S. MANGEOT

Sur le moyen de reconnaître une surface de révolution algébrique et de découvrir la position de son axe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 191-193
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__191_0>

SUR LE MOYEN DE RECONNAITRE

UNE

SURFACE DE RÉVOLUTION ALGÉBRIQUE

ET DE DÉCOUVRIR

LA POSITION DE SON AXE,

PAR M. S. MANGEOT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Je considère une surface d'ordre m, non formée uniquement de plans parallèles ou de sphères concentriques, et représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation entière et à coefficients réels

$$f(x, y, z) = 0.$$

Je suppose que l'on veuille reconnaître si cette surface est de révolution et, en cas d'affirmative, trouver les équations de son axe de révolution.

Soient, en admettant que le cône de ses directions asymptotiques n'est pas réduit à un plan :

α, β, γ trois nombres entiers quelconques dont la somme est $m - 1$;

$x^\alpha y^\beta z^\gamma(Ax + By + Cz + D)$ la somme des termes du polynome $f(x, y, z)$ qui contiennent le facteur $x^\alpha y^\beta z^\gamma$;

a_1, b_1, c_1 les trois constantes

$$\Sigma\alpha!\beta!\gamma!(\alpha+1)^2A^2, \quad \Sigma\alpha!\beta!\gamma!(\beta+1)(\gamma+1)BC, \quad \Sigma\alpha!\beta!\gamma!(\alpha+1)AD;$$

a_2, b_2, c_2, et a_3, b_3, c_3 celles que l'on en déduit par une permutation circulaire des lettres α, β, γ et A, B, C;

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \varphi_1(x^2, y, z) + x\psi_1(x^2, y, z) = \varphi_2(x, y^2, z) + y\psi_2(x, y^2, z) \\ &= \varphi_3(x, y, z^2) + z\psi_3(x, y, z^2) \end{aligned}$$

le quotient, par la plus haute puissance de $x^2+y^2+z^2$ qu'il peut renfermer en facteur, de l'un quelconque des polynomes entiers homogènes dont la somme est

$$f\left(x-\frac{c_1}{a_1},\, y-\frac{c_2}{a_2},\, z-\frac{c_3}{a_3}\right),$$

choisi à volonté, sans être, à un facteur constant près, une puissance de $x^2+y^2+z^2$;

$$\lambda_n+i\mu_n,\quad \nu_n+i\rho_n,\quad \sigma_n+i\tau_n \qquad (n=1,2,3)$$

les constantes

$$\varphi_1(0,1,i),\ \psi_1(0,1,i),\ \frac{p\varphi_1(0,1,i)}{\psi_1(0,1,i)};\quad \varphi_2(i,0,1),\ \psi_2(i,0,1),\ \frac{p\varphi_2(i,0,1)}{\psi_2(i,0,1)};$$
$$\varphi_3(1,i,0),\ \psi_3(1,i,0),\ \frac{p\varphi_3(1,i,0)}{\psi_3(1,i,0)},$$

p désignant le degré de $F(x,y,z)$.

On envisage le Tableau suivant, où x_1, x_2, x_3 désignent respectivement x, y, z.

<table>
<tr><td colspan="2">$b_1b_2b_3 \gtrless 0,\quad a_1-\frac{b_2b_3}{b_1}=a_2-\frac{b_3b_1}{b_2}=a_3-\frac{b_1b_2}{b_3}=s$</td><td>$b_1(sx_1+c_1)=b_2(sx_2+c_2)=b_3(sx_3+c_3)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_1\gtrless 0,\quad b_2=b_3=b_1^2-(a_2-a_1)(a_3-a_1)=0$</td><td>$a_1x_1+c_1=0,\quad b_1(a_1x_2+c_2)=(a_2-a_1)(a_1x_3+c_3)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_1=b_2=b_3=a_1-a_2=0,\quad a_2-a_3\gtrless 0$</td><td>$a_1x_1+c_1=0,\quad a_2x_2+c_2=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$b_1=b_2=b_3=0,$
$a_1=a_2=a_3$</td><td>$\Pi(\lambda_n+i\mu_n)\neq 0$
$\Pi(\nu_n+i\rho_n)\neq 0$</td><td>$\sigma_1\tau_1(a_1x+c_1)=\tau_1(a_2x_2+c_2)=\sigma_1(a_3x_3+c_3)$</td></tr>
<tr><td>$\Pi(\lambda_n+i\mu_n)\neq 0$
$(\nu_1+i\rho_1)(\nu_2+i\rho_2)\neq 0$
$\nu_3+i\rho_3=0$</td><td>$p\lambda_1(a_1x_1+c_1)=\nu_1(a_2x_2+c_2),\quad a_3x_3+c_3=0$</td></tr>
<tr><td>$\lambda_3+i\mu_3=0$</td><td>$a_1x_1+c_1=0,\quad a_2x_2+c_2=0$</td></tr>
</table>

Si les coefficients du polynome $f(x,y,z)$ ne satisfont ni à l'un ni à l'autre des six systèmes de conditions qui figurent, soit dans ce Tableau, soit dans l'un des deux Tableaux qui s'en déduisent par une permutation circulaire des indices 1, 2, 3, on peut être assuré que la surface n'est pas de révolution. Dans le cas contraire, la surface ne peut être de révolution qu'autour de la droite représentée par les deux équations qui figurent dans le Tableau, en regard du système des conditions supposées ([1]); droite réelle, déterminée et située à distance finie. On n'aura donc qu'une vérification à faire, et la question sera résolue.

Si l'on sait d'avance que la surface est de révolution, l'un des trois Tableaux indiquera les équations de son axe, dès que l'on aura reconnu auquel des systèmes de conditions satisfait la surface.

Dans le cas où toutes les directions asymptotiques de la surface issues d'un même point seraient situées dans un plan, celle-ci ne pourrait être de révolution qu'autour d'une normale à ce plan : une transformation de coordonnées bien évidente montrerait s'il en est ainsi, et conduirait en même temps aux équations de l'axe de révolution.

Les résultats qui précèdent fournissent un moyen de calculer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré à trois variables représente une surface de révolution, m étant donné d'une manière quelconque.

([1]) Les plans de symétrie que peut avoir la surface $f(x,y,z)=0$ doivent être des plans de symétrie de la quadrique correspondant à l'équation du second degré

$$\sum \frac{1}{h!\,k!\,l!}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^h\,\partial y^k\,\partial z^l}\right)^2 = 0 \qquad (h+k+l=m-1),$$

qui n'est autre que

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2b_1yz+2b_2zx+2b_3xy+2c_1x+2c_2y+2c_3z=0;$$

en sorte que, si la surface est de révolution, cette quadrique doit être aussi de révolution, autour de la même droite; et si cette quadrique est une sphère de centre (x', y', z'), le cône $F(x-x',\ y-y',\ z-z')=0$ devra, lui aussi, être de révolution autour de cette droite.