

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur une formule relative au potentiel de simple couche et son application à la recherche des fonctions harmoniques, satisfaisant à certaines conditions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 23 (1906), p. 503-508

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__503_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE FORMULE RELATIVE
AU
POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE
ET SON APPLICATION A LA
RECHERCHE DES FONCTIONS HARMONIQUES,
SATISFAISANT A CERTAINES CONDITIONS,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Envisageons un potentiel de simple couche relatif à une surface fermée S

$$V = \iint \frac{\rho}{r} d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément de surface, ρ la densité et r représentant la distance à $d\sigma$ du point A pour lequel on prend le potentiel. Les dérivées dans le sens de la normale jouissent de propriétés intéressantes. Soit m un point de la surface et menons la normale en ce point. En désignant par n la direction de la normale intérieure, on peut considérer les valeurs limites, que nous appellerons

$$\frac{dV}{dn} \quad \text{et} \quad \frac{dV'}{dn},$$

des dérivées de V prises suivant la direction n en un point *intérieur* et en un point *extérieur* de la surface infiniment voisins de m sur la normale.

On a les deux formules

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} \right) = 2\pi\rho_m, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dV'}{dn} + \frac{dV}{dn} \right) = \iint \rho \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma, \end{cases}$$

l'angle ψ représentant l'angle que fait la droite joignant m à l'élément $d\sigma$ avec la normale intérieure à la surface en m .

La première de ces formules est classique. La seconde étant moins connue, je me propose d'en indiquer ici tout d'abord une démonstration très simple d'un caractère géométrique (1).

2. Pour plus de simplicité, je supposerai que la surface est régulière et convexe au point m . Soit m_1 un point sur la normale mn en m et à l'intérieur de S .

Considérons, sur la surface autour de m , une aire Σ très petite, mais qui va rester fixe dans les raisonnements une fois qu'elle aura été choisie. La composante suivant mm_1 , de l'attraction exercée sur le point m est

$$(1) \quad \iint \rho \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma,$$

où ψ est l'angle que fait avec mm_1 la droite joignant m à $d\sigma$.

Pareillement l'intégrale

$$(2) \quad \iint \rho \frac{\cos\psi_1}{r_1^2} d\sigma$$

représente la projection sur m_1m de l'attraction exercée par la couche sur le point m_1 , en désignant manifestement par ψ_1 l'angle avec m_1m de la droite joignant m_1 à $d\sigma$ et r_1 désignant la distance de ces deux points. Cette intégrale a la valeur

$$- \frac{dV}{dn}$$

au point m_1 .

(1) Dans un excellent Mémoire sur les fonctions harmoniques (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. XV, Jahrgang 1904) M. Plemelj établit cette formule par un calcul assez long.

Faisons la somme des expressions (1) et (2). Pour l'évaluer, partageons les intégrales en deux parties, l'une relative à l'aire $S - \Sigma$, l'autre à l'aire Σ comprenant le point m . Pour la première, la somme est très petite si $m_1 m$ est très petit, car il y a continuité, m étant en dehors de l'aire $S - \Sigma$.

Pour la seconde, nous allons partager l'aire Σ elle-même en deux portions. A cet effet, donnons-nous une quantité positive η , choisie aussi petite que l'on voudra, mais qui va rester fixe une fois choisie. Considérons alors un cône C de révolution ayant pour sommet m_1 et pour axe $m_1 m$ avec le demi-angle au sommet égal à $\frac{\pi}{2} - \eta$; ce cône découpe sur Σ (si m_1 est assez voisin de m) une aire très petite Σ' intérieure à Σ et comprenant le point m . Pour un élément $d\sigma$ de Σ' , formons le rapport

$$(3) \quad \frac{\cos \psi_1}{\cos \varphi}$$

en désignant par φ l'angle que fait la droite joignant $d\sigma$ à m_1 avec la normale intérieure à la surface en $d\sigma$. Il est clair que, si m_1 est suffisamment rapproché de m , le rapport (3) sera très voisin de un .

Écrivons alors l'intégrale (2) sous la forme

$$(2)' \quad \iint \rho \frac{\cos \psi_1}{\cos \varphi} \frac{\cos \varphi}{r_1^2} d\sigma.$$

Il est maintenant facile d'évaluer la somme de (1) et de (2)' relative à Σ' . La première intégrale est très petite si m_1 est très voisin de m , et la seconde diffère très peu de

$$\iint \rho \frac{\cos \varphi}{r_1^2} d\sigma$$

et, par suite, de

$$\rho_m \iint \frac{\cos \varphi}{r_1^2} d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$2\pi\rho_m(1 - \sin \eta).$$

La somme des intégrales (1) et (2)' relatives à l'aire $\Sigma - \Sigma'$ s'évalue aussi facilement. Elle est très petite; ceci est évident pour (1),

puisque Σ a été supposé très petit. Quant à (2)' on remarque que la valeur de

$$\frac{\cos \psi_1}{\cos \varphi}$$

est finie (et même petite) pour ses éléments, l'angle ψ_1 ne différant que peu d'un droit pour un point de $\Sigma - \Sigma'$, et l'angle sous lequel de m_1 est vue l'aire $\Sigma - \Sigma'$ étant évidemment petit si η et l'aire Σ sont petits.

