ÉMILE PICARD

Sur les périodes des intégrales doubles et sur une classe d'équations différentielles linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 50 (1933), p. 393-395

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__393_0>

SUR LES

PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES

ET SUR UNE

CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES[1]

PAR M. ÉMILE PICARD

« On sait que, étant donnée une courbe algébrique dépendant d'un paramètre α

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

où f désigne un polynome en x, y, et α, les périodes d'une intégrale abélienne relative à cette courbe

$$\int \mathrm{R}(x, y, \alpha)\, dx$$

(R étant rationnelle en x, y, et α) sont des fonctions de α satisfaisant à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont rationnels en α.

Un problème analogue se pose de lui-même pour une surface algébrique

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

dépendant d'un paramètre α. Afin de bien préciser, supposons que,

(1) Le travail qu'on vient de lire de M. Émile Cotton sur des intégrales contenant un paramètre me remet en mémoire une Note que j'ai publiée il y a longtemps dans les *Comptes rendus : Sur les périodes des intégrales doubles et sur une classe d'équations différentielles linéaires* (*Comptes rendus*, 134, 1902. p. 69-71). Je la reproduis ici sans modifications. Je ne suis jamais revenu sur les équations différentielles qui y sont signalées; leur étude mériterait peut-être d'être poursuivie, et il serait intéressant de former effectivement quelques exemples. E. P.

pour α arbitraire, la surface soit de la nature de celles que nous envisagions dans une Communication récente, et, pour prendre le cas le plus intéressant, considérons une intégrale double de *seconde espèce*

$$\int\int \frac{Q(x, y, z, \alpha)\,dx\,dy}{f'_z}, \tag{1}$$

Q étant un polynome en x, y, z et α. Les périodes correspondant à des cycles à deux dimensions tout entiers à distance finie *sont des fonctions de α satisfaisant à une équation différentielle linéaire.*

On peut obtenir une telle équation en procédant de la manière suivante : Posons

$$R = \frac{Q}{f'_z};$$

toutes les intégrales doubles

$$\int\int \frac{\partial^k R}{\partial \alpha^k}\,dx\,dy$$

sont, comme (1), de seconde espèce. Si l'on prend μ assez grand, on est assuré de pouvoir déterminer des fonctions rationnelles A_k de α, telles que la somme

$$\sum_{k=0}^{k=\mu} A_k \int\int \frac{\partial^k R}{\partial \alpha^k}\,dx\,dy$$

soit de la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{2}$$

U et V étant des fonctions rationnelles de x, y, z et α devenant seulement infinies à distance finie, quand $f'_z = 0$. Il résulte de là que toutes les périodes considérées ω de l'intégrale double (1) satisfont à l'équation différentielle linéaire qu'il est possible d'obtenir explicitement

$$A_0 \omega + A_1 \frac{d\omega}{d\alpha} + \ldots + A_\mu \frac{d^\mu \omega}{d\alpha^\mu} = 0.$$

Certaines périodes ω peuvent satisfaire à des équations d'ordre moindre. Il peut arriver, en effet, qu'on puisse déterminer des fonctions rationnelles $B_0, \ldots, B_\nu$ de $\alpha (\nu < \mu)$, telles que

$$\sum_{k=0}^{k=\nu} B_k \int\int \frac{\partial^k R}{\partial \alpha^k}\,dx\,dy$$

soit encore de la forme (2), avec la différence que U et V deviennent infinies pour d'autres continua C que ceux qui correspondent à $f'_z = 0$.

Si donc on a une période ω correspondant à un cycle qui ne rencontre pas les continuum C, l'expression

$$B_0\omega + B_1\frac{d\omega}{dx} + \ldots + B_\nu\frac{d^\nu\omega}{dx^\nu}$$

sera nulle; mais, dans le cas contraire, elle pourra être différente de zéro.

J'ai d'ailleurs, à un autre point de vue, déja appelé l'attention (*Comptes rendus*, 10 octobre 1899) sur la circonstance qui se présente dans ce dernier cas, à savoir qu'on peut avoir, pour une surface algébrique,

$$\int\int R(x, y, z)\,dx\,dy = \int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

U et V devenant infinies pour des valeurs x, y, z laissant R finie. La possibilité de ce fait est l'origine de difficultés dans la réduction des intégrales doubles de seconde espèce; j'en ai donné un exemple dans la Note citée et j'aurai à revenir sur ce point, qui est de grande importance. »

Note additionnelle. — Dans le Tome II de mon *Traité sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, j'ai depuis lors consacré plusieurs chapitres à ce que j'ai appelé les intégrales doubles de seconde espèce d'une surface algébrique et à leurs périodes. On y donne en particulier le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce et le nombre de leurs périodes. On peut trouver cette théorie résumée en ses points essentiels dans mon livre : *Quelques applications analytiques de la Théorie des courbes et des surfaces algébriques*, de la Collection des Cahiers scientifiques de M. Julia (1931). E. P.