FRÉDÉRIC RIESZ

Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 31 (1914), p. 9-14

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE;

DÉMONSTRATION NOUVELLE D'UN THÉORÈME

CONCERNANT

LES OPÉRATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES

PAR M. FRÉDÉRIC RIESZ.

Il s'agit du théorème suivant : *Étant donnée une opération fonctionnelle linéaire* A_f *qui porte sur l'ensemble des fonctions* $f(x)$ *continues dans l'intervalle* (a, b), *il existe toujours une fonction à variation bornée* $\alpha(x)$, *la même pour toutes les* f, *de sorte que l'opération* A_f *est représentée par l'intégrale, prise au sens de Stieltjes :*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x). \tag{1}$$

J'ai énoncé ce théorème et j'en ai esquissé la démonstration dans les *Comptes rendus* du 29 novembre 1909, j'y suis revenu d'une façon plus détaillée dans le Tome XXVIII (année 1911) de ces *Annales*. M. Helly en a publié une autre démonstration dans les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne*, du 8 février 1912. Dans ce qui suit, je voudrais exposer une démonstration qui me semble plus élémentaire que les deux autres. Elle me fut suggérée par une remarque faite par M. Lebesgue à propos de ma Note de 1909 et concernant le rôle que jouent les suites monotones de fonctions dans les questions de ce genre.

Rappelons brièvement les définitions nécessaires. L'opération fonctionnelle A, faisant correspondre à chaque élément $f(x)$ de la classe envisagée un nombre A_f bien déterminé, est dite *linéaire*, lorsqu'elle est *distributive* et *bornée*. L'opération est dite *distributive*, si

$$A_{c_1 f_1 + c_2 f_2} = c_1 A_{f_1} + c_2 A_{f_2},$$

pour tout choix des fonctions f_1, f_2 et des constantes c_1 et c_2. L'opération est dite *bornée*, s'il existe une constante M_A de sorte que, pour chaque f,

$$|A_f| \leqq M_A \times \max. |f(x)|. \tag{2}$$

Enfin, par l'intégrale (1), on entend la limite de l'expression

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)], \tag{3}$$

correspondant à une division de l'intervalle (a, b) en des intervalles partiels $I_k = (x_k, x_{k+1})$; ξ_k désigne un point arbitraire de l'intervalle I_k. Le passage à la limite consiste à faire croître indéfiniment le nombre des intervalles et cela d'une façon arbitraire, en exigeant seulement que le plus grand des intervalles $x_{k+1} - x_k$ tende vers zéro. Sauf cette définition, nous n'emprunterons rien à la théorie des intégrales de Stieltjes.

Pour aller à la démonstration, observons tout d'abord (ce qui d'ailleurs n'est pas essentiel) que nous pourrons nous borner à considérer seulement des fonctions réelles et des opérations qui font correspondre aux fonctions réelles des nombres réels ; car on voit immédiatement comment le cas complexe se ramène au cas réel.

L'idée fondamentale de la démonstration consiste à étendre l'opération A_f, donnée primitivement pour l'ensemble des fonctions continues, à un champ fonctionnel plus vaste. Envisageons une suite indéfinie croissante de fonctions continues : $f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \leqq \ldots$, tendant vers une fonction bornée φ. Je dis que pour n infini, A_{f_n} tend vers une limite finie. En fait, considérons la série

$$|A_{f_2} - A_{f_1}| + |A_{f_3} - A_{f_2}| + \ldots. \tag{4}$$

Les sommes partielles de cette série sont des valeurs qui correspondent, moyennant l'opération A, aux fonctions représentées par les sommes partielles respectives de la série

$$\pm[f_2(x)-f_1(x)]\pm[f_3(x)-f_2(x)]\pm\ldots,$$

où l'on suppose choisis convenablement les signes. Or, toutes ces sommes partielles sont, en valeur absolue, inférieures ou au plus égales à

$$[f_2(x)-f_1(x)]+[f_3(x)-f_2(x)]+\ldots=\varphi(x)-f_1(x),$$

et, par conséquent, elles sont aussi inférieures, en valeur absolue, à une constante C. Donc, d'après l'hypothèse (2), les sommes partielles de la série (4) sont toutes inférieures à CM_A. Il s'ensuit que la série

$$A_{f_1}+(A_{f_2}-A_{f_1})+(A_{f_3}-A_{f_2})+\ldots,$$

dont les sommes partielles ne sont autres que les A_{f_n}, converge absolument. A plus forte raison, A_{f_n} tend vers une limite finie déterminée.