3. Ceci posé, nous concluons de l'addition de (1) et (2) la formule, quand m_1 se rapproche indéfiniment de m ,

$$(4) \quad \iint \rho \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma - \frac{dV}{dn} = 2\pi\rho_m.$$

C'est une formule fondamentale (1).

4. Une analyse toute semblable peut être développée, en supposant le point m_1 toujours situé sur la normale en m , mais extérieur à la surface. Dans ce calcul, ψ garde la même signification; il faut introduire l'angle ψ_1 que fait avec la direction $m_1 m$ (qui est alors la direction de la normale intérieure), et l'angle φ' qui est l'angle fait par la direction joignant m_1 à $d\sigma$ avec la normale extérieure à la surface. On trouve alors la formule

$$(5) \quad - \iint \rho \frac{\cos \psi_1}{r^2} d\sigma + \frac{dV'}{dn} = 2\pi\rho_m.$$

Il suffit d'additionner et de retrancher les formules (4) et (5) pour obtenir les formules (2).

5. Nous ferons une application intéressante de la formule (4) à un problème relatif aux fonctions harmoniques.

(1) Je me suis inspiré dans cette démonstration du raisonnement fait par Robin pour obtenir son équation fonctionnelle relative au problème de la distribution de l'électricité (voir le Tome I de mon *Traité d'Analyse*, 2^e édition, p. 203). Le raisonnement de Robin était trop sommaire; il a besoin d'être complété par l'introduction de l'aire Σ' intérieure à Σ . L'équation fonctionnelle de Robin se déduit de (4) en faisant $\frac{dV}{dn} = 0$.

Proposons-nous de trouver une fonction harmonique V continue à l'intérieur de S et telle que l'on ait sur S

$$aV + b \frac{dV}{dn} = F \quad (\text{fonction donnée sur } S)$$

où a et b sont des fonctions du point sur la surface.

Cherchons à exprimer la fonction harmonique V par un potentiel de simple couche; l'inconnue sera la densité ρ . Nous aurons donc

$$V = \int \int \rho \frac{d\sigma}{r}.$$

Exprimant alors $\frac{dV}{dn}$ à l'aide de la formule (4), nous obtenons pour ρ l'équation fonctionnelle

$$a \int \int \rho \frac{d\sigma}{r} + b \left(\int \int \rho \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma - 2\pi\rho \right) = F.$$

Supposons maintenant que b ne s'annule pas sur la surface. On a alors

$$(6) \quad \rho - \int \int \rho \left(\frac{a}{b} \frac{1}{2\pi r} + \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} \right) d\sigma = \text{fonction donnée sur } S.$$

C'est une équation fonctionnelle rentrant dans le type de l'équation de Fredholm (1). Il pourra arriver que l'on se trouve dans le cas *singulier* où le problème n'aura pas de solution si la fonction donnée ne satisfait pas à certaines conditions.

Arrêtons-nous sur le cas où b et a auraient toujours les mêmes signes sur la surface, *ces signes étant contraires*. Il est alors facile de voir que l'on n'est pas dans un cas singulier. En effet, si l'on était dans un cas singulier, on pourrait satisfaire à l'équation (6) en mettant *zero* dans le second membre, sans que ρ soit identiquement nul. On pourrait donc, dans cette hypothèse, avoir une fonction harmonique,

(1) Dans un article récent des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (t. XXII, 1906), j'ai eu l'occasion de rappeler les résultats essentiels dus à Fredholm sur son équation fonctionnelle.

non nulle identiquement, satisfaisant sur la surface à la condition

$$aV + b \frac{dV}{dn} = 0.$$

Mais cela est impossible. On aurait, en effet,

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = - \iint V \frac{dV}{dn} d\sigma = \iint \frac{a}{b} V^2 d\sigma;$$

d'où se déduirait que V est identiquement nul, le rapport $\frac{a}{b}$ étant négatif.

Le cas où b peut changer de signe est plus difficile; je me propose de l'étudier ailleurs.

6. La théorie analytique de la chaleur fournit un exemple rentrant dans le problème précédent. *Considérons un corps en équilibre de température avec rayonnement.* En désignant par V la température, cette fonction est harmonique à l'intérieur du corps, et l'on a, en chaque point m de sa surface S ,

$$-\frac{dV}{dn} = k(V_e - V),$$

k étant une fonction *positive* du point m de la surface, et V_e une fonction donnée sur la surface, représentant en chaque point de celle-ci la température *extérieure*. Nous avons donc à trouver une fonction harmonique telle que sur S l'expression

$$\frac{dV}{dn} - kV$$

soit égale à une fonction donnée. C'est le problème précédent et nous ne sommes pas dans un cas singulier puisque $b = 1$ et $a = -k$.