F. BRIOSCHI

Sur l'équation du sixième degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 343-350
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__343_0>

SUR L'ÉQUATION DU SIXIÈME DEGRÉ,

PAR M. F. BRIOSCHI.

1. Soient
$$f(x) = (a_0, a_2, \ldots, a_6)(x, 1)^6$$
une forme du sixième degré, et
$$k = \frac{1}{2}(ff)_4$$
un de ses covariants du quatrième ordre. Les invariants A, B, C des second, quatrième, sixième degrés seront
$$A = \frac{1}{2}(ff)_6,$$
et B, C les deux invariants de la forme biquadratique k. Au lieu de B, C, j'introduirai les invariants suivants
$$L = 4.5(4A^2 - 3.5^2B), \qquad M = 8.5(7.8A^3 - 4.3^2.5^2AB - 3^3.5^3C),$$
et j'indiquerai par $6^6\Delta$ le discriminant de f.

Soient φ, ψ deux formes du troisième ordre, et
$$u = \frac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \qquad v = \frac{1}{2}(\psi\psi)_2,$$
on a, comme il est connu, les deux invariants simultanés
$$J = (\varphi\psi)_3, \qquad E = (uv)_2,$$
et les deux D, R étant D le produit des discriminants des formes φ, ψ, et R le résultant des formes mêmes.

Si l'on suppose $f = \varphi\psi$, on a, entre ces invariants, les relations

$$5A = G - \frac{9}{8}J^2, \qquad L = RJ - G^2 - \frac{3^5}{4}D,$$

$$M = G^3 - \frac{3}{2}RJG - \frac{3^6}{4}DG + \frac{1}{2}R^2, \qquad 6^6\Delta = 3^6R^2D,$$

ayant posé

$$G = J^2 - 9E,$$

2. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_5$ les racines de l'équation $f(x) = 0$; x_0, x_2, x_4 celles de $\varphi(x) = 0$; x_1, x_3, x_5 celles de $\psi(x) = 0$. Les six expressions de ces racines

$$\begin{aligned} l &= a_0(01)(23)(45), & \lambda &= a_0(01)(25)(43), \\ m &= a_0(03)(25)(41), & \mu &= a_0(03)(21)(45), \\ n &= a_0(05)(21)(43), & \nu &= a_0(05)(23)(41), \end{aligned}$$

dans lesquelles $(rs) = x_r - x_s$ ont des propriétés remarquables. On a en premier lieu

$$l + m + n = \lambda + \mu + \nu = 3J,$$
$$lmn = \lambda\mu\nu = R,$$

et, en indiquant par s_1, s_2, s_3 les sommes des trois premières puissances de l, m, n, et par σ_1, σ_2, σ_3 celles de λ, μ, ν, on trouve

$$s_1 = \sigma_1 = 3J,$$

$$s_2 = 9J^2 - 6G + 3^3D^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma_2 = 9J^2 - 6G - 3^3D^{\frac{1}{2}},$$

$$s_3 = 3R + 3^3J^3 - 3^3JG + \frac{3^5}{2}JD^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma_3 = 3R + 3^3J^3 - 3^3JG - \frac{3^5}{2}JD^{\frac{1}{2}},$$

et, en conséquence,

$$\begin{aligned} s_2 - \sigma_2 &= 2.3^3D^{\frac{1}{2}}, \\ s_2 + \sigma_2 - 2s_1\sigma_1 &= -3.4G \end{aligned}$$

ou aussi

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu - (mn + nl + lm) &= 3^3D^{\frac{1}{2}}, \\ \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu + (mn + nl + lm &= 2.3G. \end{aligned} \right.$$

Je pose

$$l=-(z_3+z_5),\qquad \lambda=z_2+z_0,$$
$$m=-(z_5+z_1),\qquad \mu=z_0+z_4,$$
$$n=-(z_1+z_3),\qquad \nu=z_4+z_2;$$

évidemment les équations dont les racines sont z_1, z_3, z_5 ou z_0, z_2, z_4 auront pour coefficients des fonctions des invariants simultanés J, G, D, R. Soient

$$z^3+p_1z^2+p_2z+p_3=(z-z_1)(z-z_3)(z-z_5),$$
$$z^3+q_1z^2+q_2z+q_3=(z-z_0)(z-z_2)(z-z_4);$$

on trouve, à cause des relations supérieures, que

$$p_1=\frac{3}{2}J,\qquad q_1=-\frac{3}{2}J,$$
$$p_2=3G-\frac{9}{4}J^2-\frac{3^3}{2}D^{\frac{1}{2}},\qquad q_2=3G-\frac{9}{4}J^2+\frac{3^3}{2}D^{\frac{1}{2}},$$
$$p_3=-R+\frac{3}{2}Jp_2,\qquad q_3=R-\frac{3}{2}Jq_2,$$

et, en conséquence,

$$p_1+q_1=0,\qquad p_3+q_3+p_1q_2+p_2q_1=0.$$

Il en résulte que, dans l'équation du sixième degré dont les racines sont z_0, z_1, ..., z_5, les coefficients de z^5 et z^3 seront nuls, et l'équation même prendra la forme

$$(z^2+2.5A)^3+3L(z^2+2.5A)+6^3\Delta^{\frac{1}{2}}z-2M=0,$$

A, L, M, Δ étant les invariants définis supérieurement.

