

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. MANGEOT

## Sur un mode de développement en série des fonctions algébriques explicites

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 14 (1897), p. 247-250

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1897\\_3\\_14\\_\\_247\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__247_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR UN  
**MODE DE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE**  
 DES  
**FONCTIONS ALGÈBRIQUES EXPLICITES,**

PAR M. S. MANGEOT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES



Si l'on possède une méthode particulière permettant de calculer les termes du développement en série entière d'une fonction de  $x$  de la forme

$$u = [f_1(x)]^{m_1} [f_2(x)]^{m_2} \dots [f_r(x)]^{m_r},$$

les exposants  $m_\lambda$  étant des constantes quelconques, il est facile de se rendre compte que l'application de cette méthode, répétée s'il y a lieu, pourra conduire au développement analogue de toute fonction algébrique et explicite d'une variable.

Je vais indiquer un procédé spécial pour calculer les dérivées de la fonction  $u$  : j'aurai résolu la question, en la généralisant un peu.

Je pose

$$S_{1\lambda} = - \frac{f'_\lambda(x)}{f_\lambda(x)}, \quad (n-1)! S_{n\lambda} = \frac{d^{n-1} S_{1\lambda}}{dx^{n-1}}$$

et

$$(1) \quad t_n = m_1 S_{n1} + m_2 S_{n2} + \dots + m_r S_{nr};$$

puis j'effectue des différentiations successives sur les deux formules

$$S_{1\lambda} f_\lambda + f'_\lambda = 0, \quad \log u = \sum m_\lambda \log f_\lambda.$$

Je suis alors conduit à ces deux relations

$$(2) \quad S_{n\lambda} f_\lambda + S_{(n-1)\lambda} \frac{f'_\lambda}{1} + S_{(n-2)\lambda} \frac{f''_\lambda}{2!} + \dots + S_{1\lambda} \frac{f_\lambda^{(n-1)}}{(n-1)!} + n \frac{f_\lambda^{(n)}}{n!} = 0,$$

$$(3) \quad t_n u + t_{n-1} \frac{u'}{1} + t_{n-2} \frac{u''}{2!} + \dots + t_1 \frac{u^{(n-1)}}{(n-1)!} + n \frac{u^{(n)}}{n!} = 0$$

Elles donnent une solution du problème : car, ayant calculé successivement

$$\begin{array}{cccc} S_{11}, & S_{21}, & S_{31}, & \dots, \\ S_{12}, & S_{22}, & S_{32}, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{array}$$

au moyen de la relation (2), puis  $t_1, t_2, \dots$ , à l'aide de l'égalité (1), la formule (3) fera connaître, de proche en proche, les valeurs de  $u', u'', u''', \dots$ . On obtient, de la sorte, les dérivées d'une fonction telle que  $u$  en résolvant un certain nombre de fois une équation du premier degré à une inconnue, les équations à résoudre étant soumises à des lois de formation particulièrement simples.

La formule de récurrence (3), qui lie la fonction  $u$  et ses dérivées successives, peut être exprimée simplement à l'aide des données. On a, en effet, en vertu des égalités (1) et (2),

$$t_n = (-1)^h \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \frac{m_\lambda D_\lambda}{(f_\lambda)^h},$$

$D_\lambda$  désignant le déterminant d'ordre  $h$  dans lequel l'élément qui appartient à la colonne de rang  $p$  et à la ligne de rang  $q$  a pour valeur

$$[1 + (-1)^h (1 - q) C_{p-2}^{h-1}] \frac{f_\lambda^{q-p+1}}{(q - p + 1)!}.$$

La dérivée  $u^{(n)}$  est dès lors exprimable elle-même en fonction des données : elle est déterminée par la formule

$$(-1)^n \frac{u^{(n)}}{u} = \begin{vmatrix} t_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t_2 & t_1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t_3 & t_2 & t_1 & 3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \dots & \dots & t_1 & n-1 \\ t_n & n-1 & t_{n-2} & \dots & \dots & t_2 & t_1 \end{vmatrix},$$

où  $t_h$  a la valeur indiquée ci-dessus.