Convenons de désigner cette limite par A_φ et de l'attacher à la fonction φ qui n'est pas nécessairement continue. Pour légitimer cette convention, il faut tout d'abord démontrer que, si deux suites croissantes $[f_n(x)]$, $[g_n(x)]$ ont la même fonction limite φ, les quantités A_{f_n} et A_{g_n} tendront aussi, à leur tour, vers une même limite. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les deux suites soient croissantes au sens étroit : $f_1<f_2<f_3<\ldots$, $g_1<g_2<g_3<\ldots$; dans le cas contraire, on n'aura qu'à raisonner sur les suites $\left[f_n(x)-\frac{1}{n}\right]$, $\left[g_n(x)-\frac{1}{n}\right]$. Cela étant, soit f_m un élément quelconque tiré de la première suite que nous tenons fixe, et parcourons la suite $[g_n(x)]$. Je dis que, pour n suffisamment grand, on aura $f_m(x)<g_n(x)$. En fait, dans le cas contraire, les points x tels que $f_m(x)\geqq g_1(x)$, $f_m(x)\geqq g_2(x)$, ..., constitueraient une suite indéfinie d'ensembles fermés, contenant chacun les suivants, et il y aurait au moins un point x^* compris dans tous ces ensembles. On y aurait $f_m(x^*)\geqq\varphi(x^*)$, contrairement à l'hypothèse faite. Par les mêmes raisons, il y a pour chaque fonction g_m une infinité de fonctions f_n plus grandes. On peut donc former une suite indéfinie $f_{m_1}<g_{m_2}<f_{m_3}<g_{m_4}<\ldots$, tendant vers φ, et la suite des valeurs A correspondantes tend vers une limite finie bien déterminée. Or, la suite comprend une infinité des quantités A_{f_n} et une infinité des quantités A_{g_n}; par conséquent, on a

$$\lim_{n \to \infty} A_{f_n} = \lim_{n \to \infty} A_{g_n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi, l'opération A vient d'être définie univoquement pour toute fonction bornée qui est limite d'une suite croissante de fonctions continues. Il est manifeste qu'on peut la définir de même pour les fonctions limites des suites décroissantes. Mais il y a plus. Soient φ et ψ deux fonctions du type considéré, alors la fonction $\varphi + \psi$ sera du même type et l'on aura $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$. Au contraire, la fonction $\varphi - \psi$ n'appartient, en général, ni au type φ, ni au type opposé. Convenons de définir

$$A_{\varphi-\psi} = A_\varphi - A_\psi.$$

Pour légitimer cette convention, il faut montrer que, lorsque

$$\varphi - \psi = \varphi^\star - \psi^\star,$$

on a aussi

$$A_\varphi - A_\psi = A_{\varphi^\star} - A_{\psi^\star}.$$

Or, l'hypothèse s'écrit aussi $\varphi + \psi^\star = \varphi^\star + \psi$, et alors

$$A_\varphi + A_{\psi^\star} = A_{\varphi+\psi^\star} = A_{\varphi^\star+\psi} = A_{\varphi^\star} + A_\psi,$$

ce qui donne $A_\varphi - A_\psi = A_{\varphi^\star} - A_{\psi^\star}$. Donc la convention faite est légitime et l'opération A vient d'être définie pour toutes les fonctions du type $\varphi - \psi$.

Il est à peu près évident que l'opération ainsi prolongée ne cesse pas d'être distributive, voyons qu'elle subsiste aussi d'être bornée. D'une façon précise, nous allons montrer que

$$|A_{\varphi-\psi}| \leqq M_A \times \text{borne sup.} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Désignons, pour abréger, cette borne supérieure par G et soient $[f_n(x)]$, $[g_n(x)]$ deux suites croissantes de fonctions continues tendant respectivement vers $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Introduisons les fonctions auxiliaires $h_n(x)$ en posant $h_n(x) = f_n(x)$ partout où $|f_n(x) - g_n(x)| \leqq G$, $h_n(x) = g_n(x) + G$ si $f_n(x) - g_n(x) > G$ et enfin $h_n(x) = g_n(x) - G$ si $f_n(x) - g_n(x) < -G$. On voit immédiatement que les fonctions $h_n(x)$ sont continues et qu'elles forment une suite croissante tendant vers φ. De plus, on a max. $|h_n(x) - g_n(x)| \leqq G$. Par conséquent, on a

$$|A_{\varphi-\psi}| = |\lim_{n\to\infty} (A_{h_n} - A_{g_n})| = \lim_{n\to\infty} |A_{h_n-g_n}| \leqq M_A G,$$

ce qu'il fallait prouver.

