E. LACOUR

# Sur une transformation de fonctions elliptiques qui correspondent à un module imaginaire

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 15 (1898), p. 455-462
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__455_0>

SUR UNE

# TRANSFORMATION DE FONCTIONS ELLIPTIQUES

QUI CORRESPONDENT

## A UN MODULE IMAGINAIRE,

PAR M. E. LACOUR,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

## I.

Si l'on a à considérer la fonction $pu$ dans le cas du discriminant négatif, c'est-à-dire la fonction $pu$ satisfaisant à une équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$$

dans laquelle les constantes $e_2$, $e_1$, $e_3$ sont, la première réelle, les deux autres imaginaires conjuguées, il peut y avoir avantage à ramener cette fonction à des fonctions elliptiques sn, cn, dn, de module réel. On y parvient au moyen de la transformation suivante [1] :

Soit $e_1$ celle des racines imaginaires dans laquelle le coefficient de $i$ est positif, nous pouvons poser

$$e_2 - e_3 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \qquad \rho > 0,$$
$$e_2 - e_1 = \rho(\cos\psi - i\sin\psi), \qquad 0 < \psi < \pi;$$

d'autre part, l'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dx}{du} = 2\sqrt{(x-e_2)(x-e_2+e_2-e_1)(x-e_2+e_2-e_3)},$$

(1) *Voir* HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 81, et APPELL et LACOUR, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 220.

puis

$$\frac{dx}{du} = 2\sqrt{(x-e_2)[(x-e_2)^2+2(x-e_2)\rho\cos\psi+\rho^2]}.$$

Dans cette équation faisons la substitution

$$x - e_2 = \rho t^2,$$

il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{dt}{du} = \sqrt{t^4+2t^2\cos\psi+1} = \sqrt{(t^2+1)^2-4t^2\sin^2\frac{\psi}{2}}$$

ou, en posant $l^2 = \sin^2\frac{\psi}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}\,du}\frac{dt}{1+t^2} = \sqrt{1-l^2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}.$$

Enfin, posons

$$\frac{2t}{1+t^2} = s_1,$$

ce qui donne

$$\frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{ds_1}{\sqrt{1-s_1^2}};$$

l'équation différentielle deviendra

$$\frac{ds_1}{2\sqrt{\rho}\,du} = \sqrt{(1-s_1^2)(1-l^2s_1^2)}.$$

Cela posé, prenons

$$s_1 = \operatorname{sn}(2u\sqrt{\rho},\, l),$$

puis

$$t = \frac{1}{s_1} + \sqrt{\frac{1}{s_1^2}-1} \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{1+\operatorname{cn}(2u\sqrt{\rho},\, l)}{\operatorname{sn}(2u\sqrt{\rho},\, l)},$$

il en résulte pour $x$ l'expression

$$x = e_2 + \rho\frac{[1+\operatorname{cn}(2u\sqrt{\rho},\, l)]^2}{\operatorname{sn}^2(2u\sqrt{\rho},\, l)},$$

qui satisfait à l'équation différentielle donnée. Pour voir que $x$ est identique à $pu$, il suffit de remarquer de plus que pour des valeurs de $u$ dont le module est suffisamment petit, on a un développement de la forme

$$x = \frac{1}{u^2} + c_0 + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots,$$

développement dans lequel $c_0$, $c_1$, $c_2$, ... désignent des coefficients constants.

On a donc obtenu la formule

$$pu - e_2 = \rho \frac{[1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{\rho}, l)]^2}{\operatorname{sn}^2(2u\sqrt{\rho}, l)},$$

$\rho$ et $l$ étant définis par les égalités

$$\begin{aligned} e_2 - e_3 &= \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \\ e_2 - e_1 &= \rho(\cos\psi - i\sin\psi), \end{aligned} \qquad l = \sin\frac{\psi}{2}.$$

Cette formule ramène bien la fonction $pu$, dans le cas du discriminant négatif, à des fonctions elliptiques de module réel.

