Annales scientifiques de l'É.N.S.

Etienne Delassus

Note sur les systèmes différentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 243-246
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__243_0>

NOTE SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

M. Riquier ayant fait insérer ici ([1]), tout récemment, une réclamation de priorité pour des résultats relatifs à l'existence des intégrales dans les systèmes différentiels les plus généraux, je demanderai la permission d'y répondre en quelques mots.

Je ne discuterai pas le point de savoir quelle est celle des deux méthodes qui est la plus simple et la plus féconde, laissant ce soin aux géomètres que la question intéresse, et je m'occuperai seulement des résultats ([2]).

Les intégrales des systèmes différentiels peuvent être considérées comme dépendant d'une infinité de constantes arbitraires ou d'un nombre fini de constantes et fonctions arbitraires, le second point de vue pouvant d'ailleurs se déduire du premier si l'on sait trouver une loi convenable pour le groupement des constantes arbitraires en nombre infini. Dans *tous* les Mémoires que M. Riquier a publiés, en collaboration avec M. Méray ou seul, les intégrales sont considérées *uniquement sous le premier point de vue* et M. Riquier s'occupe, *pour la première fois,* du groupement en fonctions arbitraires dans sa Note récente qui constitue une *addition* à son Mémoire, addition postérieure de près

([1]) RIQUIER, *Sur les systèmes différentiels les plus généraux* (*Annales de l'École Normale,* mars 1897).

([2]) Je dois cependant signaler que, dans une Note récente (*Comptes rendus,* 15 mars 1897), M. Riquier, pour simplifier ses résultats, a appliqué l'idée fondamentale de mon Mémoire, c'est-à-dire la possibilité d'arriver à des formes canoniques réduites au moyen des changements de variables.

d'un an à la publication de mes résultats sur la question considérée à ce point de vue ([1]), de sorte que si l'on se bornait à ne voir, dans les Mémoires de M. Riquier, que *ce qui y est dit* et non *ce qui aurait pu y être dit*, sa réclamation tomberait d'elle-même.

Admettons même que cette Note récente de M. Riquier ne constitue pas une addition à son Mémoire et que la possibilité du groupement en fonctions arbitraires *ressorte de ce Mémoire avec une telle évidence que tout exemple soit, à vrai dire, superflu*, ce qui explique bien le silence qu'avait gardé M. Riquier à propos de cette question par trop évidente, si évidente qu'elle ne s'était même pas posée.

Dans ces conditions, la réclamation de M. Riquier ne serait pas encore admissible, et c'est lui-même qui se charge de le prouver.

En effet, mon extension du théorème de Cauchy fournit une loi générale qui régit le nombre et la nature des constantes et fonctions arbitraires, en nombre fini, dont dépend l'intégrale générale d'un système différentiel et, *dans sa Note*, M. Riquier se contente de montrer que, en appliquant sa méthode, on peut, *dans chaque cas particulier*, arriver à trouver comment il faut grouper les constantes arbitraires pour former des fonctions arbitraires. Quant à une loi générale reliant le nombre et la nature des fonctions arbitraires à la forme du système, loi qui devrait être analogue à celle exprimée par mon *théorème de Cauchy généralisé*, c'est en vain qu'on la cherche dans la Note de M. Riquier, qui nous prouve ainsi que, même actuellement, sa méthode n'a pu la lui fournir.

Ma solution est donc *plus complète* que celle de M. Riquier, et c'est pourquoi, dans ma préface, et pour justifier la publication de mon Mémoire après celui que cet auteur venait de présenter à l'approbation de l'Académie des Sciences, j'avais mis : ... *mais il y a plus, c'est que le Mémoire de M. Riquier n'a pas résolu la question aussi complètement qu'il est possible de le faire*.

En prétendant avoir résolu le *premier* et d'une *façon complète* cette question, M. Riquier attribue à l'expression *solution complète d'une question* une signification absolue qu'elle n'a pas, cette signification

---

([1]) *Comptes rendus*, 30 mars 1896.

dépendant du point de vue auquel on se place et surtout de la position plus ou moins éloignée que l'on donne au but qu'on se propose d'atteindre.

M. Riquier s'était proposé de démontrer l'existence des intégrales des systèmes différentiels et il y est arrivé; c'est un beau résultat que je n'ai jamais songé à contester, au contraire, et que j'ai été le premier à apprécier, puisque, ayant aussi travaillé cette question, j'en connaissais toutes les difficultés ([1]).

De mon côté, indépendamment des travaux de M. Riquier, et en partant d'idées toutes différentes, j'ai été conduit à retrouver son beau résultat, mais avec quelque chose en plus. Et c'est précisément ce « quelque chose » que M. Riquier revendique, bien qu'on n'en trouve aucune trace dans ses Mémoires, sous prétexte qu'il y était contenu *implicitement;* ce qui est d'ailleurs peu probable, puisque, malgré des recherches ultérieures, M. Riquier lui-même n'a pu encore arriver à l'en tirer *explicitement.*

M. Riquier a à son actif d'assez beaux résultats pour s'en contenter et ne pas chercher à faire rentrer dans ce qu'il a fait tout ce qui a été ultérieurement trouvé par d'autres sur les sujets qu'il a traités.

Pour finir, et dans le même ordre d'idées, M. Riquier signale une omission que j'aurais commise à propos d'un théorème de M. Tresse, que je considère comme un des progrès les plus remarquables faits dans la théorie des systèmes différentiels.

Je suis conduit à démontrer ce théorème important au moyen d'une certaine proposition sur des ensembles de dérivées, proposition qui n'a aucune importance en elle-même, mais qui tire son intérêt de ce qu'elle est, au fond, identique au théorème de M. Tresse, ce qui veut dire tout simplement que c'est de cette proposition élémentaire et très simple que j'arrive, par des transformations relativement compliquées, et en me servant auxiliairement d'autres propriétés, à déduire le théorème de M. Tresse.

M. Riquier fait remarquer que ma proposition sur les ensembles de dérivées n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus géné-

([1]) *Lire* le commencement de la Préface du Mémoire que cite M. Riquier.

rale publiée par lui en 1893, c'est-à-dire antérieurement aux travaux de M. Tresse. C'est incontestable; mais ce qui semble bien inattendu, c'est que M. Riquier semble vouloir, de ce rapprochement, conclure qu'il a donné en 1893 la démonstration du théorème de M. Tresse. M. Riquier confond ici ma proposition, qui n'offre aucun intérêt, avec le théorème important qu'elle sert à démontrer.

En réalité, je me trouve avoir prouvé qu'en partant de la proposition de M. Riquier, on aurait pu arriver à démontrer le théorème de M. Tresse. M. Riquier aurait certainement pu le faire lui-même, mais on constate facilement que ce théorème se trouve formulé *explicitement* et pour la première fois dans la thèse de M. Tresse, et M. Tresse l'eût-il même, *ce qui n'est pas le cas*, déduit de celui de M. Riquier, que ce résultat ne lui appartiendrait pas moins d'une façon incontestable.