ÉMILE PICARD

Sur la solution du problème généralisé de Dirichlet relatif à une équation linéaire du type elliptique au moyen de l'équation de Fredholm

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 509-516

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__509_0>

SUR LA SOLUTION

DU

PROBLÈME GÉNÉRALISÉ DE DIRICHLET

RELATIF A UNE ÉQUATION LINÉAIRE DU TYPE ELLIPTIQUE

AU MOYEN DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Je me suis autrefois beaucoup occupé du problème généralisé de Dirichlet pour une équation linéaire du type elliptique [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \tag{1}$$

où a, b, c, f sont des fonctions de x et y, et j'ai établi notamment que, dans une région du plan où c est négatif, le problème a une solution et une seule.

Je voudrais montrer ici que la recherche de la fonction continue dans un contour C satisfaisant à l'équation (1), et prenant des valeurs données sur C, se ramène, dans tous les cas, à l'intégration d'une certaine équation fonctionnelle de Fredholm, et cela sans introduire d'autre fonction que la fonction classique de Green. Le problème a, *en général*, une solution et une seule; la méthode fait connaître les cas d'exception. J'ai donné un résumé de ce travail dans les *Comptes rendus* (25 juin 1906).

---

[1] On trouvera une bibliographie de la question dans le dernier Mémoire que j'ai publié sur ce sujet : *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, t. XXV, 1902).

2. Rappelons d'abord le résultat classique relatif à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \mathrm{F}(x, y).$$

L'intégrale de cette équation s'annulant sur un contour C est donnée par la formule

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int\int \mathrm{G}(\xi, \eta; x, y)\, \mathrm{F}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

en désignant par $\mathrm{G}(\xi, \eta; x, y)$ la fonction de Green relative au contour C, c'est-à-dire la fonction harmonique en (ξ, η), s'annulant sur le bord et devenant infinie au point (x, y) comme $\log \frac{1}{r}$ [r étant la distance des deux points (ξ, η) et (x, y)]. Il est important de rappeler que, pour établir ce résultat, il n'est pas suffisant de supposer que la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ est continue. Il faut faire quelque autre hypothèse, dont la plus pratique est l'existence des dérivées $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$ à l'intérieur du contour.

3. Ceci rappelé, posons-nous la question de trouver l'intégrale de l'équation (1) continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres dans un contour C et s'annulant sur C; c'est à ce problème que l'on se trouvera toujours ramené en modifiant convenablement la fonction f. Pour éviter quelques difficultés accessoires, je suppose que C est régulièrement analytique. Quant aux coefficients de l'équation, ils sont continus ainsi que leurs dérivées partielles qu'il peut être utile d'introduire dans les raisonnements.

En supposant l'existence de la solution, on déduit de (1)

$$(\alpha) \quad u(x, y) - \frac{1}{2\pi} \int\int \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, u \right] \mathrm{G}(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta = \psi(x, y),$$

en posant

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int\int f(\xi, \eta)\, \mathrm{G}(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

L'équation (α) n'est pas une équation de Fredholm, mais on peut facilement, au moyen d'intégrations par parties, passer de l'équation (α) à l'équation

$$(\beta)\qquad u(x, y) + \frac{1}{2\pi}\int\int\left[\frac{\partial(aG)}{\partial\xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial\eta} - cG\right] u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \psi(x, y),$$

où l'intégrale double a un sens et qui rentre dans le type de l'équation de Fredholm.

Il suffira, pour le montrer, de prendre le terme

$$(2)\qquad \int\int a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} G(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

Supposons, pour simplifier, que C soit rencontré seulement en deux points 1 et 2 par une parallèle à $O\eta$.

Traçons une petite courbe γ autour du point (x, y). En laissant de côté la partie intérieure à γ, on a

$$\int_1^2 a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} G\, d\xi = -\int_1^2 u\frac{\partial}{\partial\xi}(aG)\, d\xi$$

si la droite (1, 2) ne rencontre pas la courbe γ.