En partant des résultats qui précèdent, on est conduit à énoncer ce théorème :

Soient  $m_1, m_2, \dots, m_r, r$  nombres donnés, commensurables ou incommensurables, et

$$f_\lambda(x) = a_{0\lambda} + a_{1\lambda}x + a_{2\lambda}x^2 + \dots \quad (\lambda = 1, 2, \dots, r)$$

autant de séries entières ne s'annulant pas avec  $x$ . Si l'on pose

$$[f_1(x)]^{m_1} [f_2(x)]^{m_2} \dots [f_r(x)]^{m_r} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots,$$

chaque coefficient  $A_n$  de cette série peut être exprimé, en fonction linéaire et homogène des coefficients précédents  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ , par la formule

$$n A_n = \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h A_{n-h} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \frac{m_\lambda}{a_{0\lambda}^h} \begin{vmatrix} 1 a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 a_{2\lambda} & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 a_{3\lambda} & a_{2\lambda} & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ (h-1) a_{(h-1)\lambda} & a_{(h-2)\lambda} & a_{(h-3)\lambda} & \cdot & \cdot & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} \\ h a_{h\lambda} & a_{(h-1)\lambda} & a_{(h-2)\lambda} & \cdot & \cdot & a_{2\lambda} & a_{1\lambda} \end{vmatrix}.$$

Quand  $r$  est égal à 1, c'est-à-dire quand la fonction  $u$  est de la forme  $[f(x)]^m$ , l'expression de sa dérivée  $n^{\text{ième}}$  peut être écrite ainsi

$$\frac{d^n [f(x)]^m}{dx^n} = m f^{m-n} \begin{vmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \cdot \\ & & & & 0 \\ \Delta & & & & (1-n)f \\ \frac{f^{(n)}}{(n-1)!} & \frac{f^{(n-1)}}{(n-2)!} & \dots & \frac{f''}{1} & f' \end{vmatrix},$$

en appelant  $\Delta$  le déterminant d'ordre  $n - 1$  dans lequel l'élément appartenant à la  $p^{\text{ième}}$  colonne et à la  $q^{\text{ième}}$  ligne a pour valeur

$$[m(q - p + 1) - q] \frac{f^{(q-p+1)}}{(q - p + 1)!}.$$

Comme application de cette dernière formule, j'indiquerai les deux

développements suivants, où je suppose  $a_0$  différent de zéro :

$$\frac{1}{\sum_0^{\infty} a_n x^n} = \frac{1}{a_0} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n! a_0^{n+1}} G_n, \quad \sqrt{\sum_0^{\infty} a_n x^n} = \sqrt{a_0} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n! 2^n a_0^{\frac{n-1}{2}}} H_n,$$

$G_n$  et  $H_n$  ayant respectivement les valeurs

$2a_1$	$1a_0$	$0$	$0$	$\cdot$	$\cdot$	$0$
$4a_2$	$3a_1$	$2a_0$	$0$	$\cdot$	$\cdot$	$0$
$6a_3$	$5a_2$	$4a_1$	$3a_0$	$\cdot$	$\cdot$	$0$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$0$
$(2n-2)a_{n-1}$	$(2n-3)a_{n-2}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$(n-1)a_0$
$na_n$	$(n-1)a_{n-1}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$2a_2$	$1a_1$

  

$1a_1$	$2a_0$	$0$	$0$	$\cdot$	$\cdot$	$0$
$2a_2$	$3a_1$	$4a_0$	$0$	$\cdot$	$\cdot$	$0$
$3a_3$	$4a_2$	$5a_1$	$6a_0$	$\cdot$	$\cdot$	$0$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$0$
$(n-1)a_{n-1}$	$na_{n-2}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$(2n-2)a_0$
$na_n$	$(n-1)a_{n-1}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$2a_2$	$1a_1$