

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. K. BOSE

R. P. SRIVASTAV

## **Certaines propriétés de la fonction maximum d'une fonction méromorphe**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 75, n° 1 (1958), p. 37-47

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1958\\_3\\_75\\_1\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_1_37_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# CERTAINES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION MAXIMUM D'UNE FONCTION MÉROMORPHE

PAR MM. S. K. BOSE ET R. P. SRIVASTAV.

---

1. Soit  $f(z)$ , une fonction méromorphe d'ordre  $\rho$  dont les zéros et les pôles, respectivement à  $a_1, a_2, a_3, \dots$  et  $b_1, b_2, b_3, \dots$  sont rangés en une suite non décroissante. Nous décrivons les cercles de rayons  $|a_n|^{-h_1}$  et  $|b_n|^{-h_2}$  dont chaque zéro et chaque pôle sont les centres. Puisque  $\sum |a_n|^{-h_1}$  et  $\sum |b_n|^{-h_2}$  convergent pour  $h_1 > \rho_1$  et  $h_2 > \rho_2$ , où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les exposants de convergence des zéros et des pôles de  $f(z)$ , la somme des rayons des cercles est finie et, par conséquent, il existe des cercles avec centre à l'origine et de rayons arbitrairement grands se trouvant entièrement dans la « région exclue ». Bose ([1], p. 70) a défini les fonctions « maximum » et « minimum »  $S(r)$  et  $s(r)$  de  $f(z)$  comme suit :

$$(1.1) \quad S(r) = \frac{M_1(r)}{m_2(r)} \geq \max_{|z|=r} |f(z)|$$

et

$$(1.2) \quad s(r) = \frac{m_1(r)}{M_2(r)} \leq \min_{|z|=r} |f(z)|,$$

où  $M_1(r)$ ,  $m_1(r)$  et  $M_2(r)$ ,  $m_2(r)$  sont les modules maximum et minimum respectivement de  $f_1(z)$  et  $P(z)$  pour  $|z|=r$ , où  $P(z)$  est le produit canonique formé par les pôles de  $f(z)$  et où

$$f_1(z) = f(z) P(z).$$

Le but du présent article est l'étude de quelques propriétés de  $S(r)$  dans la « région exclue ».

## PREMIÈRE PARTIE.

2. THÉOREME 1. — Si  $S(r)$  est la fonction maximum de  $f(z)$  et  $S^{(1)}(r)$  celle de  $f'(z)$ , où  $f'(z)$  est la dérivée de  $f(z)$ , et s'il existe des points  $\omega$  et  $\omega'$  du plan  $z$  tels que  $|f(\omega)| = S(r)$  et  $|f'(\omega')| = S^{(1)}(r)$ , on a

$$(2.1) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left\{ r \frac{S^{(1)}(r)}{S(r)} \right\}}{\log r} = \rho.$$

*Démonstration.* — Nous avons ([1], [2] et [3])

$$(2.2) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log S^*(r)}{\log r} = \rho,$$

où  $\log S^*(r)$  est la plus grande des deux fonctions maxima de  $\log f(z)$  et de  $\log \frac{1}{f(z)}$ , et

$$(2.3) \quad S^{(1)}(r) \geq \frac{S(r) \log S^*(r)}{r \log r} \quad \text{pour } r > r_0.$$

Ceci conduit à

$$(2.4) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left\{ r \frac{S^{(1)}(r)}{S(r)} \right\}}{\log r} \geq \rho.$$

De plus, nous avons

$$f'(z) = f(z) \left\{ \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - \frac{P'(z)}{P(z)} \right\},$$

où

$$|f'(z)| \leq |f(z)| \left\{ \left| \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \right| + \left| \frac{P'(z)}{P(z)} \right| \right\},$$

par conséquent [4]

$$|f'(\omega')| \leq S(r) O(r^{\rho+\varepsilon-1}).$$

Donc

$$(2.5) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left\{ r \frac{S^{(1)}(r)}{S(r)} \right\}}{\log r} \leq \rho.$$

Des relations (2.4) et (2.5), nous obtenons le théorème 1.

