F. Brioschi

Sur l’équation du sixième degré

Annales scientifiques de l’É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 343-350

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__343_0>
SUR L'ÉQUATION DU SIXIÈME DEGRÉ,

PAR M. F. BRIOSCHI.

1. Soient
\[ f(x) = (a_0, a_2, \ldots, a_6)(x, 1)^6 \]
une forme du sixième degré, et
\[ \kappa = \frac{1}{2}(ff), \]
un de ses covariants du quatrième ordre. Les invariants \( A, B, C \) des second, quatrième, sixième degrés seront
\[ A = \frac{1}{2}(ff), \]
et \( B, C \) les deux invariants de la forme biquadratique \( k \). Au lieu de \( B, C \), j'introduirai les invariants suivants
\[ L = 4.5(4A^3 - 3.5^2B), \quad M = 8.5(7.8A^3 - 4.3^2.5^2AB - 3^3.5^3C), \]
et j'indiquerai par \( 6^6\Delta \) le discriminant de \( f \).
Soient \( \varphi, \psi \) deux formes du troisième ordre, et
\[ u = \frac{1}{2}(\varphi\varphi), \quad v = \frac{1}{2}(\psi\psi), \]
on a, comme il est connu, les deux invariants simultanés
\[ J = (\varphi\psi), \quad E = (uv), \]
et les deux \( D, R \) étant \( D \) le produit des discriminants des formes \( \varphi, \psi \),
et \( R \) le résultant des formes mêmes.
Si l'on suppose $f = \varphi \psi$, on a, entre ces invariants, les relations

$$5A = G - \frac{9}{8} J^2, \quad L = RJ - G^2 - \frac{3}{4} D,$$

$$M = G^3 - \frac{3}{2} RJG - \frac{3}{4} DG + \frac{1}{2} R^2, \quad 6\Delta = 3^2 R^2 D,$$

ayant posé

$$G = J^3 - 9E,$$

2. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_5$ les racines de l'équation $f(x) = 0$; $x_0, x_2, x_3$ celles de $\varphi(x) = 0$; $x_1, x_4, x_5$ celles de $\psi(x) = 0$. Les six expressions de ces racines

$$l = a_0(01)(23)(45), \quad \lambda = a_0(01)(25)(43),$$

$$m = a_0(03)(25)(41), \quad \mu = a_0(03)(21)(45),$$

$$n = a_0(05)(21)(43), \quad \nu = a_0(05)(23)(41),$$

dans lesquelles $(rs) = x_r - x_s$ ont des propriétés remarquables. On a en premier lieu

$$l + m + n = \lambda + \mu + \nu = 3J,$$

$$lmn = \lambda \mu \nu = R,$$

et, en indiquant par $s_1, s_2, s_3$ les sommes des trois premières puissances de $l, m, n$, et par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ celles de $\lambda, \mu, \nu$, on trouve

$$s_1 = \sigma_1 = 3J,$$

$$s_2 = 9J^2 - 6G + 3^2 D^2,$$

$$s_3 = 3R + 3^3 J^3 - 3^3 J G + \frac{3}{2} J D,$$

et, en conséquence,

$$s_2 - \sigma_2 = 2.3^2 D^2,$$

$$s_2 + \sigma_2 - 2s_1 \sigma_1 = -3.4^2 G,$$

ou aussi

$$\left\{\begin{array}{l}
\mu \nu + \nu \lambda + \lambda \mu - (mn + nl + lm) = 3^3 D^2, \\
\mu \nu + \nu \lambda + \lambda \mu + (mn + nl + lm) = 2.3G.
\end{array}\right.$$
Je pose

\[ l = -(z_1 + z_2), \quad \lambda = z_2 + z_3, \]

\[ m = -(z_3 + z_4), \quad \mu = z_4 + z_2, \]

\[ n = -(z_4 + z_3), \quad \nu = z_4 + z_2; \]

evidemment les équations dont les racines sont \( z_1, z_2, z_3 \) ou \( z_1, z_2, z_4 \), auront pour coefficients des fonctions des invariants simultanés \( J, G, D, R \). Soient

\[ z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 = (z - z_1)(z - z_3)(z - z_4), \]

\[ z^3 + q_1 z^2 + q_2 z + q_3 = (z - z_0)(z - z_2)(z - z_4); \]

on trouve, à cause des relations supérieures, que

\[ p_1 = \frac{3}{4} J, \quad q_1 = \frac{3}{4} J, \]

\[ p_2 = 3G - \frac{9}{4} J^2 - \frac{3}{2} D^2, \quad q_2 = 3G - \frac{9}{4} J^2 + \frac{3}{2} D^2, \]

\[ p_3 = -R + \frac{3}{4} J p_1, \quad q_3 = R - \frac{3}{4} J q_1, \]

et, en conséquence,

\[ p_1 + q_1 = 0, \quad p_2 + q_2 + p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0. \]

Il en résulte que, dans l'équation du sixième degré dont les racines sont \( z_0, z_1, \ldots, z_5 \), les coefficients de \( z^5 \) et \( z^3 \) seront nuls, et l'équation même prendra la forme

\[(z^5 + 2.5 A)^3 + 3L(z^5 + 2.5 A) + 6A^2 z - 2M = 0,\]

\( A, L, M, \Delta \) étant les invariants définis supérieurement.