Pour le but que nous poursuivons, nous n'avons pas besoin d'examiner de plus près le champ fonctionnel envisagé. Il suffira de remarquer qu'il comprend entre autres, outre les fonctions continues, certaines fonctions discontinues très simples que nous allons indiquer et que, de plus, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ appartiennent au champ, leurs combinaisons linéaires $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ lui appartiennent également. Soit $c \leqq d$ et désignons par $f_{c,d}(x)$ la fonction égale à 1 pour $c \leqq x \leqq d$ et s'annulant ailleurs. Cette fonction peut être considérée comme fonction limite d'une suite $[f_n(x)]$ où $f_n(x)$ est la fonction continue égale à 1 pour $c \leqq x \leqq d$, s'annulant pour $x \leqq c - \frac{1}{n}$ et pour $x \geqq d + \frac{1}{n}$ et linéaire dans les intervalles $\left(c - \frac{1}{n}, c\right)$, $\left(d, d + \frac{1}{n}\right)$. Ces fonctions continues forment une suite décroissante et, par conséquent, leur fonction limite $f_{c,d}$, qui est évidemment bornée, appartient au champ envisagé.

L'introduction des fonctions $f_{c,d}$ nous permet tout d'abord de définir la fonction à variation bornée $\alpha(x)$ qui figure dans notre théorème. Posons $\alpha(a) = 0$ et pour $a < x \leqq b$, $\alpha(x) = A_{f_{a,x}}$. Je dis que la fonction $\alpha(x)$ ainsi définie est à variation bornée, sa variation totale ne surpassant pas la constante M_A. En effet, décomposons l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels (x_k, x_{k+1}) et considérons l'expression

$$\sum_k |\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)|.$$

Il faut montrer que la valeur de cette expression ne peut pas surpasser M_A. Or, c'est la même valeur qui correspond, par l'opération A, à une certaine fonction f qu'on n'a pas besoin de préciser; il suffit d'observer que, dans chacun des intervalles partiels, la fonction f est égale constamment à -1, 0, ou 1, suivant le signe de $\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)$ et qu'elle prend aussi aux points x_k l'une de ces trois valeurs. Par conséquent, c'est une combinaison linéaire des fonctions f_{x_k,x_k} et $f_{x_k,x_{k+1}}$, elle appartient donc certainement au champ envisagé; de plus, elle est, en valeur absolue, $\leqq 1$; par suite $|A_f| \leqq M_A$.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction continue, et décomposons l'intervalle (a, b) en des intervalles partiels

$$I_k = (x_k, x_{k+1}) \; (k = 1, \ldots, n, \; x_1 = a, \; x_{n+1} = b).$$

Désignons par ξ_k un point quelconque appartenant à l'intervalle I_k. Je définis la fonction $\varphi(x)$ comme suit : elle est constante et égale à la quantité correspondante $f(\xi_k)$ à l'intérieur et à l'extrémité droite de chacun des intervalles I_k; enfin, $\varphi(a) = f(\xi_1)$. La fonction ainsi définie est manifestement discontinue (sauf des cas évidents où elle se réduit à une constante), mais elle appartient au champ fonctionnel envisagé, puisqu'elle est combinaison linéaire des fonctions f_{a,x_k}. D'une façon précise, on a

$$\varphi(x) = f(\xi_1) f_{a,x_2}(x) + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\,[f_{a,x_{k+1}}(x) - f_{a,x_k}(x)].$$

Par suite, on a

$$A_\varphi = f(\xi_1)\,\alpha(x_2) + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\,[\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)];$$

ou enfin, en observant que $\alpha(x_1) = \alpha(a) = 0$, il vient

$$A_\varphi = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)].$$

Quant au second membre de cette relation, on y reconnaît l'expression (3) qui sert à définir l'intégrale (1). D'autre part, en désignant par ω l'oscillation maximée de $f(x)$ dans les intervalles partiels, la différence $f(x) - \varphi(x)$ reste, en valeur absolue, inférieure ou égale à la quantité ω et, par suite,

$$|A_f - A_\varphi| = |A_{f-\varphi}| \leqq \omega M_A.$$

En choisissant les intervalles partiels infiniment petits, l'oscillation ω et alors la différence $A_f - A_\varphi$ peuvent être rendues aussi petites qu'on voudra. C'est-à-dire que si l'on fait croître indéfiniment le nombre des intervalles partiels de sorte que le plus grand tende vers zéro, A_φ et alors l'expression (3) qui le représente tendront vers A_f. Le théorème est donc démontré.