ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann et sur le pouvoir refroidissant d'un courant fluide

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 585-591

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__585_0>

SUR LA

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

AVEC LA LOI DE NEUMANN

ET SUR LE

POUVOIR REFROIDISSANT D'UN COURANT FLUIDE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait combien d'exemples ont été donnés de questions de Physique mathématique résolues à l'aide de l'équation fonctionnelle de Fredholm. Quand on a pu ramener le problème à une telle équation, il reste en général à examiner si l'on se trouve ou non dans un cas singulier; il peut arriver cependant que des circonstances plus complexes se présentent, soit parce que le problème comporte, outre les fonctions, certaines constantes inconnues, soit parce qu'une discussion est nécessaire pour étudier la nature des fonctions en quelque point singulier. Je me propose de donner ici deux exemples très simples de ces circonstances; je les ai indiqués dans mon Cours l'année dernière.

1. Divers auteurs, en particulier C. Neumann, ont déjà étudié une loi d'attraction correspondant à un potentiel plus général que le potentiel newtonien, je veux parler du potentiel de la forme

$$\frac{e^{-kr}}{r} \qquad (k > 0), \tag{1}$$

et l'on peut notamment consulter à ce sujet le Livre de C. Neumann [1].

---

[1] C. NEUMANN, *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen* (Leipzig), 1896.

Si donc on suppose que la loi des attractions électriques corresponde à la fonction de la distance

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{r^2},$$

on peut reprendre tous les problèmes relatifs à la distribution de l'électricité; c'est ce qu'a fait Neumann dans le cas des conducteurs sphériques.

Il est facile de voir que le problème général de la distribution électrique correspondant au potentiel (1) se ramène à une équation de Fredholm. Pour abréger, prenons simplement un conducteur C isolé et possédant une certaine charge. Il y a ici à trouver une couche *superficielle* sur la surface du conducteur et la distribution *à l'intérieur* de ce conducteur. Nos inconnues sont donc une densité superficielle ρ_1 et une densité de volume ρ_2 pour l'intérieur de C. Le potentiel total V est donc exprimé par la formule

$$V = V_1 + V_2,$$

en posant

$$V_1 = \int\int \rho_1 \frac{e^{-kr}}{r}\, d\sigma, \qquad V_2 = \int\int\int \rho_2 \frac{e^{-kr}}{r}\, dv,$$

la première intégrale étant étendue à la surface S du conducteur, et la seconde au volume de celui-ci.

Or on démontre de suite qu'on a dans le conducteur

$$\Delta V = k^2 V - 4\pi\rho_2, \tag{2}$$

formule qui généralise la formule de Poisson.

Comme, à l'intérieur de C, le potentiel est nécessairement constant, il résulte de cette formule que ρ_2 *est une constante*.

Rappelons-nous maintenant que, si l'on pose

$$V_1 = \int\int \frac{\rho_1 e^{-kr}}{r}\, d\sigma,$$

on a pour la dérivée normale intérieure $\frac{dV_1}{dn}$ de ce potentiel de simple couche en un point s de la surface

$$\frac{dV_1}{dn} = \int\int f(r)\cos\psi.\rho_1^\sigma\,d\sigma - 2\pi\rho_1^s \qquad \left[f(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)\right],$$

où ψ désigne l'angle que fait avec la normale intérieure en s la droite joignant le point s à l'élément $d\sigma$.