COROLLAIRE. — Soient  $f^{(1)}(z)$ ,  $f^{(2)}(z)$ , ...,  $f^{(n)}(z)$  les dérivées de  $f(z)$  et  $S^{(1)}(r)$ ,  $S^{(2)}(r)$ , ...,  $S^{(n)}(r)$  les fonctions maxima correspondantes; et s'il existe une suite de points  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , tels que

$$|f^{(1)}(\omega_1)| = |S^{(1)}(r)|, \quad |f^{(2)}(\omega_2)| = S^{(2)}(r), \quad \dots, \quad |f^{(n)}(\omega_n)| = S^{(n)}(r),$$

on a alors

$$(2.6) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left[ r \left\{ \frac{S^{(n)}(r)}{S(r)} \right\}^{\frac{1}{n}} \right]}{\log r} = \rho.$$

3. THÉORÈME 2. — Soient  $f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), \dots, f^{(n)}(z)$  les dérivées successives de  $f(z)$  et  $S^{(1)}(r), S^{(2)}(r), \dots, S^{(n)}(r)$  les fonctions maxima correspondantes; s'il existe un suite de points  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , tels que

$$|f^{(1)}(w_1)| = S^{(1)}(r), \quad |f^{(2)}(w_2)| = S^{(2)}(r), \quad \dots, \quad |f^{(n)}(w_n)| = S^{(n)}(r),$$

on a alors

$$(3.1) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left[ r \left\{ \frac{S^{(n)}(r)}{S(r)} \right\}^{\frac{1}{n}} \right]}{\log r} \geq \lambda,$$

où  $\lambda$  est l'ordre inférieur de la fonction

$$(3.2) \quad \lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log S^*(r)}{\log r}.$$

Démonstration. — La relation (2.3) conduit à

$$(3.3) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left\{ r \frac{S^{(1)}(r)}{S(r)} \right\}}{\log r} \geq \lambda.$$

d'où l'on déduit facilement

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left[ r \left\{ \frac{S^{(n)}(r)}{S(r)} \right\}^{\frac{1}{n}} \right]}{\log r} \geq \lambda.$$

COROLLAIRE. — Pour  $r \geq r_0 = r_0(f)$ , et dans les conditions du théorème 1, on a

$$S(r)^{r^{(\lambda-\varepsilon-1)n}} < S^{(n)}(r) < S(r)^{r^{(\rho+\varepsilon-1)n}}.$$

4. THÉORÈME 3. — Soient  $n(r; \infty)$  le nombre des pôles de  $f(z)$  pour  $|z| \leq r$  et  $T(r)$  la fonction caractéristique de R. Nevanlinna ([5], p. 17). On a donc

$$T(r) \leq \log S^*(r) + n(r) \log r \leq \frac{R+r}{R-r} T(R) + kn(R) \log R,$$

où  $k$  est une constante et où  $0 < r < R$ , pourvu que  $f(z)$  soit régulière pour  $|z| \leq 1$ , et où il existe une valeur de  $\theta$  telle que

$$|f(re^{i\theta})| = S(r).$$

Démonstration. — Nous avons

$$\begin{aligned} T(r) &= m(r; \infty) + N(r; \infty) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^r \frac{n(x; \infty)}{x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta + \int_1^k \frac{n(x; \infty)}{x} dx \\ &\leq \log S^*(r) + n(r) \log r. \end{aligned}$$

On a aussi, d'après la formule de Poisson-Jensen,

$$\begin{aligned} \log |f(re^{i\theta})| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) \log |f(Re^{i\Phi})|}{R^2 - 2Rr \cos(\Phi - \theta) + r^2} d\Phi \\ &\quad - \sum_{|a_n| < R} \log \left| \frac{R^2 - \bar{a}_n r e^{i\theta}}{R(r e^{i\theta} - a_n)} \right| \\ &\quad + \sum_{|b_n| < R} \log \left| \frac{R^2 - \bar{b}_n r e^{i\theta}}{R(r e^{i\theta} - b_n)} \right| \\ &\leq \frac{R+r}{R-r} T(R) + \sum_{|b_n| < R} \log \frac{R + |b_n|}{|r - |b_n||} \\ &\leq \frac{R+r}{R-r} T(R) + n(R) [\log 2R + \rho \log R] \end{aligned}$$

ou

$$\log S^*(r) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R) + n(R) [\log 2 + (1 + \rho) \log R].$$

5. APPLICATIONS. — S'il existe une suite de points  $\omega_1, \omega_2, \omega_n$ , tels que

$$|f(\omega)| = S(r), \quad |f'(\omega_2)| = S^{(1)}(r), \quad |f^{(n)}(\omega_{n+1})| = S^{(n)}(r),$$

on a les relations suivantes :

(a) Pour  $\lambda > 1$  et  $r \geq r_0 = r_0(f)$ ,

$$S(r), [\Phi(r)]^{-1} S^{(1)}(r), \dots, [\Phi(r)]^{-n} S^{(n)}(r)$$

forment une suite croissante où  $\Phi(r)$  est une fonction croissante telle que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \Phi(r)}{\log r} = 0.$$

(b) Pour  $\rho < 1$  et  $r \geq r_0 = r_0(f)$ ,

$$S(r), \Phi(r) S^{(1)}(r), \dots, [\Phi(r)]^n S^{(n)}(r)$$

forment une suite décroissante où  $\Phi(r)$  est une fonction croissante définie plus haut.

(c) Pour  $\lambda > 1$  et  $r \geq r_0 = r_0(f)$ , on a

$$S^{(n)}(r) > S(r) \left[ \frac{\log S^*(r)}{r \log r} \right]^n.$$

(d) Pour  $\rho > 1$ , il existe une suite de valeurs de  $r$  tendant vers l'infini pour laquelle  $S(r), [\Phi(r)]^{-1} S^{(1)}(r), \dots, [\Phi(r)]^{-n} S^{(n)}(r)$  forment une suite croissante.

(e) Pour  $\lambda < 1$ , il existe une suite de valeurs de  $r$  tendant vers l'infini pour laquelle  $S(r), \Phi(r) S^{(1)}(r), \dots, [\Phi(r)]^n S^{(n)}(r)$  forment une suite décroissante.

(f) Si pour les valeurs de  $r \geq r_0$ ,

$$S(r), [\Phi(r)]^{-1}S^{(1)}(r), \dots, [\Phi(r)]^{-n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite croissante, on a  $\lambda \geq 1$ .

(g) Si pour les valeurs de  $r \geq r_0$ ,

$$S(r), \Phi(r)S^{(1)}(r), \dots, [\Phi(r)]^n S^{(n)}(r)$$

forment une suite décroissante, on a  $\rho \leq 1$ .

(h) Si  $\rho < 1$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r^p \frac{S^{(n)}(r)}{S(r)} \right\} = 0$$

à condition que  $p < n(1 - \rho)$ .

Ce résultat s'obtient directement de (3.6).

6. Whittaker ([6], p. 257) a démontré que si  $f(z)$  est une fonction méromorphe d'ordre  $\rho$  et si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum \left[ \left\{ \frac{P_0 + P_1(z) + \dots + P_{\mu-1} z^{\mu-1}}{(z-b_0)^{\lambda_0} \dots (z-b_\lambda)^{\lambda_k}} \right\} + Q(z) \right],$$

on a alors  $\rho = \max(\sigma, \tau, \alpha)$ , où  $\sigma$  est l'ordre de la fonction entière  $\sum a_n z^n$ ,

$$\tau = \overline{\lim}_{|b_0| \rightarrow \infty} \frac{\log \log P}{\log |b_0|} \quad (P = \max_{0 \leq i \leq \mu} |P_i|)$$

et  $\alpha$  est l'exposant de convergence des pôles, c'est-à-dire

$$\alpha = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r; \infty)}{\log r},$$

où  $n(r; \infty)$  est le nombre des pôles de  $f(z)$  dans  $|z| \leq r$ .

Du résultat ci-dessus, nous pouvons tirer les remarques suivantes :

(i) Puisque  $\sigma \leq \rho$ , on a alors

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}} &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \\ &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log S^*(r)}{\log r}, \end{aligned}$$

où  $M(r)$  est le module maximum de la fonction entière  $\sum a_n z^n$  pour  $|z| = r$ .

(ii) Puisque  $\tau \leq \rho$ , on a alors

$$\overline{\lim}_{|b_0| \rightarrow \infty} \frac{\log \log P}{\log |b_0|} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log S^*(r)}{\log r}.$$

(iii) Comme Whittaker l'a remarqué, nous obtenons les relations précises

entre la « grandeur » (size) de la fonction et la « grandeur » des coefficients de la série de Taylor, dans le cas des fonctions entières. Les inégalités

$$|a_n| r^n \leq M(r) \leq \sum |a_n| r^n,$$

nous permettent, à l'aide des résultats ci-dessus, de faire des remarques analogues. Si la fonction méromorphe est grande, alors certains coefficients  $P$  peuvent être grands ou certains coefficient de Taylor  $a$  peuvent l'être aussi. De plus, si la fonction est petite, alors tous les coefficients  $P$  et  $a$  sont petits.

7. Bose ([1], p. 73) a étendu le lemme de Schwarz aux fonctions méromorphes comme suit :

Soit  $C$  un cercle  $|z| = R$  ne passant par aucune des singularités de  $f(z)$  et  $f(0) = 0$ , on a donc

$$(7.1) \quad |f(re^{i\theta})| \leq r R_m^{-1} S \quad \text{pour} \quad R_1 R_2 \dots R_m \geq \lambda \geq 1$$

valable pour  $|z| = r < R$ ,  $|z - b_i| = R_i$  et  $z = re^{i\theta}$  où  $\max_{|z|=r} |f(z)| \leq S$ , et définie comme dans le paragraphe 2.

Au lieu de l'inégalité (7.1), ceci doit être

$$|f(re^{i\theta})| \leq 2^m r R_m^{-1} S.$$

C'est ainsi, puisque dans la démonstration,  $R_i$  a été pris comme inférieur ou égal à  $R$ , tandis qu'on aurait dû avoir  $R_i < 2R$ , parce que  $z$  est un point du cercle  $|z| = R$  et que  $b_i$  peut être sur la ligne joignant  $z$  à l'origine et sur le côté opposé de celui de  $z$  par rapport à l'origine.

## DEUXIÈME PARTIE.

8. Dans cette partie, nous démontrerons d'abord les deux inégalités suivantes que nous utiliserons souvent.

Soit  $S^*(r, f)$ , la fonction maximum de  $f(z)$ . On a donc

$$(8.1) \quad \begin{cases} (i) & \log S^*(r, af) = \log |a| + \log S^*(r, f), \\ (ii) & \log S^*(r, f + \theta_n(a)) \leq |a| + \log S^*(r, f), \end{cases}$$

où

$$\theta_n(a) = a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^n}{n!}.$$

Le premier résultat de (8.1) s'obtient directement de (4.1). Quant à (ii), nous observons ceci :

$$\log S^*(r, f + \theta_n(a)) \leq \log(1 + |\theta_n(a)|) + \log S^*(r, f) \leq |a| + \log S^*(r, f).$$

9. Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe d'ordre  $\rho$  ayant des pôles ou des zéros distribués également (evenly) suivant qu'on prend la fonction maximum de  $f(z)$  ou  $\frac{1}{f(z)}$ .

Nous dirons que  $f(z)$  est du type maximal, normal ou minimal, selon que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \log \frac{S^*(r)}{r^\rho}$$

est infini, fini ou zéro, et nous dirons qu'il appartient au type convergent ou divergent suivant que

$$\int_0^\infty r^{-\rho-1} \log S^*(r) dr$$

converge ou diverge. Nous donnons ci-dessous les propriétés de la fonction maximum  $S^*(r)$ .

(i) Une fonction méromorphe du type convergent appartient toujours au type minimal.

