ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur la détermination des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles par les valeurs des dérivées normales sur un contour

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 24 (1907), p. 335-340

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__335_0>

SUR LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR LES VALEURS DES DÉRIVÉES NORMALES SUR UN CONTOUR,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Dans un Mémoire inséré aux *Annales de l'École Normale* (3e série, t. XVIII, 1901), M. Lindeberg a traité l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x, y) V, \tag{1}$$

où $f(x, y)$ était positive dans l'aire A limitée par un contour C, la dérivée $\frac{dV}{dn}$ relative à la normale intérieure en un point de C étant donnée sur ce contour et la fonction V étant continue dans A; sa méthode procédait par approximations successives. Je me propose de montrer que le même problème peut être résolu par une voie toute différente pour une équation linéaire quelconque du type elliptique. Considérons d'abord l'équation (1) sans faire d'ailleurs aucune hypothèse sur le signe de $f(x, y)$.

2. V étant une solution de (1), posons :

$$V(x, y) + \frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta) V(\xi, \eta) \log \frac{1}{r} d\xi \, d\eta = U(x, y),$$

(1) Cet article reproduit deux Notes des *Comptes rendus* (26 novembre et 24 décembre 1906).

où $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, l'intégrale étant étendue à l'aire A. La fonction U est évidemment *harmonique*, et, si l'on désigne par Φ les valeurs données sur C pour $\frac{dV}{dn}$, on aura

$$\frac{dU}{dn} = \Phi + \frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\,V(\xi, \eta)\,\frac{\cos(r, n)}{r}\,d\xi\,d\eta,$$

le point (x, y) étant sur C.

Notre problème revient donc à déterminer la fonction *harmonique* $U(x, y)$ et la fonction $V(x, y)$ de manière que l'on ait les deux équations fonctionnelles

$$(2)\qquad V(x, y) + \frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\,V(\xi, \eta)\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta = U(x, y)\qquad (\text{dans A}),$$

$$(3)\qquad \frac{dU}{dn} - \frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\,V(\xi, \eta)\,\frac{\cos(r, n)}{r}\,d\xi\,d\eta = \Phi\qquad (\text{sur C}).$$

Or l'élimination de V entre ces deux équations est facile. On peut, en effet, tirer de l'équation (2) V en fonction de U à l'aide des méthodes employées par Fredholm dans ce genre d'équations fonctionnelles. La substitution dans (3) conduit alors, pour U, à une équation fonctionnelle de la forme

$$(4)\qquad \frac{dU}{dn} + \int\int Q(\xi, \eta; s)\,U(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = \Phi(s)\qquad (\text{sur C})$$

où nous mettons en évidence l'arc s fixant la position d'un point sur le contour C. La fonction Q est une fonction connue de (ξ, η) et s.

3. Nous avons donc à *résoudre l'équation fonctionnelle* (4) *au moyen d'une fonction harmonique* U.

Ce problème va se ramener à une équation fonctionnelle de Fredholm. Prenons, en effet, pour U un potentiel de simple couche relatif à la ligne C,

$$U = \int \rho(\sigma)\log\frac{1}{r}\,d\sigma,$$

r désignant la distance du point (x, y) à l'élément $d\sigma$.

En faisant la substitution dans (4), on est conduit pour ρ à l'équation fonctionnelle

$$\rho(s) + \int \rho(\sigma)\, P(s, \sigma)\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\Phi(s),$$

$P(s, \sigma)$ étant une fonction connue. On a ainsi une équation de Fredholm pour déterminer la densité ρ qui nous fera connaître U et, par suite, V. Le problème est donc complètement résolu.

4. Il est clair que dans certains cas exceptionnels le problème sera sans solution, du moins si Φ est quelconque; mais, *en général*, le problème a une solution et une seule. Avec précision, et en introduisant un paramètre constant λ, on peut énoncer que l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \lambda f(x, y) V$$

admet une solution continue et une seule pour laquelle $\frac{dV}{dn}$ a des valeurs données sur le bord; il peut y avoir seulement exception pour certaines valeurs de λ racines d'une transcendante entière. Quand f est positif (c'est le cas traité par M. Lindeberg), il n'y a pas de valeurs exceptionnelles de λ qui soient positives. Il est évident que $\lambda = 0$ est toujours une valeur exceptionnelle.

Il est clair que la méthode, avec peu de modifications, s'appliquera si l'on se donne sur le contour, au lieu de $\frac{dV}{dn}$, la somme

$$\frac{dV}{dn} + kV,$$

k étant une fonction du point sur le contour.

5. Considérons maintenant l'équation générale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + cV = 0, \tag{5}$$

où a, b, c sont des fonctions de x et y, la dérivée normale (intérieure) $\frac{dV}{dn}$ sur le bord étant la donnée de la question. Une méthode analogue est applicable; mais, cette extension présentant quelques points délicats, je les indiquerai succinctement.