Cette équation n'est pas nouvelle, elle a été déjà calculée par le P. Joubert dans son beau travail *Sur l'équation du sixième degré* (1); mais, dans la forme indiquée ci-dessus, elle se prête à une importante transformation.

3. Avant d'aborder cette transformation, il est nécessaire d'exposer d'autres propriétés des quantités \( l, m, n; \lambda, \mu, \nu \).

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mai-juin 1867.

Les dix quantités suivantes

c_{1} = a_{0}^{8}(o_{1})(a_{1})(4o)(13)(35)(51),
c_{1} = a_{0}^{8}(o_{1})(14)(4o)(a_{3})(35)(53),
c_{1} = a_{0}^{8}(o_{3})(34)(4o)(12)(35)(51),
c_{1} = a_{0}^{8}(o_{2})(5o)(13)(34)(14),
c_{1} = a_{0}^{8}(o_{3})(35)(5o)(12)(a_{4})(14),
c_{1} = a_{0}^{8}(o_{4})(45)(5o)(14)(33)(31)

s'expriment par les \lambda, l, \ldots comme il suit

\begin{align*}
\begin{cases}
c_{1}^{6} = \lambda_{5} - \lambda_{0}, & c_{1}^{6} = \lambda_{5} - \lambda_{0}, & c_{1}^{6} = \lambda_{5} - \lambda_{0}, \\
c_{1}^{2} = \nu_{2} - \nu_{3}, & c_{1}^{2} = \nu_{2} - \nu_{3}, & c_{1}^{2} = \nu_{2} - \nu_{3}, \\
c_{1}^{3} = \mu_{3} - \mu_{0}, & c_{1}^{3} = \mu_{3} - \mu_{0}, & c_{1}^{3} = \mu_{3} - \mu_{0}, \\
c_{1}^{5} = \rho_{5} - \rho_{0}, & c_{1}^{5} = \rho_{5} - \rho_{0}, & c_{1}^{5} = \rho_{5} - \rho_{0}, \\
c_{1}^{1} = \phi_{1} - \phi_{0} - \nu_{1} - \nu_{0} + \lambda_{0} + \mu_{0} + \rho_{0}.
\end{cases}
\end{align*}

de plus,

\begin{align*}
& c_{1}^{6} c_{1}^{2} c_{1}^{3} = -m n c_{1}^{1}, & c_{1}^{6} c_{1}^{2} c_{1}^{3} = \rho_{5} e_{5}^{2}, \\
& c_{1}^{2} c_{1}^{3} c_{1}^{5} = n l c_{1}^{3}, & c_{1}^{2} c_{1}^{3} c_{1}^{5} = \nu_{3} e_{3}, \\
& c_{1}^{3} c_{1}^{5} c_{1}^{6} = -l m c_{1}^{3}, & c_{1}^{3} c_{1}^{5} c_{1}^{6} = \lambda_{0} e_{0}.
\end{align*}

On en déduit

\begin{align*}
3^{3} D^{1} = c_{1}^{1}, & R c_{1}^{1} = H c. \\
2.3 G c_{1}^{2} = c_{1}^{2} c_{1}^{2} c_{1}^{2} + c_{1}^{2} c_{1}^{2} c_{1}^{2} + c_{1}^{2} c_{1}^{2} c_{1}^{2} - c_{1}^{2} c_{1}^{2} c_{1}^{2} + c_{1}^{2} c_{1}^{2} c_{1}^{2} - c_{1}^{2} c_{1}^{2} c_{1}^{2}
\end{align*}

4. La transformation de l'équation due au P. Joubert s'obtient en posant

\( y = -(z^{2} + 2.5 A) \)

et l'on a la transformée

\( (y^{2} + 3L y + 2M)^{2} + 6^{2} \Delta (y + 2.5 A) = 0. \)

Or,

\( z_{1}^{1} = \frac{1}{4} (2l - s_{1})^{2} = \frac{9}{4} J^{2} - l(m + n), \)

et, en conséquence,

\( y_{1} = -2G + l(m + n), \)

ou, en se rappelant les valeurs (1) et (2),

\[ y_1 = \frac{1}{3} (\mu \nu + \eta \mu + \lambda \nu - 3mn) - 3^3. D^3, \]

et enfin

\[ y'_1 = \frac{1}{3} (-2c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2), \]
\[ y'_2 = \frac{1}{3} (-2c_2^2 + c_1^2 + c_3^2 + c_4^2), \]
\[ y'_3 = \frac{1}{3} (-2c_3^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_4^2), \]
\[ y'_4 = \frac{1}{3} (-2c_4^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2). \]

et, analogue nient,

\[ y_1 = -\frac{1}{3} (-2c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2), \]
\[ y_2 = -\frac{1}{3} (-2c_2^2 + c_1^2 + c_3^2 + c_4^2), \]
\[ y_3 = -\frac{1}{3} (-2c_3^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_4^2), \]
\[ y_4 = -\frac{1}{3} (-2c_4^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2). \]