Au contraire, si la droite (1, 2) rencontre γ aux points 1′ et 2′, on doit prendre l'intégrale

$$\int a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} G\, d\xi$$

sur les deux segments (1, 1′) et (2, 2′); le second membre doit alors être remplacé par

$$-\int_1^{1'} u\frac{\partial}{\partial\xi}(aG)\, d\xi - \int_2^{2'} u\frac{\partial}{\partial\xi}(aG)\, d\xi + (auG)_{1'} - (auG)_{2'}.$$

On en conclut que, pour l'aire comprise entre C et γ, on a

$$\int\int a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} G(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta = -\int_\gamma auG\, d\eta - \int\int u\frac{\partial}{\partial\xi}(aG)\, d\xi\, d\eta.$$

Faisons tendre maintenant γ vers zéro (on peut supposer que γ est une petite circonférence). L'intégrale simple tend vers zéro, puisque, en posant $\eta = \rho\cos\theta$ et remarquant que G devient infini comme $\log\frac{1}{\rho}$, on aura le produit $\rho\log\rho$ qui tend vers zéro avec ρ. La transformation est donc effectuée.

L'intégrale du second membre de (β) a d'ailleurs un sens, même quand (x, y) est sur le contour. C'est en effet un résultat connu que l'intégrale

$$\int\int\left|\frac{\partial G}{\partial \xi}\right| d\xi\, d\eta$$

a un sens, même quand (x, y) est sur le bord C.

Remarquons encore que le multiplicateur de u sous le signe d'intégration devient infini comme

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}},$$

et, à ce point de vue, l'équation est de même nature que les équations fonctionnelles présentées par la théorie du potentiel.

En général, c'est-à-dire *si l'on ne se trouve pas dans un cas singulier, l'équation* (β) *aura une solution et une seule*, mais il faut démontrer que la solution de (β) satisfait à l'équation (1), c'est-à-dire que l'on peut de l'équation (β) remonter à l'équation (α), et de celle-ci à l'équation différentielle (1).

4. On voit immédiatement que la chose sera possible, si la fonction $u(x, y)$ tirée de (β) a des dérivées partielles du premier ordre restant finies dans C et sur C, et si elle a à l'intérieur de C des dérivées partielles du second ordre; c'est ce qui résulte du résultat rappelé plus haut sur l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(x, y).$$

Il faut donc montrer que la fonction $u(x, y)$, tirée de l'équation fonctionnelle (β), possède les dérivées indiquées. Nous allons voir que l'on peut substituer à l'équation (β) une autre équation fonctionnelle obtenue au moyen d'une certaine itération. Posons

$$f(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial(a\mathrm{G})}{\partial\xi} + \frac{\partial(b\mathrm{G})}{\partial\eta} - c\mathrm{G}\right],$$

et ensuite

$$f_1(x, y; s, \sigma) = \int\int f(x, y; u, v)\, f(u, v; s, \sigma)\, du\, dv.$$

On montre facilement que la fonction f_1 devient infinie seulement pour $x = s$, $y = \sigma$, et elle est infinie comme

$$\log[(x-s)^2 + (y-\sigma)^2],$$

conséquence de ce que $f(x, y; \xi, \eta)$ devient infinie comme

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}.$$

Écrivons alors l'équation (β) sous la forme

$$u(x, y) + \int\int f(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \psi(x, y).$$

En remplaçant dans cette équation $u(x, y)$ par

$$\psi(x, y) - \int\int f(x, y; s, \sigma)\, u(s, \sigma)\, ds\, d\sigma,$$

on voit que la fonction $u(x, y)$ satisfait à l'équation

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} u(x, y) - \int\int f_1(x, y; s, \sigma)\, u(s, \sigma)\, ds\, d\sigma \\ = \psi(x, y) - \int\int f(x, y; s, \sigma)\, \psi(s, \sigma)\, ds\, d\sigma. \end{aligned}$$

On aura montré que $u(x, y)$ a des dérivées premières si l'on établit que

$$\int\int f(x, y; s, \sigma)\, \psi(s, \sigma)\, ds\, d\sigma$$

a des dérivées premières, aucune difficulté ne se présentant pour les autres termes. Mais ceci revient à voir que l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial G}{\partial s} \psi(s, \sigma)\, ds\, d\sigma$$

a des dérivées premières, ce qui est évident en lui donnant la forme

$$-\int\int G \frac{\partial \psi}{\partial s}\, ds\, d\sigma,$$

intégrale qui a des dérivées restant finies même sur le bord.