Le problème est alors facile à mettre en équation. On a sur la surface S

$$\frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn} = 0,$$

puisque V est constant dans le conducteur. Nous pouvons donc écrire

$$\int\int f(r)\cos\psi.\rho_1^\sigma\,d\sigma - 2\pi\rho_1^s + \frac{dV_2}{dn} = 0. \tag{3}$$

Or

$$V_2 = \rho_2\int\int\int\frac{e^{-kr}}{r}\,dv.$$

Il est donc possible de calculer $\frac{dV_2}{dn}$ qui est égal au produit de ρ_2 par une fonction connue du point s sur la surface. On voit que l'équation (3) constitue une équation de Fredholm pour la densité superficielle ρ_1, qui se trouve exprimée alors à l'aide de la constante ρ_2. On est assuré de ne pas être dans un cas singulier, car il est aisé d'établir que, pour l'équation fonctionnelle en ρ

$$\rho_s - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int f(r)\cos\psi.\rho_\sigma\,d\sigma = U_s \qquad \text{(fonction donnée)}, \tag{4}$$

les valeurs singulières du paramètre λ ont toutes un module *supérieur* à l'unité ($k \neq 0$), ce qui, par parenthèse, montre que les problèmes relatifs au potentiel (1) sont plus faciles pour k différent de zéro et positif que pour $k = 0$ [1].

---

[1] Ainsi l'intégrale de l'équation

$$\Delta V = k^2 V,$$

continue dans S et pour laquelle $\frac{dV}{dn}$ prend des valeurs données sur S, s'exprime par un

Nous avons trouvé, au moyen de l'équation (3),

$$\rho_1^s = A_s \rho_2,$$

A_s étant une fonction connue du point s de la surface S. On déterminera la constante ρ_2 par l'équation du premier degré

$$\rho_2\left(\int\int A_\sigma\, d\sigma + W\right) = Q,$$

W étant le volume du conducteur et Q la charge donnée. Le problème est ainsi complètement résolu.

Il faut cependant montrer que le coefficient de ρ_2 dans la dernière équation ne peut être nul. On aurait, dans le cas contraire, en prenant pour ρ_2 une constante arbitraire, un équilibre pour lequel la charge serait toujours nulle, et il est aisé de voir qu'on est conduit à une contradiction. En effet, le potentiel total V satisfaisant à l'équation (2) à l'intérieur du conducteur et $\frac{dV}{dn}$ étant nul à la surface, il en résulte que V a la valeur constante $\frac{4\pi\rho_2}{k^2}$ à l'intérieur et sur la surface. *A l'extérieur* V satisfait à l'équation

$$\Delta V = k^2 V.$$

Supposons pour fixer les idées ρ_2 et par suite V positifs sur la surface S; il résulte de propriétés élémentaires de l'équation précédente que la dérivée normale limite *extérieure* (rapportée à la direction de

---

potentiel de simple couche

$$V = \int\int \rho \frac{e^{-kr}}{r}\, d\sigma,$$

la densité ρ satisfaisant à l'équation conditionnelle

$$(\alpha) \qquad \rho_s - \frac{1}{2\pi}\int\int f(r)\cos\psi \,.\, \rho_\sigma\, d\sigma = U_s.$$

Il résulte de ce qui a été dit sur l'équation (4) que la solution de cette équation peut être développée suivant les puissances de λ et que la convergence a encore lieu pour $\lambda = 1$, d'où la solution de (α) sous une forme extrêmement simple.

la normale *intérieure*) $\frac{dV'}{dn}$ est positive. Or on a

$$\frac{dV'_1}{dn} - \frac{dV_1}{dn} = 4\pi\rho_1^s;$$

comme

$$\frac{dV'_2}{dn} - \frac{dV_2}{dn} = 0,$$

on arrive à la conclusion $\frac{dV'}{dn} - \frac{dV}{dn} = 4\pi\rho_1^s$, et, puisque $\frac{dV}{dn} = 0$, il en résulte que la densité superficielle ρ_1 est partout positive (ou nulle). Comme la densité de volume ρ_2 est positive, la masse électrique totale ne peut être nulle; ce qui est contradictoire.

