Annales scientifiques de l'É.N.S.

Émile Picard

Sur le nombre des conditions exprimant que certaines intégrales doubles sont de seconde espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 79-87
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__79_0>

SUR

LE NOMBRE DES CONDITIONS

EXPRIMANT

QUE CERTAINES INTÉGRALES DOUBLES SONT DE SECONDE ESPÈCE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans mon Mémoire sur les intégrales doubles de seconde espèce (*Journal de Math.*, 1898) et dans le Chapitre VII du Tome II de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, j'ai montré d'abord que toutes les intégrales doubles de seconde espèce relatives à une surface de degré m

$$f(x, y, z) = 0,$$

que nous supposons n'avoir que des singularités ordinaires, se ramènent, par une soustraction convenable, à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}, \tag{1}$$

P étant un polynome s'annulant sur la courbe double; de plus, le degré p du polynome P est limité. Il restait alors à exprimer que l'intégrale précédente est de seconde espèce; c'est ce que j'ai fait (*Théorie des fonctions algébriques*, p. 188). Je montre que le nombre de ces conditions est, en général,

$$2\pi + m - 1,$$

π désignant le genre d'une section plane quelconque de la surface.

En fait, $m-1$ de ces conditions sont remplies d'elles-mêmes, de sorte qu'il reste 2π conditions; c'est ce que je me propose de montrer ici, en même temps que je présenterai sur ces conditions diverses remarques.

1. Les conditions à trouver sont relatives aux points à l'infini de la surface. Posons

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X}$$

et soit alors $F(X, Y, Z) = 0$ l'équation de la surface transformée. L'intégrale devient

$$\int\int \frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_z} dX\, dY, \tag{2}$$

$H(X, Y, Z)$ étant un polynome de degré p s'annulant sur la courbe double. Si p est au plus égal à $m-4$ l'intégrale est de première espèce. Soit donc

$$p > m-4;$$

par la soustraction d'une intégrale convenable de la forme

$$\int\int \left\{ \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{A(X, Y, Z)}{X^{p-(m-3)}}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{B(X, Y, Z)}{X^{p-(m-4)}}\right] \right\} dX\, dY,$$

où A et B sont des polynomes, on obtient une intégrale

$$\int\int \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)}{F'_Z} dX\, dY,$$

$K(X, Y, Z)$ étant un polynome s'annulant sur la courbe double. Pour que cette intégrale soit de seconde espèce, nous avons montré (*loc. cit.*) qu'il faut et il suffit que la fonction algébrique de Y,

$$\frac{K(0, Y, Z)}{F'_Z(0, Y, Z)} \qquad [F(0, Y, Z) = 0], \tag{3}$$

soit la dérivée d'une fonction rationnelle de Y et Z. Si le polynome K n'était pas soumis à certaines conditions, par suite de la manière même dont il a été obtenu, il y aurait manifestement

$$2\pi + m - 1$$

conditions exprimant que l'expression (3) est une fonction rationnelle de Y et Z. Mais le polynome $K(X, Y, Z)$ se trouve soumis à certaines conditions. Pour approfondir davantage la question, remarquons que, l'intégrale double (2) étant de seconde espèce, tout résidu relatif à la courbe $X = 0$ doit être nul. Parmi ces résidus se trouvent les m résidus correspondant à un petit cercle autour de $X = 0$ et à un très grand cercle dans le plan de la variable Y, ou plus exactement dans un feuillet de la surface de Riemann $F(X, Y, Z) = 0$. *Nous allons montrer que ces résidus sont nuls.*

2. Cherchons à cet effet le développement de

$$\frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z}$$

pour Y très grand. L'équation $F = 0$ peut s'écrire

$$\varphi(Y, Z) + X\varphi_1(Y, Z) + \ldots = 0,$$

$\varphi, \varphi_1, \ldots$ étant des polynomes en Y et Z de degrés $m, m-1, \ldots$. Si l'on pose

$$Y = \frac{1}{\eta}, \qquad Z = \frac{\zeta}{\eta},$$

on aura

$$\Phi(\eta, \zeta) + X\eta\Phi_1(\eta, \zeta) + \ldots = 0.$$

Les m racines $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ de l'équation

$$\Phi(0, \zeta) = 0$$

sont distinctes. La racine ζ devenant égale à ζ_i pour $\eta = 0$ se développe de la manière suivante

$$\zeta = \zeta_i + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \ldots,$$

et l'on reconnaît facilement que les α sont des polynomes en X de degrés marqués par les indices, de sorte que α_h est un polynome de degré h en X. Nous avons donc pour la branche considérée

$$Z = \frac{\zeta_i}{\eta} + \alpha_1 + \alpha_2\eta + \ldots$$

et, par suite,

$$Z = \zeta_i Y + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{Y} + \ldots + \frac{\alpha_n}{Y^{n-1}} + \ldots.$$

Soit maintenant

$$H(X, Y, Z) = H_p(Y, Z) + XH_{p-1}(Y, Z) + \ldots;$$

son développement suivant les puissances de Y sera de la forme

$$\beta_0 Y^p + \beta_1 Y^{p-1} + \ldots + \beta_p + \frac{\beta_{p+1}}{Y} + \frac{\beta_{p+2}}{Y^2} + \ldots,$$

les β étant des polynomes en X de degrés marqués par les indices. De même, le développement de F'_Z sera de la forme

$$\gamma_0 Y^{m-1} + \gamma_1 Y^{m-2} + \ldots + \gamma_{m-1} + \frac{\gamma_m}{Y} + \ldots,$$

les γ étant encore des polynomes en X de degrés marqués par les indices. On voit alors que, si l'on développe

$$\frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z}$$

suivant les puissances de Y, on a

$$\frac{H(X, Y, Z)}{F_Z} = Y^{p-(m-1)}\left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{Y} + \frac{\delta_2}{Y^2} + \ldots\right),$$

les δ étant des polynomes en X de degrés marqués par les indices. Le coefficient de

$$\frac{1}{Y}$$

dans ce développement est δ_{p-m+2}.

En revenant à l'intégrale double

$$\iint \frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z}\, dX\, dY,$$

une première intégration autour d'un très grand cercle dans le plan de la variable Y nous donne

$$2\pi i \frac{\delta_{p-m+2}}{X^{p-m+4}},$$

et, en intégrant cette expression autour de $X = 0$, on obtient *zéro*.

3. Si nous nous rappelons maintenant l'identité

$$\frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z} = \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{A(X, Y, Z)}{X^{p-(m-3)}}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{B(X, Y, Z)}{X^{p-(m-4)}}\right] + \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)}{F'_Z},$$

et si nous faisons dans les deux membres l'intégration double précédemment indiquée, les deux premiers termes du second membre donneront *zéro*, et par suite l'intégrale double

$$\iint \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)}{F'_Z} dX\, dY$$

sera nulle pour le continuum indiqué. Or, sa valeur est précisément

$$2\pi i \int_\Gamma \frac{K(o, Y, Z)\, dY}{F'_Z(o, Y, Z)}, \qquad [F(o, Y, Z) = o],$$

cette intégrale simple étant prise sur un très grand cercle Γ dans un feuillet de la surface de Riemann $F(o, Y, Z) = o$. Donc l'expression

$$\frac{K(o, Y, Z)}{F'_Z(o, Y, Z)}$$

a tous ses résidus nuls pour $Y = \infty$. Par suite, quand on écrira que cette expression est la dérivée d'une fonction rationnelle de Y et Z, ou, ce qui revient au même, quand on écrira que l'intégrale abélienne

$$\int \frac{K(o, Y, Z)}{F'_Z(o, Y, Z)} dY \qquad [F(o, Y, Z) = o]$$

est une fonction rationnelle de Y et Z, on n'aura pas besoin d'écrire que les périodes polaires correspondant aux points à l'infini sont nulles. Il suffira d'écrire que les 2π périodes cycliques sont nulles, ce qui d'ailleurs n'exigera, comme il est bien connu, que des opérations algébriques.

4. Le résultat que nous venons d'obtenir aurait pu être démontré encore plus simplement, ou du moins on aurait pu y arriver, en restant dans le même ordre d'idées, sans passer par les développements en séries dont nous avons fait usage. Reprenons l'intégrale primitive

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dz\, dy}{f'_z},$$

et posons

$$x = \frac{X'}{Y'}, \qquad y = \frac{1}{Y'}, \qquad z = \frac{Z'}{Y'}.$$

Aux valeurs $X = o$, $Y = \infty$ considérées tout à l'heure correspondent

$\left(\text{puisque } X' = \frac{1}{Y}, Y' = \frac{X}{Y}\right)$

$$X' = 0, \qquad Y' = 0.$$

L'intégrale primitive se transforme en

$$(4) \qquad \iint \frac{1}{Y'^{p-(m-4)}} \frac{H_1(X', Y', Z')}{F'_{Z'}} dX' dY',$$

en désignant par $F(X', Y', Z') = 0$ la nouvelle équation de la surface.

