ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES BOULIGAND

Sur divers points de géométrie réglée

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 51 (1934), p. 245-249

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__245_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR

DIVERS POINTS DE GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. Les contributions de M. Jean Mirguet à la théorie du contact du premier ordre m'incitent à revenir sur les ensembles de droites, considérés par cet auteur au début de son important travail lorsqu'il établit, dans l'espace usuel à trois dimensions, qu'en chaque point d'un continu ponctuel le paratingent est un continu de droites. Ce résultat, accompagné de la semi-continuité supérieure d'inclusion du paratingent implique, ainsi que je l'ai noté aux *Comptes rendus* [1], la propriété pour la collection de toutes les paratingentes à un continu ponctuel borné, en ses divers points, d'être aussi un continu de droites, au sens jordanien : ensemble fermé non décomposable en deux ensembles fermes disjoints. Cette option m'écarte de la voie suivie par M. Jean Mirguet, qui considère avec Cantor un continu comme un ensemble fermé bien enchaîné, et porte ainsi son attention vers les chaînes ayant des droites pour éléments.

Une telle divergence peut sembler négligeable devant la possibilité, connue de longue date, de ponctualiser l'espace réglé, c'est-à-dire de le mettre en correspondance continue et biunivoque avec un espace ponctuel distancié, lequel sera d'ailleurs *compact en lui-même* si l'on s'en tient, comme il est indiqué dans le genre d'applications ci-dessus, aux droites ayant au moins un point commun réel avec une certaine sphère. Dans un tel espace, pour deux ensembles fermés disjoints, la borne inférieure de la distance d'un point du premier à un point du second est réalisée par au moins un couple dont les points appar-

(1) Tome 196, 12 juin 1933, p. 1767-1768.

tiennent respectivement à nos ensembles, cette borne est donc positive (et non nulle). Dès lors, continu au sens de Cantor et continu au sens de Jordan sont notions identiques : car, une décomposition de l'ensemble fermé K en deux ensembles fermés G et H disjoints exige pour un côté d'une chaîne entre un point de G et un point de H une longueur supérieure ou égale à la distance de ces ensembles; et inversement, si une chaîne joignant deux points a, b de K doit avoir un côté surpassant l, il suffit de prélever sur K l'ensemble de ses points qu'on peut unir au point a par des chaînes ayant leurs sommets sur K, leurs côtés inférieurs à l, pour avoir une décomposition de K en deux ensembles fermés distants de plus de l. Nier la continuité dans l'un des sens, c'est donc aussi la nier dans l'autre, ce qui justifie l'assertion précédente.

Les difficultés qu'on peut rencontrer proviennent du fait que la ponctualisation de l'espace réglé s'opérera, tantot en tenant compte du sens de parcours d'une droite, c'est-à-dire, attachant deux points distincts à une droite parcourue dans deux sens différents, tantôt au contraire, sans tenir compte de l'orientation, c'est-à-dire attachant toujours le même point à la même droite, quel que soit le sens dans lequel on la parcourt.

Supposons qu'il s'agisse des droites menées par un point fixe O. Si l'on tient compte de l'orientation, il correspond à l'une de ces droites un point et un seul de la sphère de centre O, et inversement. Mais si l'on néglige le sens, notre gerbe de droites va se trouver équivaloir au plan projectif. Ces deux modes de ponctualisation, s'ils ne diffèrent pas au point de vue local, sont dissemblables au point de vue intégral : un grand cercle coupe la sphère, tandis que la droite du plan projectif équivalente au plan de ce grand cercle ne coupe pas le plan projectif.

M'étant occupé de géométrie des ensembles de droites à deux reprises, en ne m'arrêtant qu'à des propriétés locales [1], je n'avais pas eu l'occasion de souligner le point précédent. En revanche, dans le problème actuel, suis-je obligé de le faire entrer en ligne de compte, car la notion de continu est, par essence, de nature intégrale.

---

[1] *Voir* d'une part l'*Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 120–126, d'autre part une Note intitulée *Sur la Géométrie des ensembles de droites* (*Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liége*, n° 12, 1932, p. 238-242).

Cherchons si un continu, dans un mode de ponctualisation, reste un continu dans l'autre mode.

2. Pour préciser la question, envisageons l'ensemble des droites ayant au moins un point réel commun avec une sphère de centre O et de rayon R. Lorsque nous prendrons l'une de ces droites en la dotant d'un sens, nous pourrons convenir de la déterminer par un vecteur AB allant d'un point A de la surface de la sphère de centre O et de rayon R à un point B de la surface de la sphère de centre O et de rayon 2R, l'angle OAB étant obtus ou droit (¹). Par contre, pour définir une de nos droites indépendamment de son sens, nous donnerons ses deux points de rencontre B et B′ avec la sphère de centre O et de rayon 2R (dans un ordre indifférent), étant entendu que la distance rectiligne BB′ est au moins égale à $2R\sqrt{3}$. La ponctualisation se réalise dans le premier cas en accouplant A et B, qui se présentent comme des sortes de projections (sur nos deux sphères) d'un point d'un espace à quatre dimensions, et dans le second cas, en accouplant B et B′.