2. Prenons, comme second exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{1}{C}\frac{\partial\theta}{\partial y},$$

C étant une constante positive, rencontrée par M. Boussinesq dans l'étude du pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un solide, et étudions à son sujet la question suivante qui me fut posée, il y a quelques années, par mon éminent confrère :

*Trouver l'intégrale de cette équation, continue à l'*EXTÉRIEUR *d'un contour* Γ, *prenant des valeurs données sur ce contour et s'annulant à l'infini.*

Tout d'abord en posant

$$\theta = e^{\frac{y}{2C}}\varphi,$$

on a pour φ l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{4C^2}\varphi.$$

En choisissant convenablement les unités, on peut supposer que $2C = 1$. Il s'agit donc de trouver une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \varphi, \tag{5}$$

prenant des valeurs données sur Γ, et telle que le produit

$$e^{y} v$$

soit nul à l'infini.

Nous avons besoin de considérer une intégrale particulière de l'équation (5) correspondant à l'équilibre calorifique d'une plaque isotrope indéfinie rayonnant au dehors, avec une seule source et nulle à l'infini. Cette solution u, dépendant seulement de la distance r à la source, peut être représentée par

$$u(r) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{zr}\,dz}{\sqrt{z^2-1}}, \tag{6}$$

comme je l'ai montré autrefois; elle devient infinie à l'origine comme $\log\frac{1}{r}$, et de plus

$$u\sqrt{r}\,e^{r} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dr}\sqrt{r}\,e^{r}$$

tendent vers des limites finies pour $r=\infty$.

Ceci rappelé, nous allons exprimer l'intégrale cherchée sous la forme d'une sorte de potentiel de double couche

$$v = -\int_{\Gamma} \rho \frac{du}{dr} \cos(r, n)\,d\sigma, \tag{7}$$

où r désigne la distance de l'élément $d\sigma$ de Γ au point (x, y), et (r, n) l'angle formé par cette direction r avec la normale intérieure. On a évidemment

$$v' - v_s = -\pi\rho_s,$$

v_s désignant la valeur de v en un point s de Γ, et v' la valeur limite *extérieure* de v en ce point. De là se tire l'équation fonctionnelle donnant ρ; elle peut s'écrire

$$\rho_s + \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \frac{du}{dr}\cos(r, n)\,d\sigma = \text{fonction donnée.}$$

C'est une équation de Fredholm; on n'est pas dans un cas singulier [1], et pour sa résolution effective on pourra utiliser une remarque analogue à celle que nous avons faite dans la note du n° 1. La fonction $v(x, y)$ que nous venons de trouver est pour le point (x, y) s'éloignant indéfiniment de l'ordre de

$$\frac{e^{-R}}{\sqrt{R}},$$

en désignant par R la distance du point (x, y) à un point fixe du plan, l'origine par exemple; cela résulte de la propriété rappelée plus haut de la fonction $u(r)$.

Il est maintenant évident que l'expression (6) s'annule à l'infini, de quelque manière que (x, y) s'éloigne indéfiniment. Nous avons donc trouvé une solution θ de l'équation initiale, prenant les valeurs données sur Γ, et s'annulant à l'infini. La façon dont θ s'annule varie avec la direction suivie par (x, y) en s'éloignant indéfiniment. Nous nous en rendons compte très aisément sur cet exemple simple; dans d'autres problèmes de même nature, où figurent des singularités essentielles, on pourra rencontrer, à cet égard, de sérieuses difficultés.

---

[1] Pour l'établir, il suffit de remarquer que, dans le cas contraire, on pourrait trouver un potentiel (7) de double couche, à densité ρ non nulle, pour lequel la valeur limite v' sur la courbe Γ serait nulle. Il est clair qu'alors v serait partout nul à l'extérieur. Donc, à cause de la continuité des dérivées normales pour le passage par la courbe, on aurait sur la courbe Γ pour l'intérieur

$$\frac{dv}{dn} = 0.$$

Or, une intégrale de (5), définie à l'intérieur de Γ, et pour laquelle cette condition est vérifiée, est identiquement nulle. Les limites intérieure et extérieure de v sur la courbe Γ étant nulles, la densité ρ est nécessairement égale à zéro, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite.