ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. K. BOSE
R. P. SRIVASTAV

Certaines propriétés de la fonction maximum d'une fonction méromorphe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 75, no 1 (1958), p. 37-47
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_1_37_0>

CERTAINES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION MAXIMUM D'UNE FONCTION MÉROMORPHE

PAR MM. S. K. BOSE ET R. P. SRIVASTAV.

1. Soit $f(z)$, une fonction méromorphe d'ordre ρ dont les zéros et les pôles, respectivement à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sont rangés en une suite non décroissante. Nous décrivons les cercles de rayons $|a_n|^{-h_1}$ et $|b_n|^{-h_2}$ dont chaque zéro et chaque pôle sont les centres. Puisque $\sum |a_n|^{-h_1}$ et $\sum |b_n|^{-h_2}$ convergent pour $h_1 > \rho_1$ et $h_2 > \rho_2$, où ρ_1 et ρ_2 sont les exposants de convergence des zéros et des pôles de $f(z)$, la somme des rayons des cercles est finie et, par conséquent, il existe des cercles avec centre à l'origine et de rayons arbitrairement grands se trouvant entièrement dans la « région exclue ». Bose ([1], p. 70) a défini les fonctions « maximum » et « minimum » $S(r)$ et $s(r)$ de $f(z)$ comme suit :

$$S(r) = \frac{M_1(r)}{m_2(r)} \geqq \max_{|z|=r} |f(z)| \tag{1.1}$$

et

$$s(r) = \frac{m_1(r)}{M_2(r)} \leqq \min_{|z|=r} |f(z)|, \tag{1.2}$$

où $M_1(r)$, $m_1(r)$ et $M_2(r)$, $m_2(r)$ sont les modules maximum et minimum respectivement de $f_1(z)$ et $P(z)$ pour $|z| = r$, où $P(z)$ est le produit canonique formé par les pôles de $f(z)$ et où

$$f_1(z) = f(z)\,P(z).$$

Le but du présent article est l'étude de quelques propriétés de $S(r)$ dans la « région exclue ».

PREMIÈRE PARTIE.

2. Théorème 1. — *Si* $S(r)$ *est la fonction maximum de* $f(z)$ *et* $S^{(1)}(r)$ *celle de* $f'(z)$, *où* $f'(z)$ *est la dérivée de* $f(z)$, *et s'il existe des points* w *et* w' *du plan* z *tels que* $|f(w)| = S(r)$ *et* $|f'(w')| = S^{(1)}(r)$, *on a*

$$(2.1)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left\{r\dfrac{S^{(1)}(r)}{S(r)}\right\}}{\log r} = \rho.$$

Démonstration. — Nous avons ([1], [2] et [3])

$$(2.2)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log S^{\star}(r)}{\log r} = \rho,$$

où $\log S^{\star}(r)$ est la plus grande des deux fonctions maxima de $\log f(z)$ et de $\log\dfrac{1}{f(z)}$, et

$$(2.3)\qquad S^{(1)}(r) \geqq \frac{S(r)\log S^{\star}(r)}{r\log r} \qquad \text{pour} \quad r > r_0.$$

Ceci conduit à

$$(2.4)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left\{r\dfrac{S^{(1)}(r)}{S(r)}\right\}}{\log r} \geqq \rho.$$

De plus, nous avons

$$f'(z) = f(z)\left\{\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - \frac{P'(z)}{P(z)}\right\},$$

où

$$|f'(z)| \leqq |f(z)|\left\{\left|\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right| + \left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|\right\},$$

par conséquent [4]

$$|f'(\omega')| \leqq S(r)\,O(r^{\rho+\varepsilon-1}).$$

Donc

$$(2.5)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left\{r\dfrac{S^{(1)}(r)}{S(r)}\right\}}{\log r} \leqq \rho.$$

Des relations (2.4) et (2.5), nous obtenons le théorème 1.

Corollaire. — *Soient* $f^{(1)}(z)$, $f^{(2)}(z)$, …, $f^{(n)}(z)$ *les dérivées de* $f(z)$ *et* $S^{(1)}(r)$, $S^{(2)}, (r)$ …, $S^{(n)}(r)$ *les fonctions maxima correspondantes; et s'il existe une suite de points* w_1, w_2, …, w_n, *tels que*

$$|f^{(1)}(w_1)| = |S^{(1)}(r)|, \qquad |f^{(2)}(w_2)| = S^{(2)}(r), \qquad \ldots, \qquad |f^{(n)}(w_n)| = S^{(n)}(r),$$

on a alors

$$(2.6)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left[r\left\{\dfrac{S^{(n)}(r)}{S(r)}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]}{\log r} = \rho.$$

3. Théorème 2. — *Soient* $f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), \ldots, f^{(n)}(z)$ *les dérivées successives de* $f(z)$ *et* $S^{(1)}(r), S^{(2)}(r), \ldots, S^{(n)}(r)$ *les fonctions maxima correspondantes; s'il existe un suite de points* $w_1, w_2, \ldots, w_n$, *tels que*

$$|f^{(1)}(w_1)| = S^{(1)}(r), \qquad |f^{(2)}(w_2)| = S^{(2)}(r), \qquad \ldots, \qquad |f^{(n)}(w_n)| = S^{(n)}(r),$$

on a alors

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\log \left[r \left\{ \frac{S^{(n)}(r)}{S(r)} \right\}^{\frac{1}{n}} \right]}{\log r} \geqq \lambda, \tag{3.1}$$

où λ *est l'ordre inférieur de la fonction*

$$\lambda = \varliminf_{r \to \infty} \frac{\log \log S^{\star}(r)}{\log r}. \tag{3.2}$$

Démonstration. — La relation (2.3) conduit à

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\log \left\{ r \frac{S^{(1)}(r)}{S(r)} \right\}}{\log r} \geqq \lambda. \tag{3.3}$$

d'où l'on déduit facilement

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\log \left[r \left\{ \frac{S^{(n)}(r)}{S(r)} \right\}^{\frac{1}{n}} \right]}{\log r} \geqq \lambda.$$

Corollaire. — *Pour* $r \geqq r_0 = r_0(f)$, *et dans les conditions du théorème* 1, *on a*

$$S(r)\, r^{(\lambda-\varepsilon-1)n} < S^{(n)}(r) < S(r)\, r^{(\rho+\varepsilon-1)n}.$$

4. Théorème 3. — *Soient* $n(r;\infty)$ *le nombre des pôles de* $f(z)$ *pour* $|z| \leqq r$ *et* $T(r)$ *la fonction caractéristique de R. Nevanlinna* ([5], p. 17). *On a donc*

$$T(r) \leqq \log S^{\star}(r) + n(r) \log r \leqq \frac{R+r}{R-r} T(R) + k n(R) \log R,$$

où k *est une constante et où* $0 < r < R$, *pourvu que* $f(z)$ *soit régulière pour* $|z| \leqq 1$, *et où il existe une valeur de* θ *telle que*

$$|f(re^{i\theta})| = S(r).$$

Démonstration. — Nous avons

$$\begin{aligned} T(r) &= m(r;\infty) + N(r;\infty) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_0^r \frac{n(x;\infty)}{x}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})|\, d\theta + \int_1^k \frac{n(x;\infty)}{x}\, dx \\ &\leqq \log S^{\star}(r) + n(r) \log r. \end{aligned}$$

On a aussi, d'après la formule de Poisson-Jensen,

$$
\begin{aligned}
\log|f(re^{i\theta})| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)\log|f(Re^{i\Phi})|}{R^2-2Rr\cos(\Phi-\theta)+r^2}\,d\Phi \\
&\quad - \sum_{|a_n|<R} \log\left|\frac{R^2-\overline{a}_n re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a_n)}\right| \\
&\quad + \sum_{|b_n|<R} \log\left|\frac{R^2-\overline{b}_n re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-b_n)}\right| \\
&\leqq \frac{R+r}{R-r}T(R) + \sum_{|b_n|<R} \log\frac{R+|b_n|}{|r-|b_n||} \\
&\leqq \frac{R+r}{R-r}T(R) + n(R)[\log 2R + \rho\log R]
\end{aligned}
$$

ou

$$\log S^*(r) \leqq \frac{R+r}{R-r}T(R) + n(R)[\log 2 + (1+\rho)\log R].$$

5. Applications. — S'il existe une suite de points w_1, w_2, w_n, tels que

$$|f(w)| = S(r), \qquad |f'(w_2)| = S^{(1)}(r), \qquad |f^{(n)}(w_{n+1})| = S^{(n)}(r),$$

on a les relations suivantes :

(a) Pour $\lambda > 1$ et $r \geqq r_0 = r_0(f)$,

$$S(r), \quad [\Phi(r)]^{-1}S^{(1)}(r), \quad \ldots, \quad [\Phi(r)]^{-n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite croissante où $\Phi(r)$ est une fonction croissante telle que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\Phi(r)}{\log r} = 0.$$

(b) Pour $\rho < 1$ et $r \geqq r_0 = r_0(f)$,

$$S(r), \quad \Phi(r)S^{(1)}(r), \quad \ldots, \quad [\Phi(r)]^{n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite décroissante où $\Phi(r)$ est une fonction croissante définie plus haut.

(c) Pour $\lambda > 1$ et $r \geqq r_0 = r_0(f)$, on a

$$S^{(n)}(r) > S(r)\left[\frac{\log S^*(r)}{r\log r}\right]^n.$$

(d) Pour $\rho > 1$, il existe une suite de valeurs de r tendant vers l'infini pour laquelle $S(r)$, $[\Phi(r)]^{-1}S^{(1)}(r)$, $\ldots$, $[\Phi(r)]^{-n}S^{(n)}(r)$ forment une suite croissante.

(e) Pour $\lambda < 1$, il existe une suite de valeurs de r tendant vers l'infini pour laquelle $S(r)$, $\Phi(r)S^{(1)}(r)$, $\ldots$, $[\Phi(n)]^{n}S^{(n)}(r)$ forment une suite décroissante.

(f) Si pour les valeurs de $r \geqq r_0$,

$$S(r), \quad [\Phi(r)]^{-1}S^{(1)}(r), \quad \ldots, \quad [\Phi(r)]^{-n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite croissante, on a $\lambda \geqq 1$.

(g) Si pour les valeurs de $r \geqq r_0$,

$$S(r), \quad \Phi(r)S^{(1)}(r), \quad \ldots, \quad [\Phi(r)]^{n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite décroissante, on a $\rho \leqq 1$.

(h) Si $\rho < 1$, on a

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ r^p \frac{S^{(n)}(r)}{S(r)} \right\} = 0$$

à condition que $p < n(1 - \rho)$.

Ce résultat s'obtient directement de (3.6).

6. Whittaker ([6], p. 257) a démontré que si $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre ρ et si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum \left[\left\{ \frac{P_0 + P_1(z) + \ldots + P_{\mu-1} z^{\mu-1}}{(z - b_0)^{\lambda_0} \ldots (z - b_\lambda)^{\lambda_k}} \right\} + Q(z) \right],$$

on a alors $\rho = \max(\sigma, \tau, \varkappa)$, où σ est l'ordre de la fonction entière $\sum a_n z^n$,

$$\tau = \overline{\lim_{|b_0| \to \infty}} \frac{\overset{+}{\log} \overset{+}{\log} P}{\log |b_0|} \qquad \left(P = \max_{0 \leqq i \leqq \mu} |P_i|\right)$$

et $\varkappa$ est l'exposant de convergence des pôles, c'est-à-dire

$$\varkappa = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r; \infty)}{\log r},$$

où $n(r; \infty)$ est le nombre des pôles de $f(z)$ dans $|z| \leqq r$.

Du résultat ci-dessus, nous pouvons tirer les remarques suivantes :

(i) Puisque $\sigma \leqq \rho$, on a alors

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n \log n}{\log \dfrac{1}{|a_n|}} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$
$$\leqq \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log S^*(r)}{\log r},$$

où $M(r)$ est le module maximum de la fonction entière $\sum a_n z^n$ pour $|z| = r$.

(ii) Puisque $\tau \leqq \rho$, on a alors

$$\overline{\lim_{|b_0| \to \infty}} \frac{\overset{+}{\log} \overset{+}{\log} P}{\log |b_0|} \leqq \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log S^*(r)}{\log r}.$$

(iii) Comme Whittaker l'a remarqué, nous obtenons les relations précises entre la « grandeur » (size) de la fonction et la « grandeur » des coefficients de la série de Taylor, dans le cas des fonctions entières. Les inégalités

$$|a_n| r^n \leqq \mathrm{M}(r) \leqq \sum |a_n| r^n,$$

nous permettent, à l'aide des résultats ci-dessus, de faire des remarques analogues. Si la fonction méromorphe est grande, alors certains coefficients P peuvent être grands ou certains coefficient de Taylor a peuvent l'être aussi. De plus, si la fonction est petite, alors tous les coefficients P et a sont petits.

7. Bose ([1], p. 73) a étendu le lemme de Schwarz aux fonctions méromorphes comme suit :

Soit C un cercle $|z| = \mathrm{R}$ ne passant par aucune des singularités de $f(z)$ et $f(0) = 0$, on a donc

$$|f(r e^{i\theta})| \leqq r \mathrm{R}_m^{-1} \mathrm{S} \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2 \ldots \mathrm{R}_m \geqq \lambda \geqq 1 \tag{7.1}$$

valable pour $|z| = r < \mathrm{R}$, $|z - b_i| = \mathrm{R}_i$ et $z = r e^{i\theta}$ où $\max\limits_{|z|=r} |f(z)| \leqq \mathrm{S}$, et définie comme dans le paragraphe 2.

Au lieu de l'inégalité (7.1), ceci doit être

$$|f(r e^{i\theta})| \leqq 2^m r \mathrm{R}^{m-1} \mathrm{S}.$$

C'est ainsi, puisque dans la démonstration, R_i a été pris comme inférieur ou égal à R, tandis qu'on aurait dû avoir $\mathrm{R}_i < 2\mathrm{R}$, parce que z est un point du cercle $|z| = \mathrm{R}$ et que b_i peut être sur la ligne joignant z à l'origine et sur le côté opposé de celui de z par rapport à l'origine.

DEUXIÈME PARTIE.

8. Dans cette partie, nous démontrerons d'abord les deux inégalités suivantes que nous utiliserons souvent.

Soit $\mathrm{S}^\star(r, f)$, la fonction maximum de $f(z)$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \log \mathrm{S}^\star(r, af) = \log |a| + \log \mathrm{S}^\star(r, f), \\ (ii) & \log \mathrm{S}^\star(r, f + \theta_n(a)) \leqq |a| + \log \mathrm{S}^\star(r, f), \end{array} \right. \tag{8.1}$$

où

$$\theta_n(a) = a + \frac{a^2}{2\,!} + \frac{a^3}{3\,!} + \ldots + \frac{a^n}{n\,!}.$$

Le premier résultat de (8.1) s'obtient directement de (1.1). Quant à (ii), nous observons ceci :

$$\log \mathrm{S}^\star(r, f + \theta_n(a)) \leqq \log(1 + |\theta_n(a_n)| + \log \mathrm{S}^\star(r, f) \leqq |a| + \log \mathrm{S}^\star(r, f).$$

9. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ ayant des pôles ou des zéros distribués également (evenly) suivant qu'on prend la fonction maximum de $f(z)$ ou $\frac{1}{f(z)}$.

Nous dirons que $f(z)$ est du type maximal, normal ou minimal, selon que

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \log \frac{S^\star(r)}{r^\rho}$$

est infini, fini ou zéro, et nous dirons qu'il appartient au type convergent ou divergent suivant que

$$\int^\infty r^{-\rho-1} \log S^\star(r)\, dr$$

converge ou diverge. Nous donnons ci-dessous les propriétés de la fonction maximum $S^\star(r)$.

(i) Une fonction méromorphe du type convergent appartient toujours au type minimal.

Étant donné $\varepsilon(>0)$, si petit qu'il soit, il existe r_0 tel que pour $r \geqq r_0 = r_0(f)$, on a

$$\varepsilon > \int_r^\infty t^{-\rho-1} \log S^\star(t)\, dt \geqq \frac{1}{\rho} r^{-\rho} \log S^\star(r),$$

d'où ce résultat.

(ii) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe et $r_n(a)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ les modules des points-a de $f(z)$. Donc

$$\int^\infty r^{-q-1} N(r; a)\, dr, \quad \int^\infty r^{-q-1} n(r; a)\, dr \quad \text{et} \quad \sum \{ r_n(a) \}^{-q}$$

convergent si

$$\int^\infty r^{-q-1} \log S^\star(r)\, dr$$

converge pour chaque $q > 0$.

10. Théorème 4. — *Si pour q donné positif, l'intégrale*

$$\int^\infty r^{-q-1} \log S^\star(r)\, dr$$

est convergente; pour chaque $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\log S^\star(r) < \varepsilon r^q$$

sauf au plus sur un ensemble de points où la variation de $\log r$ *est bornée.*

Démonstration. — Soit E, l'ensemble des points où, pour ε donné positif, $\log S^\star(r) \geqq \varepsilon r^q$, On a donc

$$\int^\infty r^{-q-1} \log S^\star(r)\, dr \geqq \int_E r^{-q-1} \log S^\star(r)\, dr \geqq \varepsilon \int_E \frac{d}{dr}(\log r)\, dr$$

et dans le cas où la variation de $\log r$ n'est pas bornée dans l'ensemble E, ce qui contredit notre hypothèse que l'intégrale $\int^{\infty} r^{-q-1}\log S^{\star}(r)\,dr$ est convergente. D'où ce résultat :

THÉORÈME 5. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe qui est le quotient de deux produits canoniques et soit w un point tel que $|f(w)| = S(r)$, on a alors*

$$\log S^{\star}(r) < c r^q \left(\int_0^r \frac{N(t, f) + N\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t}\,dt + r \int_0^{\infty} \frac{N(t, f) + N\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t^2}\,dt \right),$$

où q est le genre de la fonction méromorphe et c un nombre indépendant de r.

Démonstration. — Soit

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} = \frac{\prod E\left(\frac{z}{a_n}, q\right)}{\prod E\left(\frac{z}{b_n}, q\right)},$$

où $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont les produits canoniques et où $P_1(z)$ est d'ordre supérieur ou égal à celui de $P_2(z)$.

Nous avons

$$\log|f(z)| \leqq \sum \log\left|E\left(\frac{z}{a_n}, q\right)\right| + \sum \log\left|E\left(\frac{z}{b_n}, q\right)\right|$$

pour toutes valeurs de z; ce qui conduit à

$$\log S^{\star}(r) \leqq \sum \log\left|E\left(\frac{w}{a_n}, q\right)\right| + \sum \log\left|E\left(\frac{w}{b_n}, q\right)\right|.$$

Procédant exactement comme Nevanlinna ([5], p. 36) nous arrivons à ce résultat pour [1] $c = b(q+1)^2$. Dans le cas où $P_2(z)$ est d'ordre supérieur à celui de $P_1(z)$, le résultat s'obtient si nous prenons la fonction maximum de $\frac{1}{f(z)}$ et nous procédons comme dans le cas ci-dessus.

THÉORÈME. 6. — *Soit q un grand nombre entier tel que*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log S^{\star}(r)}{r^{q+1}} = 0.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les zéros et les pôles de $f(z)$ dans $|z| < R$. Si $f(0) \neq 0$, ∞ pour chaque valeur finie de $|z| \leqq r$, on a $f(z)$ ou $[f(z)]^{-1}$ égal à

$$\exp\left(\sum_0^q c_\nu z^\nu\right) \frac{\prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_n}\right)^q}}{\prod \left(1 - \frac{z}{b_n}\right) e^{\frac{z}{b_n} + \ldots + \frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_n}\right)^q}}.$$

---

(1) b étant un nombre indépendant de r.

Démonstration. — Écrivons $\log f(z)$ d'après la formule de Poisson-Jensen pour $|z| < \mathrm{R}$, et dérivons $(q+1)$ fois successivement; nous obtenons

$$\mathrm{D}^{q+1} \log f(z) = \sum_{|a_n|<\mathrm{R}} \frac{(-)^q q!}{(z-a_n)^{q+1}} - \sum_{|b_n|<\mathrm{R}} \frac{(-)^q q!}{(z-b_n)^{q+1}} + \sigma_{\mathrm{R}}(z) + \mathrm{I}_{\mathrm{R}}(z),$$

où

$$\sigma_{\mathrm{R}}(z) = q!\left\{ \sum_{|a_n|<\mathrm{R}} \left[\frac{\bar{a}_n}{\mathrm{R}^2 - \bar{a}_n z}\right]^{q+1} - \sum_{|b_n|<\mathrm{R}} \left[\frac{\bar{b}_n}{\mathrm{R}^2 - \bar{b}_n z}\right]^{q+1} \right\}$$

et

$$\mathrm{I}_{\mathrm{R}}(z) = \frac{q+1!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(\mathrm{R}\, e^{i\Phi})| \frac{2\mathrm{R}\, e^{i\Phi}}{(\mathrm{R}\, e^{i\Phi} - z)^{q+2}}\, d\Phi.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{R}}(z) &\leqq q!\,(\mathrm{R}-r)^{-q-1}[n(\mathrm{R};\, 0) + n(\mathrm{R};\, \infty)] \\ &< \mathrm{A}(\mathrm{R}-r)^{-q-1} \log \mathrm{S}^\star(r). \end{aligned}$$

Le second nombre tend vers zéro uniformément lorsque R tend vers l'infini. De plus

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{\mathrm{R}}(z) &\leqq \frac{q+1!}{2\pi} \frac{2\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{q+2}} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(\mathrm{R}\, e^{i\Phi})|\, d\Phi \\ &\leqq \frac{q+1!}{\pi} \frac{\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{q+2}} \log \mathrm{S}^\star(\mathrm{R}) \end{aligned}$$

et, par conséquent, $\mathrm{I}(z)$ tend uniformément vers zéro lorsque R tend vers l'infini. Donc

$$\mathrm{D}^{q+1} \log f(z) = \sum \frac{(-)^q q!}{(z-a_n)^{q+1}} - \sum \frac{(-)^q q!}{(z-b_n)^{q+1}}.$$

En intégrant successivement $(q+1)$ fois, nous obtenons ce résultat.

Théorème 7. — *Soit $f(z)$, une fonction méromorphe d'ordre fini. On a*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \overset{+}{\log} \mathrm{R} + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{\mathrm{R}-r} + 2 \overset{+}{\log} \log \mathrm{S}^\star(r) + \mathrm{O}(1),$$

pour $0 < r < \mathrm{R} \leqq 2r$, *où* $\mathrm{O}(1)$ *est une fonction bornée de* r *pour des valeurs suffisamment grandes de* r.

Démonstration. — En représentant la fonction $f(z)$ dans le cercle $|z| < \mathrm{R}$ d'après la formule de Poisson-Jensen, et en prenant la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} = {} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(\mathrm{R}\, e^{i\Phi})| \frac{2\mathrm{R}\, e^{i\Phi}}{(\mathrm{R}\, e^{i\Phi} - z)^2}\, d\Phi \\ & + \sum_{|a_n|<\mathrm{R}} \frac{\mathrm{R}^2 - |\bar{a}_n|^2}{(z-a_n)\,|\mathrm{R}^2 - \bar{a}_n z|} - \sum_{|b_n|<\mathrm{R}} \frac{\mathrm{R}^2 - |b_n|^2}{(z-b_n)\,|\mathrm{R}^2 - \bar{b}^n z|}. \end{aligned}$$