*Remarque.* — Comme vérification, on pourra, à l'aide de la formule précédente, retrouver les égalités

$$e_2 = p\omega_2 = p\omega'_2, \qquad e_1 = p\left(\frac{\omega_2 - \omega'_2}{2}\right), \qquad e_3 = p\left(\frac{\omega_2 + \omega'_2}{2}\right),$$

dans lesquelles $\omega_2$ et $\omega'_2$ désignent les intégrales

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2\sin^2\varphi}} = \frac{L}{\sqrt{\rho}} \qquad \left(l = \sin\frac{\psi}{2}\right),$$

$$\omega'_2 = \frac{i}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2\sin^2\varphi}} = \frac{iL'}{\sqrt{\rho}} \qquad \left(l' = \cos\frac{\psi}{2}\right).$$

## II.

Nous venons de voir que, dans le cas du discriminant négatif, la fonction $pu$ se ramène à des fonctions elliptiques de module réel $\left(l = \sin\frac{\psi}{2}\right)$. Mais, d'autre part, on sait que cette fonction se ramène à la fonction $\operatorname{sn}(gu, k)$, le module $k$ et le multiplicateur $g$ étant définis par les égalités

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad g^2 = e_1 - e_3.$$

En comparant les deux expressions correspondantes de $pu$, nous serons conduits à des formules de transformation, pour les fonctions elliptiques sn, cn, dn, permettant de passer du module imaginaire $k$ au module réel $l$.

La substitution à effectuer dans l'équation différentielle pour obtenir l'équation correspondant à la fonction sn de module $k$ et de multiplicateur $g$, est, comme on sait,

$$x = e_3 + \frac{g^2}{s^2} \qquad (g^2 = e_1 - e_3).$$

Les substitutions qui conduisent à la fonction sn, de module $l$, sont, nous venons de le voir,

$$x = e_2 + \rho t^2, \qquad \frac{2t}{1+t^2} = s_1.$$

Si l'on élimine $x$ et $t$ entre ces relations, on trouve la formule

$$s_1 = \frac{\dfrac{2g}{\sqrt{\rho}} s\sqrt{1-k^2s^2}}{s^2 + \dfrac{g^2}{\rho}(1-k^2s^2)}.$$

En se reportant aux équations différentielles que doivent vérifier $s$ et $s_1$ et en se rappelant que $s_1$ s'annule en même temps que $s$, on voit qu'on peut prendre

$$s = \operatorname{sn}(gu, k), \qquad s_1 = \operatorname{sn}(2u\sqrt{\rho}, l),$$

et la formule précédente devient

$$\operatorname{sn}(2u\sqrt{\rho}, l) = \frac{\dfrac{2g}{\sqrt{\rho}} \operatorname{sn}(gu, k)\operatorname{dn}(gu, k)}{\operatorname{sn}^2(gu, k) + \dfrac{g^2}{\rho}\operatorname{dn}^2(gu, k)}$$

ou bien, en changeant $u$ en $\dfrac{u}{g}$ et posant

$$M = \frac{g}{2\sqrt{\rho}} \qquad \text{ou} \qquad 2M^2 = i\sin\psi,$$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{4M\operatorname{sn}(u, k)\operatorname{dn}(u, k)}{4M^2\operatorname{dn}^2(u, k) + \operatorname{sn}^2(u, k)}.$$

On a ainsi l'une des formules de transformation cherchées; celles qui donnent la valeur de $\operatorname{cn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$ et la valeur de $\operatorname{dn}\left(\frac{u}{M}, l\right)$ s'en déduisent aisément, comme nous allons nous en assurer.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons, à partir de maintenant, par $s, c, d$ les fonctions elliptiques de module $k$ et d'argument $u$, et par $s_1, c_1, d_1$ les fonctions elliptiques de module $l$ et d'argument $\frac{u}{M}$. Avec ces notations, la formule déjà obtenue s'écrit

$$s_1 = \frac{4Msd}{4M^2d^2 + s^2}.$$

Pour avoir $c_1$ au signe près, il suffit de se servir de l'égalité $c_1^2 = 1 - s_1^2$; quant au signe, il est déterminé par la condition de donner lieu à une vérification qui sera expliquée dans la suite. On trouve ainsi

$$c_1 = \frac{4M^2d^2 - s^2}{4M^2d^2 + s^2}.$$

Enfin, pour avoir $d_1$, on différentie par rapport à $u$ les deux membres de la formule qui donne la valeur de $s_1$ et l'on trouve alors, après suppression dans les deux membres d'un facteur égal à $c_1$,

$$d_1 = \frac{4M^2c}{4M^2d^2 + s^2}.$$

Il est facile maintenant de résoudre par rapport à $s, c, d$ les trois formules précédentes.

On trouve d'abord

$$\frac{1 + c_1}{1 - c_1} = \frac{4M^2d^2}{s^2}$$

ou

$$\frac{(1 + c_1)^2}{s_1^2} = \frac{4M^2d^2}{s^2},$$

et l'on a la vérification annoncée plus haut, en se reportant à la valeur de $pu$ et en tenant compte d'une formule connue (*Formules et proposi-*

*tions de Weierstrass* rédigées par Schwartz, traduction Padé, p. 30), savoir

$$\frac{\sigma_2 u}{\sigma u} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\operatorname{dn}(\sqrt{e_1 - e_3}\, u, k)}{\operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3}\, u, k)}.$$

Connaissant $\frac{d^2}{s^2}$ on aura $d^2$ et $s^2$ en se servant de la relation

$$d^2 + l^2 s^2 = 1,$$

on en déduira

$$4M^2 d^2 + s^2$$

et la formule

$$d_1 = \frac{4M^2 c}{4M^2 d^2 + s^2}$$

fera alors connaître $c$ sans ambiguïté.

Nous réunissons ici les formules de transformation que nous venons d'obtenir :

$$s_1 = \frac{4Msd}{4M^2 d^2 + s^2}, \qquad c_1 = \frac{4M^2 d^2 - s^2}{4M^2 d^2 + s^2}, \qquad d_1 = \frac{4M^2 c}{4M^2 d^2 + s^2}$$

avec

$$s = \operatorname{sn}(u, k), \qquad s_1 = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right), \qquad \ldots,$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\cos\psi + i\sin\psi}{2i\sin\psi}, \qquad l^2 = \sin^2\frac{\psi}{2}, \qquad 2M^2 = i\sin\psi.$$

## III.

La transformation permettant de passer du module imaginaire $k$ au module réel $l$ peut être définie à l'aide de relations linéaires entre les périodes qui correspondent à ces modules.

Posons, comme plus haut,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2\sin^2\varphi}}, \qquad iL' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2\sin^2\varphi}};$$

L et $iL'$ forment un couple de périodes primitives de la fonction à module réel $\operatorname{sn}(U, l)$.

On sait (voir *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, p. 216) que la fonction $\wp(u;\, e_1, e_2, e_3)$ admet comme périodes primitives les quantités $\omega_1$ et $\omega_3$ définies par les égalités

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega'_2}{2}, \qquad \omega_2\sqrt{\rho} = \mathrm{L},$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega'_2}{2}, \qquad \omega'_2\sqrt{\rho} = i\mathrm{L}',$$

et l'on peut en conclure que la fonction

$$s = \operatorname{sn}(gu, k)$$

admet comme périodes primitives les quantités K et $i\mathrm{K}'$ définies par les égalités

$$\mathrm{K} = g\omega_1, \qquad i\mathrm{K}' = g\omega_3.$$

On déduit de là les relations

$$\frac{\mathrm{K}}{g} = \frac{\mathrm{L}}{2\sqrt{\rho}} - \frac{i\mathrm{L}'}{2\sqrt{\rho}},$$

$$\frac{i\mathrm{K}'}{g} = \frac{\mathrm{L}}{2\sqrt{\rho}} + \frac{i\mathrm{L}'}{2\sqrt{\rho}},$$

ou, en se rappelant qu'on a posé $\mathrm{M} = \dfrac{g}{2\sqrt{\rho}}$,

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}} = \mathrm{L} - i\mathrm{L}',$$

$$\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{M}} = \mathrm{L} + i\mathrm{L}';$$

*ces deux relations définissent la transformation* [1]. Elles conduisent à une seconde démonstration de la formule

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{4\mathrm{M}\operatorname{sn}(u,k)\operatorname{dn}(u,k)}{4\mathrm{M}^2\operatorname{dn}^2(u,k) + \operatorname{sn}^2(u,k)}:$$

---

[1] *Voir* le Cours professé à la Faculté des Sciences par M. Hermite, 3e éd., p. 242.

on vérifie que les deux membres sont des fonctions ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis; ces fonctions ne peuvent différer que par un facteur constant, et l'on voit que ce facteur est égal à l'unité en multipliant les deux membres par $u$ et en comparant les limites des deux produits pour $u = 0$.