ÉMILE PICARD

Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 65-73
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__65_0>

SUR LES

PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES

DANS

LA THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE DEUX VARIABLES,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Je développe ici les résultats essentiels que j'ai donnés dans deux Notes des *Comptes rendus* (18 novembre et 23 décembre 1901) sur les périodes des intégrales doubles, en me bornant aux intégrales doubles de *première espèce*. Mon principal objet est d'appeler l'attention sur certaines combinaisons analytiques remarquables, pouvant se prêter ultérieurement à une étude approfondie.

Nous partons d'une surface de degré m, placée arbitrairement par rapport aux axes,

$$f(x, y, z) = 0,$$

avec des singularités ordinaires, et nous considérons une intégrale double de première espèce

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

relative à cette surface, où Q désigne un polynome de degré $m-4$ en x, y, z s'annulant sur la courbe double de la surface.

Si nous envisageons la courbe entre x et z, de genre p pour y arbitraire,

$$f(x, \bar{y}, z) = 0, \tag{1}$$

les $2p$ périodes de l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, \bar{y}, z)\,dx}{f'_z} \tag{2}$$

seront nécessairement des fonctions de y; cette intégrale est d'ailleurs une intégrale de première espèce de la courbe (1). Nous sommes alors dans un cas rentrant dans le type dont nous avons fait plus généralement une étude approfondie (*Théorie des fonctions algebriques de deux variables*, t. I, p. 94). Les $2p$ périodes satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en y, que nous appellerons E, et dont les points critiques correspondent aux points simples de la surface où le plan tangent est parallèle au plan des zx. Le point $y = \infty$ n'est pas un point critique, et toutes les solutions de E s'y annulent et y ont un résidu nul.

Pour chaque point critique $y = b$, l'équation fondamentale déterminante a une racine double; à cette racine double correspond (voir *loc. cit.*) une intégrale holomorphe $\Omega(y)$, et une intégrale non holomorphe $\Omega'(y)$ contenant un terme logarithmique $\log(y - b)$, de telle sorte que l'on ait

$$\Omega'(y) = f(y) + \frac{1}{2\pi i}\Omega(y)\log(y - b),$$

$f(y)$ étant, comme $\Omega(y)$, holomorphe autour de b. Les $2p - 2$ autres intégrales, formant avec Ω et Ω' un système fondamental, sont holomorphes autour de b.

Ceci rappelé, notre point de départ dans l'étude des périodes des intégrales doubles a été le suivant. Considérons un cycle Γ de la courbe (1), se déformant avec y, et revenant à sa position initiale quand y, ayant décrit un certain chemin fermé C, revient lui-même à son point de départ. On obtient évidemment de cette manière un cycle à deux dimensions, qui donnera naissance à une période de l'intégrale double. Le cycle Γ sera caractérisé par ce fait que la période correspondante

$$\omega(y)$$

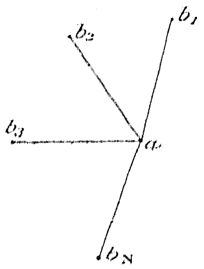
de l'intégrale (2) revient à sa valeur initiale, quand y décrit la courbe C. Étudions la forme analytique de l'intégrale

$$\int_C \omega(y)\,dy$$

prise le long du contour C.

2. Soient $b_1, b_2, \ldots, b_N$ les points critiques de l'équation différentielle E (N désigne ici la *classe* de la surface); joignons ces points à

Fig. 1.



un point a du plan de la variable y, et considérons les différents lacets $ab_1, ab_2, \ldots, ab_N$ formés, comme d'habitude, d'un cercle infiniment petit et d'un chemin allant de a à ce cercle.

Tout chemin C, partant de a et y revenant, se ramène à une somme de lacets parcourus dans un ordre quelconque. Désignons d'une manière générale par $\Omega_i(y)$ la période de l'intégrale (2), holomorphe autour du point b_i, dont il a été question ci-dessus, et qui correspond à la racine double : elle est parfaitement définie de b_i en a sur le lacet. Quand y tourne autour du point b_i, *toute période de l'intégrale se reproduit à un terme additif près de la forme*

$$m_i\Omega_i(y) \qquad (m_i \text{ entier});$$

ceci résulte immédiatement de la forme de la période appelée tout à l'heure $\Omega'(y)$,

Donc, quand y décrivant un chemin fermé C revient au point de départ, l'intégrale considérée de l'équation linéaire E s'augmente d'une expression de la forme

$$\sum m_i \Omega_i(y),$$

la sommation s'étendant à un certain nombre de points b_i. Si l'intégrale ω revient à sa valeur initiale, on devra avoir