Il s'agit de répondre aux deux questions suivantes :

1° Un continu d'éléments (A, B) est-il un continu d'éléments (B, B′) ?
2° Un continu d'éléments (B, B′) est-il un continu d'éléments (A, B) ?

Dans ce but, nous pourrons tabler sur le fait que l'espace des éléments (A, B) et celui des éléments (B, B′) jouissent chacun de l'*aptitude à être distancié* et de la propriété : *compact en soi*. On peut donc y utiliser indifféremment, pour un continu, la définition de Cantor ou celle de Jordan. En prenant sur un continu formé d'éléments (A, B) deux éléments particuliers, nous pourrons donc former une chaîne arbitrairement resserrée entre ces deux éléments : en appelant B′ le second point de rencontre de la droite AB avec la sphère de centre O et de rayon 2R, nous en déduirons une chaîne d'éléments (B, B′) entre les deux qui proviennent de nos éléments (A, B) particuliers. La première question se résout donc affirmativement.

Prenons maintenant un continu d'éléments (B, B′), étant bien entendu que l'ordre des éléments d'un couple est indifférent. Prenons

(¹) Grâce à cette convention, à chacune de nos droites munie d'un sens, il correspond un seul point A et un seul point B.

deux éléments particuliers de ce continu : entre ces éléments, nous pouvons trouver une chaîne arbitrairement resserrée d'éléments de même nature. Si nous orientons l'un des éléments de la chaîne, les autres éléments vont prendre de proche en proche une orientation concomitante, l'angle de deux droites consécutives de la chaîne devenant nécessairement aigu lorsque la chaîne se resserre d'une manière suffisante et cela nous permettra de passer à une chaîne d'éléments (A, B), qu'on peut resserrer elle aussi *ad libitum* en resserrant la première.

Il n'y a donc finalement aucune différence entre un continu de droites, qu'on tienne compte ou non de l'orientation de ces droites. Mais il était essentiel d'établir cette propriété, le fait d'orienter ou non les droites se répercutant, comme nous l'avons vu, sur la topologie en grand de l'espace réglé, notamment en ce qui concerne les coupures.

3. Complétons cette preuve d'équivalence par diverses remarques. Si à chaque droite D d'un continu de droites de la catégorie précédente, on attache un point P qui, situé sur cette droite, en soit fonction continue, le point P décrira un continu ponctuel. Car l'ensemble des positions de P est un ensemble fermé et sa décomposition éventuelle en deux ensembles fermés disjoints entraînerait une décomposition analogue pour l'ensemble de nos droites.

On montre aussi que, sur la sphère de centre O et de rayon R, l'ensemble formé des traces (B tant que B') des droites de notre continu réglé se compose d'un ou deux continus ponctuels. En effet, appelons T cet ensemble. Si nous avions une décomposition

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$

en ensembles fermés disjoints, nous aurions à distinguer les droites D_{ii} ayant simultanément leurs deux traces dans T_i et les droites D_{ij} ayant une trace dans T_i, l'autre dans T_j. Les ensembles tels que D_{ii} et D_{ij} seraient, dans l'espace réglé, autant d'ensembles fermés disjoints. En cas de décomposition de T il est donc impossible, d'une part que certaines de nos droites aient leurs traces dans un même constituant, d'autre part qu'il y eût plus de deux constituants. Ce qui justifie le résultat annoncé.

4. Nous terminerons en établissant la continuité, dans l'espace réglé de la collection des paratingentes d'un continu ponctuel en ses divers points.

Comme nous l'avons rappelé, le paratingent jouit de la semi-continuité supérieure d'inclusion (en abrégé S. C. I.), c'est-à-dire qu'étant donnée une suite quelconque de points M_i tendant vers le point M, toute droite d'accumulation de paratingentes en M_i est une paratingente en M. Grâce à la S. C. I., *la réunion des paratingentes issues des divers points* M *de* K *est un ensemble fermé*. Soit en effet D une droite d'accumulation de certaines paratingentes : ou bien, elles partent de points de K en nombre fini ([1]), elles n'ont donc pas de droites d'accumulation ne passant pas par l'un de ces points, donc les points en question sont sur D, laquelle appartient au paratingent de chacun de ces points, vu qu'il est fermé; ou bien les paratingentes dont D est droite d'accumulation sont relatives à un ensemble infini de points de K; cet ensemble aura ses points d'accumulation sur K; dès lors, de chaque suite de paratingentes, d'origines quelconques, tendant vers D, on peut extraire une nouvelle suite telle que les origines correspondantes tendent vers un point de K; en vertu de la S. C. I., la droite D qui est limite d'une suite de paratingentes relatives à cette suite convergente de points est elle-même une paratingente, ce qui justifie l'énoncé en italique.

De là, il est maintenant facile de tirer le résultat que nous avons en vue. Supposons un instant que le système total des paratingentes de K puisse se décomposer en deux ensembles fermés disjoints. Alors, en tant que continu (insécable d'une telle manière) le paratingent en chaque point se trouverait nécessairement inclus dans l'un de ces deux ensembles. Donc la décomposition supposée impliquerait celle de l'ensemble ponctuel K en deux ensembles fermés sans point commun, ce qui est impossible, puisque K est un continu.

Notre théorème est donc établi.

([1]) Donnant chacun naissance à au moins une suite infinie de paratingentes tendant vers D.