R. DE MONTESSUS

Sur les fractions continues algébriques (extrait d'une lettre adressée à la rédaction)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 195-197
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__195_0>

SUR LES

FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES,

PAR M. R. DE MONTESSUS.

(EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A LA RÉDACTION.)

Dans un Mémoire que les *Annales* ont récemment publié (septembre-octobre 1907), M. Padé pose la question de priorité entre lui et moi.

De ses citations il m'est permis de conclure que M. Padé n'est pas informé des résultats que j'ai obtenus et je demande la permission de les rappeler.

Il est vrai que M. Padé s'occupe des fractions continues depuis 1891, telle est du moins la date de sa Thèse, et que je suis nouveau venu dans la question.

M. Padé a classé les fractions continues algébriques (*Thèse*, 1891).

En 1902, c'est le premier travail que je publie sur le sujet, je fixe *complètement* l'aire de convergence d'une classe de fractions continues délimitée par M. Padé (*Soc. math. de France*) (1).

Aussitôt après, j'aborde l'étude de la convergence des fractions continues quelconques; et si la classification de M. Padé intervient encore, ce n'est plus qu'à titre subsidiaire, mes résultats étant tous indépendants de la nature des classes au point de vue de M. Padé.

---

(1) Classe dont M. Padé a étudié la convergence dans les *Annales* de novembre 1907.

Le 23 juin 1902, je fixe l'aire de convergence d'une fraction continue représentant la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$, où ω est une constante *quelconque;* à des artifices de calculs près, *le procédé employé ici le sera dans tous mes travaux ultérieurs* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*).

En octobre 1902, je détermine les aires de convergence des fractions continues représentant les fonctions qui vérifient l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)\frac{dZ(z)}{dz} = qZ(z) + \mathrm{U}(z),$$

où a, b, c, d, p, q sont des constantes et $\mathrm{U}(z)$ un polynome quelconque en z. Les fonctions $Z(z)$ sont de celles qui admettent un développement en séries de puissances (*Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, 1903).

Le 22 février 1904, je généralise les résultats précédents (*Comptes rendus*).

Le 21 novembre 1904, généralisation beaucoup plus étendue, qui me permet, à titre d'exemples, de fixer les aires de convergence de fractions continues représentant les fonctions $\frac{\mathrm{F}(\alpha, \beta+1, \gamma+1, z)}{\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, z)}$ (Gauss), $\frac{\mathrm{F}(s, i+s, i+1, z^2)}{\mathrm{F}(s, i+s-1, i, z^2)}$ (Tisserand), $\int \frac{dz}{1+z^\omega}$ (Lagrange) (*Comptes rendus*).

En 1905 paraît ma Thèse, où je tente de fonder un corps de doctrine. Tous les résultats obtenus antérieurement sont condensés et généralisés. A titre d'exemples nouveaux, je fixe les aires de convergence de fractions continues représentant les fonctions

$$\log(1+z)\ (\text{Gauss}), \quad \log\frac{1+z}{1-z}\ (\text{G.}), \quad (1-2)^\omega\ (\text{G.}),$$

$$\frac{\frac{2}{3\rho}z^2}{\frac{2}{3\rho}z + \mathrm{F}\left(3, 1, \frac{\rho}{2}, z\right)}\ (\text{G.}), \quad \frac{1}{\mathrm{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, z\right)}\ (\text{G.}), \quad (1+z)^\omega;$$

D'un développement de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)\frac{dZ(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \mathrm{U}(z)$$

(je forme ce développement que Laguerre n'avait pu obtenir);

D'un développement de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle

$$1 + 2\omega z Z(z) - Z^2(z) + \Pi z^2 \frac{dZ(z)}{dz} = 0.$$

Mes résultats déterminent entre autres, *et à titre d'application*, les aires de convergence de toutes les suites $\frac{U}{V}$ de fractions rationnelles dont les termes satisfont à l'une ou l'autre des lois que voici :

1° Entre trois polynomes consécutifs U_{p+m+1}, U_{p+m}, U_{p+m-1} ; V_{m+1}, V_m, V_{m-1} ou U_{m+1}, U_m, U_{m-1} ; V_{q+m+1}, V_{q+m}, V_{q+m-1}, existent des relations

$$\begin{aligned} A_h U_{p+m+1} + B_{h+1} U_{p+m} + \Pi(m) A_h U_{p+m-1} &= 0, \\ A_h V_{m+1} + B_{h+1} V_m + \Pi(m) A_h V_{m-1} &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A_h U_{m+1} + B_{h+1} U_m + \Pi(m) A_h U_{m-1} &= 0, \\ A_h V_{q+m+1} + B_{h+1} V_{q+m} + \Pi(m) A_h V_{q+m-1} &= 0; \end{aligned}$$

A_h, B_{h+1} sont des polynomes en z de degrés respectifs h et $h+1$; A_h, B_{h+1}, $\Pi(m)$ sont fonctions de m.

2° Mêmes relations, à cela près que $\Pi(m) A_h$ est remplacé par $\Pi(m) A_h z^2$ (*Rend. del. Circ. math. di Palermo*, 1905).

Dans tous les travaux précités, je me suis efforcé de mettre en lumière ce fait fondamental que : *la convergence des fractions continues a d'ordinaire lieu dans tout le plan de la variable, sauf sur des coupures bien définies qui s'introduisent d'elles-mêmes dans les calculs et qui sont de celles rendant uniforme la fonction que représente la fraction continue;* mais je n'ai pu démontrer directement que les fractions continues divergent sur les coupures ainsi trouvées.

J'ai enfin abordé cette question de divergence sur les coupures dans une Note du 29 mai 1905 (*Comptes rendus*), et, par une voie nouvelle, j'ai obtenu des résultats concluants, mais non généraux.

Je passe sous silence un Mémoire actuellement à l'impression et je regrette que, par suite d'un malentendu, il ne m'ait pas été possible d'envoyer cette Note dès l'apparition du travail de M. Padé, que je vise ici.