Il résulte des considérations que nous venons d'indiquer que u, déterminée par l'équation (β), a des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ déterminées dans C et sur C; par suite, de l'équation (β) on peut remonter à l'équation (α).

5. Pour achever, il faut montrer que $u(x, y)$ a des dérivées secondes à l'intérieur de C, ce qui permettra de passer de l'équation fonctionnelle (α) à l'équation différentielle (1). Nous considérons toujours l'équation (γ). Comme $u(s, \sigma)$ a des dérivées premières, on voit aisément que

$$\int\int f_1(x, y; s, \sigma)\, u(s, \sigma)\, ds\, d\sigma,$$

assimilable pour notre objet à un potentiel logarithmique, a des dérivées secondes à l'intérieur de C. Dans le second membre de (γ), nous avons d'abord $\psi(x, y)$ qui a des dérivées secondes (si le coefficient f a des dérivées premières, comme nous le supposons). Enfin l'intégrale

$$\int\int f(x, y; s, \sigma)\, \psi(s, \sigma)\, ds\, d\sigma$$

a aussi des dérivées secondes. En effet, elle est formée de termes comparables, au point de vue qui nous occupe, à

$$\int\int \frac{\partial G}{\partial s} \psi(s, \sigma)\, ds\, d\sigma,$$

ou encore à

$$-\int\int G \frac{\partial \psi}{\partial s}\, ds\, d\sigma;$$

et comme $\frac{\partial\psi}{\partial s}$ a des dérivées premières (ψ ayant des dérivées secondes), cette dernière intégrale a des dérivées secondes à l'intérieur de l'aire. *L'existence des dérivées, nécessaires pour la rigueur des raisonnements, est donc établie.*

6. En résumé, nous avons établi par l'analyse précédente que, *en général*, il existe pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \tag{1}$$

(un contour C étant donné) *une intégrale, et une seule, continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres à l'intérieur de* C *et s'annulant sur le contour.*

Le mot *en général* sera complètement précisé si, au lieu de l'équation (1), on envisage l'équation où figure un paramètre arbitraire k

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) = f. \tag{2}$$

De ce qui précède il résulte que, pour cette dernière équation, il peut y avoir des valeurs singulières de k, pour lesquelles le théorème précédent n'est pas exact. *Ces valeurs sont les racines de la fonction entière en* k *associée à l'équation fonctionnelle*

$$u(x, y) + \frac{k}{2\pi}\int\int\left[\frac{\partial(aG)}{\partial\xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial\eta} - cG\right]u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = \psi(x, y),$$

qui est notre équation (β), où l'on a introduit le paramètre k.

Le cas *singulier* relatif à l'équation (1) est manifestement le cas où $k = 1$ serait une des valeurs singulières de l'équation (2).

Remarquons enfin, d'après la théorie générale de l'équation de Fredholm, que les valeurs singulières de l'équation (2) sont les valeurs de k pour lesquelles l'équation sans second membre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) = 0$$

a une solution, s'annulant sur C, *qui ne soit pas identiquement nulle.*

D'après ce que j'ai rappelé en commençant, $k = 1$ ne sera certainement pas une valeur singulière si, dans l'aire limitée par C, le coefficient c est négatif ou nul.

7. On voit avec quelle facilité se trouve résolu le problème généralisé de Dirichlet pour une équation linéaire du type elliptique. Ici, comme pour l'équation plus simple de Laplace, la solution d'un problème qui avait demandé tant d'efforts devient, en utilisant les beaux travaux de Fredholm sur l'équation à laquelle son nom doit rester attaché, d'une grande simplicité.