Les invariants \( L, M, \Delta, \Delta \Delta \), coefficients de la transformée, s'expriment par conséquent en fonctions des dix quantités \( c_{rs}^4 \). On trouve, par exemple,

\[ L = -\frac{1}{3^4} \Sigma c^8. \]

5. Ce résultat conduit directement à la résolution de l'équation du sixième degré. En effet, posons

\[ u_1 = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad u_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \]

et indiquons par \( \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}; \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, \omega_{24} \) les périodes normales primitives. Soient

\[ p_{rs} = \omega_{1r} \omega_{1s} - \omega_{2r} \omega_{1s} = -p_{sr} \]

et

\[ \omega_1 = \frac{1}{P_{12}} (\omega_{12} u_1 - \omega_{12} u_2), \quad \omega_2 = \frac{1}{P_{21}} (\omega_{21} u_1 - \omega_{21} u_2), \]
\[ \tau_{11} = \frac{P_{22}}{P_{12}}, \quad \tau_{12} = \frac{P_{22}}{P_{12}}, \quad \tau_{22} = \frac{P_{11}}{P_{12}} \]
une des dix fonctions \( \mathcal{F} \) paires, et \( \mathcal{F}_{rs} \) la même fonction dans laquelle on a posé \( \nu_1 = \nu_2 = 0 \). On sait qu'en indiquant par \( \rho \) la quantité
\[
\rho = \frac{(\pi i)^2}{P_{12}},
\]
l'on a
\[
\rho^2 \mathcal{F}_{rs} = c_{rs},
\]
et les racines de la transformée pourront s'écrire
\[
\gamma_1 = \rho^2 \left(-\alpha \mathcal{F}_{1} - \mathcal{F}_{2} - \mathcal{F}_{3} - \mathcal{F}_{41}ight),
\]
et de même pour les autres. L'équation du sixième degré est ainsi résolue. Les beaux résultats obtenus par MM. Bolza et Maschke (1) trouvent de cette manière leur connexion directe.

6. Supposons que l'équation \( f(x) = 0 \) ait une racine double, par exemple \( x_a = x_b \). On a
\[
l = 0, \quad \mu = 0, \quad \Lambda = 0.
\]
En posant
\[
\alpha = a_0 (\alpha 1) (\alpha 3), \quad \beta = a_0 (\alpha 1) (\alpha 3), \quad \gamma = a_0 (\alpha 3) (\alpha 3),
\]
\[
h = (\alpha 0) (\alpha 4) (\alpha 4) (\alpha 4),
\]
les relations (2) donnent
\[
c_0 = c_{14} = c_{24} = c_2 = 0;
\]
\[
c_{12} = c_{03} = h \alpha, \quad c_4 = c_{32} = -h \beta, \quad c_{23} = c_{14} = h \gamma,
\]
et l'on a
\[
\alpha + \beta + \gamma = 0.
\]

Des relations (1) on déduit

\[ G = \frac{1}{6} h (\alpha - \gamma), \quad 3^3. D^1 = -h \beta. \]

En posant

\[ F(x) = \alpha_0 (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3), \]

on aura

\[ f(x) = (x - x_1)^2 F(x) \]

et, en conséquence,

\[ u_1 - x_u u_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}. \]

Les racines \( y_0, y_1, \ldots \) de la transformée deviennent deux à deux égales, et l'on a

\[ y_3 = y_4 = \frac{h}{3} (\beta - \gamma), \quad y_1 = y_2 = \frac{h}{3} (\gamma - \alpha), \quad y_u = y_1 = \frac{h}{3} (\alpha - \beta); \]

enfin, en indiquant par \( g_2, g_3 \) les invariants de la forme biquadratique \( F(x) \), on trouve

\[ 3L = -4g_3 h^3, \quad 2M = -4g_2 h^3 \]

et la transformée, en posant \( \gamma = 4h^2 \xi \), devient

\[ 4\xi^3 - 2g_2 \xi - g_3 = 0, \]

dont les racines sont, comme il est connu,

\[ \xi_1 = \frac{1}{12} (\beta - \gamma), \quad \xi_2 = \frac{1}{12} (\gamma - \alpha), \quad \xi_3 = \frac{1}{12} (\alpha - \beta), \]

ou aussi

\[ \xi_1 = \frac{1}{3} \rho^2 (\zeta_0 + \zeta_1), \quad \xi_2 = \frac{1}{3} \rho^2 (-\zeta_0 + \zeta_1), \quad \xi_3 = -\frac{1}{3} \rho^2 (\zeta_0 + \zeta_1) \]
étant (1)

\[ \rho = \frac{\pi}{2 \alpha}, \quad \mathcal{E}_0^4 + \mathcal{E}_2^4 = \mathcal{E}_2^4. \]