Cette équation n'est pas nouvelle, elle a été déjà calculée par le P. Joubert dans son beau travail *Sur l'équation du sixième degré* (¹); mais, dans la forme indiquée ci-dessus, elle se prête à une importante transformation.

3. Avant d'aborder cette transformation, il est nécessaire d'exposer d'autres propriétés des quantités l, m, n; λ, μ, ν.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mai-juin 1867.

Les dix quantités suivantes

$$
\begin{aligned}
c_5^4 &= a_0^2(02)(24)(40)(13)(35)(51), & c_0^4 &= a_0^2(01)(13)(30)(24)(45)(52),\\
c_{12}^4 &= a_0^2(01)(14)(40)(23)(35)(52), & c_{34}^4 &= a_0^2(02)(23)(30)(14)(45)(51),\\
c_{23}^4 &= a_0^2(03)(34)(40)(12)(25)(51), & c_{14}^4 &= a_0^2(01)(12)(20)(34)(45)(53),\\
c_4^4 &= a_0^2(02)(25)(50)(13)(34)(41), & c_{03}^4 &= a_0^2(01)(15)(50)(23)(34)(42),\\
c_{01}^4 &= a_0^2(03)(35)(50)(12)(24)(41), & c_2^4 &= a_0^2(04)(45)(50)(12)(23)(31)
\end{aligned}
$$

s'expriment par les λ, l, ... comme il suit

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
c_0^4 = \lambda\mu - lm, & c_{14}^4 = \lambda\mu - nl, & c_{23}^4 = \lambda\mu - mn,\\
c_{12}^4 = \nu\lambda - lm, & c_{03}^4 = \nu\lambda - nl, & c_4^4 = \nu\lambda - mn,\\
c_{34}^4 = \mu\nu - lm, & c_2^4 = \mu\nu - nl, & c_{01}^4 = \mu\nu - mn,\\
\multicolumn{3}{c}{c_5^4 = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu - (mn + nl + lm);}
\end{array}
\right.
$$

de plus,

$$
\begin{aligned}
c_{01}^2 c_{23}^2 c_4^2 &= -mnc_5^2, & c_{01}^2 c_2^2 c_{34}^2 &= \mu\nu c_5^2,\\
c_{03}^2 c_{14}^2 c_2^2 &= nlc_5^2, & c_4^2 c_{03}^2 c_{12}^2 &= \nu\lambda c_5^2,\\
c_0^2 c_{12}^2 c_{34}^2 &= -lmc_5^2, & c_{23}^2 c_{14}^2 c_0^2 &= \lambda\mu c_5^2.
\end{aligned}
$$

On en déduit

$$
3^3 D^{\frac{1}{2}} = c_5^4, \qquad R c_5^4 = H c,
$$

$$
\begin{aligned}
2.3\,G c_5^2 = c_{01}^2 c_2^2 c_{34}^2 + c_4^2 c_{03}^2 c_{12}^2 + c_{23}^2 c_{14}^2 c_0^2 - c_{01}^2 c_{23}^2 c_4^2&\\
+ c_{03}^2 c_{14}^2 c_2^2 - c_0^2 c_{12}^2 c_{34}^2& \quad (^1).
\end{aligned}
$$

4. La transformation de l'équation due au P. Joubert s'obtient en posant

$$y = -(z^2 + 2.5\,A),$$

et l'on a la transformée

$$(y^3 + 3Ly + 2M)^2 + 6^6\Delta(y + 2.5.A) = 0.$$

Or,

$$z_1^2 = \frac{1}{4}(2l - s_1)^2 = \frac{9}{4}J^2 - l(m + n),$$

et, en conséquence,

$$y_1 = -2G + l(m + n),$$

---

(1) BURKHARDT, *Hyperelliptischen Modulfunctionen* (*Math. Annalen*, Bd. XXXVI, p. 409).