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0.$$

Quant à la valeur de l'intégrale

$$\int_C \omega(y)\,dy, \tag{3}$$

elle est facile à calculer; sur le lacet ab_i il reste, après suppression des termes se détruisant à l'aller et au retour,

$$m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy$$

et, par suite, la valeur de l'intégrale (3) *est*

$$\sum m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy. \tag{4}$$

Dans cette expression, $\Omega_i(y)$ est définie sans aucune ambiguïté le long du chemin $b_i a$. D'ailleurs l'expression (4) ne dépend pas de a, comme il résulte immédiatement de l'identité

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0. \tag{5}$$

3. Les considérations précédentes appellent donc notre attention sur l'expression de la forme (4), correspondant à une identité de la forme (5). Une question se pose d'elle-même : *Une expression* (4), *l'identité* (5) *étant supposée satisfaite, peut-elle être envisagée comme une période de l'intégrale double*

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}?$$

Par période de l'intégrale double précédente on doit entendre, de la manière la plus générale, l'intégrale prise le long *d'un cycle à deux dimensions,* c'est-à-dire d'un continuum fermé à deux dimensions à chaque point duquel ne correspond qu'une seule valeur de (x, y, z).

La réponse à la question posée est affirmative, comme nous allons l'établir. Soient donc l'identité

$$(6)\qquad m_1\Omega_1(y)+\ldots+m_s\Omega_s(y)=0 \qquad (\text{les } m \text{ entiers})$$

et l'expression

$$(7)\qquad m_1\int_{b_1}^{a}\Omega_1(y)\,dy+\ldots+m_s\int_{b_s}^{a}\Omega_s(y)\,dy.$$

Considérons l'intégrale $m_1\Omega'_1(y)$ de l'équation E, en désignant par Ω'_1 l'intégrale relative au point b_1 déjà envisagée au n° 1. Quand y décrit le lacet b_1, l'intégrale $m_1\Omega'_1$ s'augmente de

$$m_1\Omega_1(y).$$

Il faut interpréter ce fait analytique au point de vue de la géométrie de situation. Soient généralement, sur la surface de Riemann entre x et z,

$$f(x, y, z)=0,$$

correspondant à y, Γ_1 le contour correspondant à $\Omega_1(y)$, et Γ'_1 le contour correspondant à Ω'_1. Partons du contour $m_1\Gamma'^a_1$ pour $y=a$; la variation de y se produisant, ce contour se déplace en se déformant, et, quand on revient en a, on a le contour

$$m_1\Gamma'^a_1+m_1\Gamma^a_1.$$

Il est clair que, pendant la déformation, on engendre ainsi une surface *ouverte,* mais avec *le seul bord*

$$m_1\Gamma^a_1$$

et la valeur de l'intégrale double correspondant à cette surface ouverte est

$$m_1\int_{b_1}^{a}\Omega_1(y)\,dy.$$

De la même façon, les différents autres termes de la somme (7) correspondront à des surfaces *ouvertes* avec les bords

$$m_2 \Gamma_2^a, \ldots, m_s \Gamma_s^a,$$

Γ_i^a ayant la signification analogue à Γ_1^a, quand b_i remplace b_1.

Nous avons donc s surfaces ouvertes avec les s bords indiqués. D'autre part, pour y arbitraire, les s contours

$$m_1 \Gamma_1, m_2 \Gamma_2, \ldots, m_s \Gamma_s$$

limitent, sur la surface de Riemann

$$f(x, y, z) = 0,$$

une certaine portion P de la surface, d'après l'identité (6). Considérons en particulier la portion P, sur la surface qui correspond à $y = a$; *cette portion* P, *avec les s surfaces ouvertes considérées ci-dessus, forme une surface fermée, qui est un cycle à deux dimensions,* et la valeur de l'intégrale double sur cette surface est précisément l'expression (7), comme nous voulions l'établir (1).

4. On voit que les considérations initiales dont nous étions parti, relatives à certains cycles engendrés d'une manière particulière, ont eu pour conséquence de nous conduire aux expressions générales (7); ce serait une question à examiner, si ces périodes générales (7) peuvent être engendrées toujours par des combinaisons des périodes plus spéciales que j'ai d'abord envisagées. Je suis tenté de croire qu'il en est bien ainsi; mais c'est un point sur lequel je n'insisterai pas, d'autant que la question a en réalité peu d'intérêt. Le résultat essentiel, se dégageant de ce qui précède, est l'existence pour notre intégrale double de périodes d'une forme analytique précise, à savoir les expressions (7) sous la condition (6).

