ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur les périodes d'une intégrale double de fonction rationnelle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 75-78

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__75_0>

SUR LES

PÉRIODES D'UNE INTÉGRALE DOUBLE

DE FONCTION RATIONNELLE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

M. Poincaré a considéré le premier les résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles (*Acta mathematica*, t. IX); dans ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, j'ai présenté cette théorie sous une autre forme, et je l'ai complétée en montrant (t. I, p. 52) que tous les résidus étaient bien fournis par les règles énoncées par M. Poincaré. La question se pose de savoir si une intégrale double d'une fonction rationnelle de deux variables *peut avoir d'autres périodes que des résidus*. Il est bien certain (voir *loc. cit.*, p. 58) que les périodes provenant d'un cycle à deux dimensions *situé à distance finie et ne rencontrant pas la ligne singulière de la fonction* se ramènent à des résidus, mais en est-il nécessairement de même pour un cycle ne remplissant pas ces conditions? Je me propose précisément de donner un exemple montrant qu'une intégrale de fonction rationnelle peut avoir des périodes qui ne soient pas des résidus, exemple que j'ai signalé dans les *Comptes rendus* (22 avril 1901) [1].

Considérons la surface du troisième ordre

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

[1] Une erreur avait été faite dans la transcription des polynomes désignés ci-dessous par A, B, C et D.

et l'intégrale double relative à cette surface

$$\iint \frac{y\,dx\,dy}{z}. \tag{1}$$

On peut établir d'abord que cette intégrale rentre dans la catégorie de ce que j'appelle *les intégrales doubles de seconde espèce* (*loc. cit.*, t. II, p. 159), mais je ne m'y arrête pas, car ceci résultera de ce que nous dirons plus loin. D'autre part, la surface étant unicursale, nous pouvons exprimer x, y et z en fonctions rationnelles de deux paramètres u et v; soit, par exemple,

$$x = \frac{A}{D}, \qquad y = \frac{B}{D}, \qquad z = \frac{C}{D},$$

où

$$\begin{aligned} A &= v\varepsilon^2 + u\varepsilon + u^2v^2, \\ B &= -v\varepsilon - u\varepsilon^2 - u^2v^2, \\ C &= 1 + uv(v\varepsilon + u\varepsilon^2), \\ D &= 1 + uv(v\varepsilon^2 + u\varepsilon), \end{aligned}$$

ε étant une racine cubique imaginaire de l'unité.

En substituant dans l'intégrale (1), on trouve que celle-ci se transforme en l'intégrale double de fonction rationnelle de u et v

$$\varepsilon(1-\varepsilon)\iint \frac{BC}{D^3}\,du\,dv. \tag{2}$$

Cette intégrale double de fonction rationnelle *n'admet pas de résidu*, mais nous devons la regarder comme *possédant des périodes*. Celles-ci s'obtiennent de la manière suivante. En posant

$$y = \sqrt[3]{1-x^3}\,t, \qquad z = \sqrt[3]{1-x^3}\,\sqrt[3]{1-t^3},$$

l'intégrale (1) devient

$$\iint \sqrt[3]{1-x^3}\,\frac{t}{\sqrt[3]{1-t^3}}\,dx\,dt;$$

et l'on trouve immédiatement des périodes de cette intégrale double. Si, en effet, ω et $\omega\varepsilon$ sont les périodes de l'intégrale simple

$$\int \sqrt[3]{1-x^3}\,dx,$$

et que, pareillement, Ω et $\Omega\varepsilon$ désignent les périodes de l'intégrale simple

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt[3]{1-t^3}},$$

il est clair que l'intégrale double (1) admettra les périodes

$$\omega\Omega \quad \text{et} \quad \omega\Omega\varepsilon,$$

et le produit $\omega\Omega$ serait même facile à calculer explicitement.

L'intégrale double (2) admet donc les deux périodes précédentes. D'ailleurs, cette intégrale n'ayant pas de résidus sera nécessairement (*loc. cit.*, t. II, p. 205) de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial v}\right)du\,dv,$$

P et Q étant rationnelles en u et v. On peut le vérifier indirectement en remarquant que

$$(3)\qquad \int\int\frac{y\,dx\,dy}{z}=\frac{1}{2}\int\int\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{xy^4}{(1-y^3)\,z}\right]\right\}dx\,dy,$$

z étant, bien entendu, la fonction de x et y, définie par l'équation écrite au début.

La circonstance que nous venons de mentionner peut d'abord paraître singulière. En fait, dans l'espace (u, v), les cycles donnant les périodes de l'intégrale (2) rencontrent la ligne singulière de l'intégrale. Ceci montre *qu'on doit élargir la notion de cycle à deux dimensions,* quand on passe d'une surface à une autre, extension nécessaire pour conserver aux périodes un caractère invariant; je m'occuperai ailleurs de cette question, où les points fondamentaux et les courbes exceptionnelles jouent nécessairement un rôle.

A un tout autre point de vue, l'identité (3) appelle l'attention sur une circonstance intéressante : c'est que, pour une surface, une intégrale double de la forme

$$(4)\qquad \int\int\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

où A et B sont des fonctions rationnelles de x, y et z, *peut avoir des* *périodes*. Je rappelle l'exemple que j'ai déjà donné de cette circonstance (*Comptes rendus*, 10 octobre 1899). Soit $P(x)$ un polynome quelconque ayant ses racines distinctes; formons l'identité fondamentale dans la théorie des intégrales hyperelliptiques d'après Weierstrass :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{P(x)}}{(y-x)\sqrt{P(y)}}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{P(y)}}{(x-y)\sqrt{P(x)}}\right]=\frac{U(x,y)}{\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}},$$

où $U(x,y)$ est un polynome en x et y défini par cette identité même.

Envisageons alors la surface

$$z^2 = P(x)P(y)$$

et l'intégrale double relative à cette surface

$$\int\int\frac{U(x,y)\,dx\,dy}{z}.$$

Cette intégrale est égale à

$$\int\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P(x)}{(y-x)z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P(y)}{(x-y)z}\right)\right]dx\,dy;$$

elle est bien de la forme (4), et *elle a une période égale à* $4\pi i$.

D'une manière générale, le calcul des périodes d'une intégrale de la forme (4) présente des particularités intéressantes, mais ceci nous entraînerait trop loin de l'objet de cette courte Note.