6. En désignant par $G(\xi, \eta; x, y)$ la fonction classique de Green relative au contour C, dont le point singulier est (x, y), j'envisage la fonction de x et y

$$V(x,y) - \frac{1}{2\pi}\int\int\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial V}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial V}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)V\right]G(\xi,\eta;x,y)\,d\xi\,d\eta,$$

que je désignerai par $U(x, y)$; cette fonction U est évidemment harmonique si V satisfait à l'équation (5). On peut encore écrire, après une intégration par parties,

$$(6)\qquad U(x,y) = V + \frac{1}{2\pi}\int\int\left[\frac{\partial(aG)}{\partial \xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial \eta} - cG\right]V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Il faut déterminer la fonction harmonique U par la condition que $\frac{dV}{dn}$ ait une valeur donnée (intérieure) sur le bord.

7. Il n'est pas possible de tirer ici immédiatement (a et b n'étant pas nuls) de l'équation (6) la valeur de V en fonction de U au moyen des formules usuelles, car la quantité entre crochets devient infinie comme $\frac{1}{r}$ pour $x = \xi$, $y = \eta$, en désignant par r la distance de (x, y) à (ξ, η). Mais cette difficulté peut être surmontée, en faisant une sorte d'itération, comme on le fait précisément dans des cas analogues relatifs à l'équation fonctionnelle de Fredholm. On remplacera donc dans (6), sous le signe d'intégration, $V(\xi, \eta)$ par

$$U(\xi,\eta) - \frac{1}{2\pi}\int\int\left[\frac{\partial(aG)}{\partial \xi'} + \frac{\partial(bG)}{\partial \eta'} - c(\xi',\eta')G(\xi',\eta';\xi,\eta)\right]V(\xi',\eta')\,d\xi'\,d\eta'.$$

On obtient alors une équation

$$(7)\qquad \begin{cases} V(x,y) + \displaystyle\int\int f(\xi,\eta;x,y)\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ \quad = U(x,y) - \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int\int\left[\frac{\partial(aG)}{\partial \xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial \eta} - cG\right]U(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \end{cases}$$

où la fonction $f(\xi, \eta; x, y)$, facile à former, devient seulement infinie en (x, y) comme $\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]$.

On peut alors se servir de l'équation (7) pour avoir explicitement V en fonction de U.

8. Il faut voir maintenant si l'on pourra prendre facilement sur le bord la dérivée normale (intérieure) de la fonction qui est dans le second membre, en supposant que $U(x, y)$ soit une fonction harmonique que l'on mettra sous la forme d'un potentiel de simple couche,

$$U(\xi, \eta) = \int \rho(\sigma) \log \frac{1}{r'} \, d\sigma, \tag{8}$$

où $r'^2 = (\xi - x')^2 + (\eta - y')^2$, en désignant par (x', y') le point du contour correspondant à l'arc σ.

C'est une question qui demande quelque attention, mais qui ne présente pas de réelles difficultés. On établit ainsi que, en un point du contour, la dérivée normale (intérieure) $\frac{dV}{dn}$ de la fonction V tirée de l'équation (6), où U a la valeur (8), est susceptible de se mettre, à un facteur près, sous la forme

$$\rho(s) + \int F(s, \sigma) \, \rho(\sigma) \, d\sigma,$$

$F(s, \sigma)$ étant une fonction connue devenant infiniment grande seulement comme $\log|s - \sigma|$; on désigne ici par s l'arc de C fixant la position du point. On est donc ramené à une équation de Fredholm.

Il est évident que la même méthode est applicable si, au lieu de $\frac{dV}{dn}$, on se donne sur le bord la vale r de la somme

$$\frac{dV}{dn} + kV.$$

9. Nous pouvons donc en définitive résoudre le problème suivant :

Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda \left(a \frac{\partial V}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + c V \right) = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions de x et y, et λ un paramètre constant, trouver *l'intégrale continue de cette équation qui en chaque point d'un contour* C *satisfait à la relation*

$$\frac{dV}{dn} + kV = h,$$

k et h étant des fonctions de la position du point sur le contour.

Ce problème a en général une solution et une seule. Il n'y a d'exceptions que pour certaines valeurs particulières de λ, que fait connaître la méthode.

ERRATA

AU

MÉMOIRE DE M. LANDAU.

Page 190, dernière ligne, *au lieu de* A *lisez* A'
Page 198, dixième ligne, *au lieu de* k *lisez* $(k+2)$
Page 199, quatrième ligne en remontant, *au lieu de* $|\, bx^m$ *lisez* $|\, bx^m \,|$.