ou, en se rappelant les valeurs (1) et (2),

$$y_1 = \frac{1}{3}(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu - 3mn) - 2.3^2.D^{\frac{1}{2}},$$

et enfin

$$y_1 = \frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_{23}^4 + c_4^4 + c_{01}^4),$$

$$y_3 = \frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_{14}^4 + c_{03}^4 + c_2^4),$$

$$y_5 = \frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_0^4 + c_{12}^4 + c_{34}^4)$$

et, analoguement,

$$y_4 = -\frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_{01}^4 + c_2^4 + c_{34}^4),$$

$$y_2 = -\frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_4^4 + c_{03}^4 + c_{12}^4),$$

$$y_0 = -\frac{1}{3}(-2c_5^4 + c_{23}^4 + c_{14}^4 + c_0^4).$$

Les invariants L, M, Δ, $A\Delta$, coefficients de la transformée, s'expriment par conséquent en fonctions des dix quantités c_{rs}^4. On trouve, par exemple,

$$L = -\frac{1}{3^2.4}\Sigma c^8.$$

5. Ce résultat conduit directement à la résolution de l'équation du sixième degré. En effet, posons

$$u_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}}, \qquad u_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

et indiquons par ω_{11}, ω_{12}, ω_{13}, ω_{14}; ω_{21}, ω_{22}, ω_{23}, ω_{24} les périodes normales primitives. Soient

$$p_{rs} = \omega_{1r}\omega_{2s} - \omega_{2r}\omega_{1s} = -p_{sr}$$

et

$$v_1 = \frac{1}{p_{12}}(\omega_{22}u_1 - \omega_{12}u_2), \qquad v_2 = \frac{1}{p_{21}}(\omega_{21}u_1 - \omega_{11}u_2),$$

$$\tau_{11} = \frac{p_{32}}{p_{12}}, \qquad \tau_{12} = \frac{p_{42}}{p_{12}} = \frac{p_{13}}{p_{12}}, \qquad \tau_{22} = \frac{p_{14}}{p_{12}};$$

enfin

$$\vartheta_{r,s}(\upsilon_1, \upsilon_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

une des dix fonctions ϑ paires, et ϑ_{rs} la même fonction dans laquelle on a posé $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$. On sait qu'en indiquant par ρ la quantité

$$\rho = \frac{(2\pi i)^2}{p_{12}},$$

l'on a

$$\rho^2 \vartheta_{rs}^4 = c_{rs}^4,$$

et les racines de la transformée pourront s'écrire

$$y_1 = \frac{\rho^2}{3}(-2\vartheta_5^4 + \vartheta_{23}^4 + \vartheta_4^4 + \vartheta_{01}^4),$$

et de même pour les autres. L'équation du sixième degré est ainsi résolue. Les beaux résultats obtenus par MM. Bolza et Maschke ([1]) trouvent de cette manière leur connexion directe.

6. Supposons que l'équation $f(x) = 0$ ait une racine double, par exemple $x_5 = x_4$. On a

$$l = 0, \qquad \mu = 0, \qquad R = 0, \qquad \Delta = 0.$$

En posant

$$\alpha = a_0(01)(23), \qquad \beta = a_0(02)(31), \qquad \gamma = a_0(03)(12),$$
$$h = (40)(41)(42)(43),$$

les relations (2) donnent

$$c_0 = c_{14} = c_{34} = c_2 = 0;$$
$$c_{12}^4 = c_{03}^4 = h\alpha, \qquad c_4^4 = c_5^4 = -h\beta, \qquad c_{23}^4 = c_{01}^4 = h\gamma,$$

et l'on a

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

([1]) *Darstellung der rationalen ganzen Invarianten, etc.*, von Bolza. — *Ueber die lineare Gruppe der Borchardt'schen Moduln*, von Maschke (*Math. Annalen*, Bd. XXX).

Des relations (1) on déduit

$$G = \frac{1}{6}h(\alpha - \gamma), \qquad 3^3.D^{\frac{1}{2}} = -h\beta.$$

En posant

$$F(x) = a_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

on aura

$$f(x) = (x - x_4)^2 F(x)$$

et, en conséquence,

$$u_1 - x_4 u_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Les racines $y_0, y_1, \ldots$ de la transformée deviennent deux à deux égales, et l'on a

$$y_3 = y_5 = \frac{h}{3}(\beta - \gamma), \qquad y_1 = y_2 = \frac{h}{3}(\gamma - \alpha), \qquad y_0 = y_4 = \frac{h}{3}(\alpha - \beta);$$

enfin, en indiquant par g_2, g_3 les invariants de la forme biquadratique $F(x)$, on trouve

$$3L = -4g_2h^2, \qquad 2M = -4^2g_3h^3$$

et la transformée, en posant $y = 4h\xi$, devient

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0,$$

dont les racines sont, comme il est connu,

$$\xi_1 = \frac{1}{12}(\beta - \gamma), \qquad \xi_2 = \frac{1}{12}(\gamma - \alpha), \qquad \xi_3 = \frac{1}{12}(\alpha - \beta),$$

ou aussi

$$\xi_1 = \frac{1}{3}\rho^2(\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4), \qquad \xi_2 = \frac{1}{3}\rho^2(-\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4), \qquad \xi_3 = -\frac{1}{3}\rho^2(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

étant [1]

$$\rho = \frac{\pi}{2\omega}, \qquad \mathfrak{I}_0^4 + \mathfrak{I}_2^4 = \mathfrak{I}_3^4.$$

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, première Partie, p. 258.