c_2^1 = \mu\nu - nl, & c_{01}^1 = \mu\nu - mn, \\ c_3^1 = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu - (mn + nl + lm); \end{cases}$$

de plus,

$$\begin{aligned} c_{01}^2 c_{23}^2 c_4^2 &= -mnc_3^2, & c_{01}^2 c_2^2 c_{34}^2 &= \mu\nu c_5^2, \\ c_{03}^2 c_{14}^2 c_2^2 &= nlc_3^2, & c_4^2 c_{03}^2 c_{12}^2 &= \nu\lambda c_3^2, \\ c_0^2 c_{12}^2 c_{34}^2 &= -lmc_3^2, & c_{23}^2 c_{14}^2 c_0^2 &= \lambda\mu c_3^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 3^3 D^1 &= c_3^1, & R c_3^1 &= \Pi c, \\ 2.3 G c_3^2 &= c_{01}^2 c_2^2 c_{34}^2 + c_4^2 c_{03}^2 c_{12}^2 + c_{23}^2 c_{14}^2 c_0^2 - c_{01}^2 c_{23}^2 c_4^2 \\ &\quad + c_{03}^2 c_{14}^2 c_2^2 - c_0^2 c_{12}^2 c_{34}^2 \quad (1). \end{aligned}$$

4. La transformation de l'équation due au P. Joubert s'obtient en posant

$$y = -(z^2 + 2.5A),$$

et l'on a la transformée

$$(y^3 + 3Ly + 2M)^2 + 6^2 \Delta (y + 2.5.A) = 0.$$

Or,

$$z_1^2 = \frac{1}{4}(2l - s_1)^2 = \frac{9}{4}J^2 - l(m+n),$$

et, en conséquence,

$$y_1 = -2(4 + l(m+n)),$$

(1) BURKHARDT, *Hyperelliptischen Modulfunctionen* (*Math. Annalen*, Bd. XXXVI, p. 409).

ou, en se rappelant les valeurs (1) et (2),

$$y_1 = \frac{1}{3}(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu - 3mn) - 2 \cdot 3^2 \cdot D^{\frac{1}{2}},$$

et enfin

$$y_1 = \frac{1}{3}(-2c_3^4 + c_{23}^4 + c_4^4 + c_{01}^4),$$

$$y_3 = \frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_{14}^4 + c_{03}^4 + c_2^4),$$

$$y_5 = \frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_0^4 + c_{12}^4 + c_{34}^4)$$

et, analogiquement,

$$y_4 = -\frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_{01}^4 + c_2^4 + c_{34}^4),$$

$$y_2 = -\frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_4^4 + c_{03}^4 + c_{12}^4),$$

$$y_0 = -\frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_{23}^4 + c_{14}^4 + c_0^4).$$

Les invariants L, M, Δ, ΛΔ, coefficients de la transformée, s'expriment par conséquent en fonctions des dix quantités c_{rs}^4 . On trouve, par exemple,

$$L = -\frac{1}{3^2 \cdot 4} \Sigma c^8.$$

5. Ce résultat conduit directement à la résolution de l'équation du sixième degré. En effet, posons

$$u_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{J(x)}}, \quad u_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{J(x)}}$$

et indiquons par $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}; \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, \omega_{24}$ les périodes normales primitives. Soient

$$p_{rs} = \omega_{1r}\omega_{2s} - \omega_{2r}\omega_{1s} = -p_{sr}$$

et

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{p_{12}}(\omega_{22}u_1 - \omega_{12}u_2), & \nu_2 &= \frac{1}{p_{21}}(\omega_{21}u_1 - \omega_{11}u_2), \\ \tau_{11} &= \frac{p_{32}}{p_{12}}, & \tau_{12} &= \frac{p_{42}}{p_{12}} = \frac{p_{13}}{p_{12}}, & \tau_{22} &= \frac{p_{14}}{p_{12}}; \end{aligned}$$

enfin

$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu_1, \nu_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

une des dix fonctions \mathfrak{S} paires, et \mathfrak{S}_{rs} la même fonction dans laquelle on a posé $\nu_1 = \nu_2 = 0$. On sait qu'en indiquant par ρ la quantité

$$\rho = \frac{(2\pi i)^2}{\rho_{12}},$$

l'on a

$$\rho^2 \mathfrak{S}_{rs}^k = c_{rs}^k,$$

et les racines de la transformée pourront s'écrire

$$y_1 = \frac{\rho^2}{3} (-2\mathfrak{S}_3^k + \mathfrak{S}_{23}^k + \mathfrak{S}_4^k + \mathfrak{S}_{01}^k),$$

et de même pour les autres. L'équation du sixième degré est ainsi résolue. Les beaux résultats obtenus par MM. Bolza et Maschke (1) trouvent de cette manière leur connexion directe.

6. Supposons que l'équation $f(x) = 0$ ait une racine double, par exemple $x_3 = x_4$. On a

$$l = 0, \quad \mu = 0, \quad R = 0, \quad \Delta = 0.$$

En posant

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0(01)(23), & \beta &= a_0(02)(31), & \gamma &= a_0(03)(12), \\ h &= (40)(41)(42)(43), \end{aligned}$$

les relations (2) donnent

$$\begin{aligned} c_0 &= c_{14} = c_{34} = c_2 = 0; \\ c_{12}^k &= c_{03}^k = h\alpha, & c_4^k &= c_5^k = -h\beta, & c_{23}^k &= c_{01}^k = h\gamma, \end{aligned}$$

et l'on a

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

(1) *Darstellung der rationalen ganzen Invarianten, etc.*, von Bolza. — *Ueber die lineare Gruppe der Borchardt'schen Moduln*, von Maschke (*Math. Annalen*, Bd. XXX).

Des relations (1) on déduit

$$G = \frac{1}{6}h(\alpha - \gamma), \quad 3^3.D^{\frac{1}{2}} = -h\beta.$$

En posant

$$F(x) = a_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

on aura

$$f(x) = (x - x_4)^2 F(x)$$

et, en conséquence,

$$u_1 - x_4 u_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Les racines $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ de la transformée deviennent deux à deux égales, et l'on a

$$\gamma_3 = \gamma_5 = \frac{h}{3}(\beta - \gamma), \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{h}{3}(\gamma - \alpha), \quad \gamma_0 = \gamma_4 = \frac{h}{3}(\alpha - \beta);$$

enfin, en indiquant par g_2, g_3 les invariants de la forme biquadratique $F(x)$, on trouve

$$3L = -4g_2h^2, \quad 2M = -4^2g_3h^3$$

et la transformée, en posant $y = 4h\xi$, devient

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0,$$

dont les racines sont, comme il est connu,

$$\xi_1 = \frac{1}{12}(\beta - \gamma), \quad \xi_2 = \frac{1}{12}(\gamma - \alpha), \quad \xi_3 = \frac{1}{12}(\alpha - \beta),$$

ou aussi

$$\xi_1 = \frac{1}{3}\rho^2(\mathfrak{S}_0^4 + \mathfrak{S}_3^4), \quad \xi_2 = \frac{1}{3}\rho^2(-\mathfrak{S}_0^4 + \mathfrak{S}_2^4), \quad \xi_3 = -\frac{1}{3}\rho^2(\mathfrak{S}_2^4 + \mathfrak{S}_3^4)$$

étant ⁽¹⁾

$$\rho = \frac{\pi}{2\sigma}, \quad \mathfrak{S}_0^i + \mathfrak{S}_2^i = \mathfrak{S}_3^i.$$

(1) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, première Partie, p. 258.