Cette seconde intégrale, prise le long de deux petites circonférences autour de $X' = 0$, $Y' = 0$, est nulle, puisque l'intégrale

$$\int \frac{H_1(X', Y', Z')}{F'_{Z'}} dX' \qquad [F(X', \overline{Y'}, Z') = 0]$$

(Y' étant constant et très petit), prise le long d'une petite circonférence autour de $X' = 0$, est manifestement nulle. Or, puisque

$$X = \frac{Y'}{X'}, \qquad Y = \frac{1}{X'},$$

aux deux cercles très petits C' et C'_1 autour de $X' = 0$, $Y' = 0$ correspondent dans le plan Y un cercle très grand, et dans le plan X un cercle très petit si les rayons de C'_1 et C' sont eux-mêmes dans un rapport très petit; nous retrouvons donc le résultat obtenu dans un des paragraphes précédents.

5. On peut encore retrouver à un autre point de vue les 2π conditions exprimant que l'intégrale double (1) est de seconde espèce. Si nous envisageons la courbe entre x et z

$$(5) \qquad f(x, \overline{y}, z) = 0,$$

les périodes de l'intégrale abélienne

$$(6) \qquad \int \frac{P(x, \overline{y}, z)\,dx}{f'_z},$$

seront nécessairement des fonctions de y.

Parmi ces périodes se trouvent les périodes logarithmiques correspondant aux divers points à l'infini de la courbe précédente. Examinons d'abord la nature de ces périodes logarithmiques. Soit prise l'équation de la courbe sous la forme

$$f_m(x, z) + y f_{m-1}(x, z) + \ldots + y^m f_0 = 0,$$

les f étant des polynomes en x et z de degrés marqués par l'indice. Si nous posons

$$x = \frac{1}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X},$$

l'équation deviendra

$$\text{(7)} \qquad F_m(X, Z) + y X F_{m-1}(X, Z) + \ldots + y^m X^m F_0 = 0.$$

D'après nos hypothèses sur la disposition arbitraire de la surface par rapport aux axes, l'équation

$$F_m(0, Z) = 0$$

aura ses m racines distinctes que j'appellerai $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$. La courbe (7) passe, quel que soit y, par m points fixes

$$(0, Z_1), \quad (0, Z_2), \quad \ldots, \quad (0, Z_m).$$

Dans le voisinage du point $(0, Z_i)$, le développement de Z suivant les puissances de X sera de la forme

$$Z_i + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_m X^m + \ldots,$$

les α étant des polynomes par rapport à y, comme le montre immédiatement le calcul des dérivées successives de Z pour $X = 0$. Si l'on cherche alors le résidu de l'intégrale (6) pour le point $(0, Z_i)$, on trouve immédiatement que ce résidu est un polynome en y. Il en résulte que *les périodes logarithmiques correspondant aux points à l'infini sont, pour l'intégrale* (6), *des polynomes en* y.

6. Outre ces m résidus (se réduisant évidemment à $m - 1$), l'intégrale (6) a en général 2π périodes cycliques qui sont des fonctions de y, et l'ensemble de ces périodes satisfait à une équation différentielle linéaire E′ d'ordre

$$2\pi + m - 1,$$

dont les coefficients sont rationnels en y. En raisonnant comme à la page 97 du Tome I de ma *Théorie des fonctions algébriques*, on voit de suite que le point $y = \infty$ n'est pas un point critique de l'équation E'; toutes les intégrales de cette équation ont ce point comme pôle ou comme point ordinaire. Soit

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\pi},$$

un système de périodes cycliques. Toutes ces fonctions ω de y doivent avoir leur résidu nul à l'infini, si l'intégrale (1) est de seconde espèce; dans le cas contraire, en effet, en prenant l'intégrale

$$\int \omega \, dy$$

autour du point $y = \infty$, on aurait un *résidu* de l'intégrale double, qui par suite ne serait pas de seconde espèce.

En écrivant donc que les 2π périodes ω ont un résidu nul à l'infini, on doit nécessairement retrouver les 2π conditions dont il a été parlé plus haut. On peut d'ailleurs vérifier directement qu'il en est bien ainsi. Si l'on part en effet de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

et qu'on fasse

$$x = \frac{X}{Y}, \qquad y = \frac{1}{Y}, \qquad r = \frac{Z}{Y},$$

l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

se transforme en

$$\iint \frac{1}{Y^{p-(m-4)}} \frac{\Pi(X, Y, Z)}{F'_z} dY \, dY.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut (il y a seulement permutation de X et Y), l'intégrale double est de seconde espèce si toute période de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{1}{Y^{p-m+4}} \frac{\Pi(X, Y, Z)}{F'_Z} dX,$$

relative à la courbe entre X et Z

$$(8) \qquad F(X, Y, Z) = 0,$$

a son résidu nul pour $Y = 0$. Mais ceci revient à dire que toute période