5. Les périodes trouvées se ramènent immédiatement à un nombre limité d'entre elles. Tout d'abord, parmi les $\Omega_i(y)$, il y en a nécessai-

---

(1) Nous n'avons pas à nous préoccuper de savoir si la portion P contient ou non des points correspondant à $x = \infty$, puisque l'intégrale double dont nous sommes parti est de première espèce. Il en serait autrement pour une intégrale qui deviendrait infinie à l'infini. L'étude de ce cas sera faite dans le second fascicule du Tome II de notre *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*.

rement $2p$ qui sont linéairement indépendantes, si l'équation linéaire E est irréductible, ce qui arrivera en général. Soient, pour fixer les idées,

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

des Ω correspondant respectivement aux points critiques $b_1, b_2, \ldots, b_{2p}$ linéairement indépendants.

Si $h > 2p$, on a nécessairement une identité

$$m_1^h \Omega_1 + \ldots + m_{2p}^h \Omega_{2p} + m_h \Omega_h = 0 \qquad (m_h \neq 0).$$

Envisageons alors les expressions

$$A_h = m_1^h \int_{b_1}^a \Omega_1(y)\,dy + \ldots + m_{2p}^h \int_{b_{2p}}^a \Omega_{2p}(y)\,dy + m_h \int_{b_h}^a \Omega_h(y)\,dy$$
$$(h = 2p+1, \ldots, N).$$

Or, si P est une intégrale du type (7), c'est-à-dire

$$P = \sum \mu_i \int_{b_i}^a \Omega_i(y)\,dy \qquad (\text{les } \mu \text{ entiers}),$$

avec l'identité $\Sigma \mu_i \Omega_i(y) = 0$, on pourra manifestement trouver une relation entre les P et les A, par l'élimination des quantités

$$\int_{b_h}^a \Omega_h(y)\,dy \qquad (h = 2p+1, \ldots, N),$$

ce qui conduit à

$$\lambda P + \sum_{h=2p+1}^{h=N} \lambda_h A_h + \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \int_{b_\nu}^a \Omega_\nu(y)\,dy = 0,$$

λ, les λ_h et les δ_ν étant des entiers, et λ étant différent de zéro. Puisque P et les A ne dépendent pas de a, il en sera de même de

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \int_{b_\nu}^a \Omega_\nu(y)\,dy,$$

ce qui entraîne la relation

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \Omega_\nu(y) = 0.$$

Par suite, tous les δ sont nuls, puisque $\Omega_1, \ldots, \Omega_{2p}$ sont linéairement indépendants. Donc, entre P et les A il y a une relation homogène et linéaire à coefficients entiers, et il en résulte que *le nombre des périodes du type* (7) *est au plus égal à* N — $2p$.

6. Une question intéressante se pose maintenant. Il existe des relations homogènes et linéaires à coefficients entiers entre les A, d'où résulte une diminution du nombre des périodes. Puisque l'intégrale double, dont nous sommes parti, est de première espèce, toutes les solutions de l'équation E ont leurs résidus nuls pour le point à l'infini. Soit alors $\omega(y)$ une solution arbitraire de l'équation E; en prenant l'intégrale

$$\int \omega(y)\, dy$$

le long de l'ensemble des lacets $b_1, b_2, \ldots, b_N$, on obtiendra le même résultat que pour un contour autour du point à l'infini, c'est-à-dire zéro. La relation ainsi obtenue est manifestement de la forme

$$\mu_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\, dy + \mu_2 \int_{b_2}^{a} \Omega_2(y)\, dy + \ldots + \mu_N \int_{b_N}^{a} \Omega_N(y)\, dy = 0,$$

et l'on a nécessairement

$$\mu_1 \Omega_1(y) + \mu_2 \Omega_2(y) + \ldots + \mu_N \Omega_N(y) = 0.$$

Cette relation constitue donc une relation homogène et linéaire à coefficients entiers entre les A. En prenant pour $\omega(y)$ successivement $2p$ solutions indépendantes de E, on obtient au plus $2p$ relations de cette nature.

Tel était le point où je m'étais arrêté dans cette recherche de la réduction des périodes. Dans une Note des *Comptes rendus* du 9 décembre 1901, M. Poincaré s'est occupé de son côté des cycles à deux dimensions des surfaces algébriques; on y trouvera les éléments d'une réduction plus complète, dans le nombre des périodes.

7. Dans ce qui précède nous avons raisonné, comme nous le faisons d'habitude dans l'étude des faits généraux de la théorie des fonctions algébriques de deux variables, sur la surface ramenée à n'avoir que

des singularités ordinaires (courbe double avec points triples sur cette courbe double). Des considérations analogues à celles que nous venons de développer sont susceptibles de s'appliquer à beaucoup d'autres cas. Ainsi, la surface pourrait encore avoir des points doubles isolés ordinaires. Pareillement, pour une surface dont l'équation est de la forme

$$z^2 = f(x, y) \qquad (f \text{ étant un polynome}),$$

la théorie précédente s'appliquera aisément, particulièrement dans le cas où la courbe $f = 0$ aurait seulement des points doubles.