Donc, pour $|z| = r < R$, on a

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqq \frac{2R}{(R-r)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(R\,e^{i\Phi})|\,d\Phi$$
$$+\sum_{|a_n|<R}\frac{R^2-|a_n|^2}{|z-a_n|.|R^2-\overline{a}_n z|}+\sum_{|b_n|<R}\frac{R^2-|b_n|^2}{|z-b|.|R^2-\overline{b}_n z|}.$$

Mais

$$|R^2-\overline{a}_n z| \geqq R^2-|a_n|r > R(R-r)$$

et

$$\frac{R^2-|a_n|^2}{|z-a_n|.|R^2-\overline{a}_n z|}=\frac{R(R^2-|a_n|^2)}{|R^2-\overline{a}_n z|^2}\left|\frac{R^2-\overline{a}_n z}{R(z-a_n)}\right|$$
$$<\frac{R}{(R-r)^2}\left|\frac{R^2-\overline{a}_n z}{R(z-a_n)}\right|.$$

Donc

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \frac{2R}{(R-r)^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(R\,e^{i\Phi})|\,d\Phi\right]$$
$$+\sum_{|a_n|<R}\left|\frac{R^2-\overline{a}_n z}{R(z-a_n)}\right|+\sum_{|b_n|<R}\left|\frac{R^2-\overline{b}_n z}{R(z-b_n)}\right|.$$

Utilisant maintenant les inégalités suivantes, nous obtenons

$$\overset{+}{\log}(a_1 a_2 \ldots\ldots a_h) \leqq \overset{+}{\log} a_1+\overset{+}{\log} a_2+\ldots+\overset{+}{\log} a_h,$$
$$\overset{+}{\log}(a_1+a_2+\ldots+a_h) \leqq \overset{+}{\log} a_1+\overset{+}{\log} a_2+\ldots+\overset{+}{\log} a_h+\overset{+}{\log} h,$$
$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \log 2+\overset{+}{\log} R+\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r}+\overset{+}{\log}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(R\,e^{i\Phi})|\,d\Phi\right\}$$
$$+\sum_{|a_n|<R}\overset{+}{\log}\left|\frac{R^2-\overline{a}_n z}{R(z-a_n)}\right|+\sum_{|b_n|<R}\overset{+}{\log}\left|\frac{R^2-\overline{b}_n z}{R(z-b_n)}\right|$$
$$+\overset{+}{\log}\left[n(R,f)+n\left(R,\frac{1}{f}\right)+1\right].$$

Donc, après l'intégration (*cf.* [5], p. 14), nous avons

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < \overset{+}{\log} R+2\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r}+\overset{+}{\log}\overset{+}{\log} S^*(r)$$
$$+N(R,f)+N\left(R,\frac{1}{f}\right)-N(r,f)$$
$$-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overset{+}{\log}\left[n(R,f)+n\left(R,\frac{1}{f}\right)\right]+O(1)$$

et

$$N(R,f)+N\left(R,\frac{1}{f}\right)-N(r,f)-N\left(r\,\frac{1}{f}\right) < O(1)$$

et enfin

$$n(R,f)+n\left(R,\frac{1}{f}\right) < N(eR,f)+N\left(eR,\frac{1}{f}\right) < \log S^*(eR,f)+O(1).$$

Puisque $f(z)$ est d'ordre fini, nous avons

$$\log \log S^{\star}(er) = O(\log r),$$

d'où

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \overset{+}{\log} R + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} + \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} S^{\star}(r) + O(1).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. K. Bose, *Bull. Cal. Math. Soc.*, t. **44**, 1952, p. 69-74.
[2] S. K. Bose, *Math. Z.*, t. **56**, 1952, p. 222-226.
[3] S. K. Bose, *Math. Z.* t. **66**, 1957, p. 487-489.
[4] R. P. Srivastav, *Rivista di Mathematica* (sous presse).
[5] R. Nevanlinna, *Acta Math.*, t. **46**, 1925, p. 1-99.
[6] J. M. Whittaker, *Proc. London Math. Soc.*, t. **40**, 1936, p. 255-272.