Étant donné  $\varepsilon (> 0)$ , si petit qu'il soit, il existe  $r_0$  tel que pour  $r \geq r_0 = r_0(f)$ , on a

$$\varepsilon > \int_r^\infty t^{-\rho-1} \log S^*(t) dt \geq \frac{1}{\rho} r^{-\rho} \log S^*(r),$$

d'où ce résultat.

(ii) Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe et  $r_n(a)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  les modules des points- $a$  de  $f(z)$ . Donc

$$\int_0^\infty r^{-q-1} N(r; a) dr, \int_0^\infty r^{-q-1} n(r; a) dr \text{ et } \sum \{r_n(a)\}^{-q}$$

convergent si

$$\int_0^\infty r^{-q-1} \log S^*(r) dr$$

converge pour chaque  $q > 0$ .

10. THÉORÈME 4. — Si pour  $q$  donné positif, l'intégrale

$$\int_0^\infty r^{-q-1} \log S^*(r) dr$$

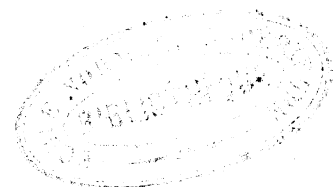
est convergente; pour chaque  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\log S^*(r) < \varepsilon r^q$$

sauf au plus sur un ensemble de points où la variation de  $\log r$  est bornée.

Démonstration. — Soit  $E$ , l'ensemble des points où, pour  $\varepsilon$  donné positif,  $\log S^*(r) \geq \varepsilon r^q$ . On a donc

$$\int_0^\infty r^{-q-1} \log S^*(r) dr \geq \int_E r^{-q-1} \log S^*(r) dr \geq \varepsilon \int_E \frac{d}{dr} (\log r) dr$$





et dans le cas où la variation de  $\log r$  n'est pas bornée dans l'ensemble  $E$ , ce qui contredit notre hypothèse que l'intégrale  $\int^{\infty} r^{-q-1} \log S^*(r) dr$  est convergente. D'où ce résultat :

**THÉOREME 5.** — Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe qui est le quotient de deux produits canoniques et soit  $\omega$  un point tel que  $|f(\omega)| = S(r)$ , on a alors

$$\log S^*(r) < cr^q \left( \int_0^r \frac{r N(t, f) + N\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + r \int_0^{\infty} \frac{N(t, f) + N\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t^2} dt \right),$$

où  $q$  est le genre de la fonction méromorphe et  $c$  un nombre indépendant de  $r$ .

*Démonstration.* — Soit

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} = \frac{\prod E\left(\frac{z}{a_n}, q\right)}{\prod E\left(\frac{z}{b_n}, q\right)},$$

où  $P_1(z)$  et  $P_2(z)$  sont les produits canoniques et où  $P_1(z)$  est d'ordre supérieur ou égal à celui de  $P_2(z)$ .

Nous avons

$$\log |f(z)| \leq \sum \log \left| E\left(\frac{z}{a_n}, q\right) \right| + \sum \log \left| E\left(\frac{z}{b_n}, q\right) \right|$$

pour toutes valeurs de  $z$ ; ce qui conduit à

$$\log S^*(r) \leq \sum \log \left| E\left(\frac{\omega}{a_n}, q\right) \right| + \sum \log \left| E\left(\frac{\omega}{b_n}, q\right) \right|.$$

Procédant exactement comme Nevanlinna ([5], p. 36) nous arrivons à ce résultat pour (1)  $c = b(q+1)^2$ . Dans le cas où  $P_2(z)$  est d'ordre supérieur à celui de  $P_1(z)$ , le résultat s'obtient si nous prenons la fonction maximum de  $\frac{1}{f(z)}$  et nous procédons comme dans le cas ci-dessus.

**THÉOREME 6.** — Soit  $q$  un grand nombre entier tel que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log S^*(r)}{r^{q+1}} = 0.$$

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , et  $b_1, b_2, \dots, b_n$  les zéros et les pôles de  $f(z)$  dans  $|z| < R$ . Si  $f(0) \neq 0, \infty$  pour chaque valeur finie de  $|z| \leq r$ , on a  $f(z)$  ou  $[f(z)]^{-1}$  égal à

$$\exp \left( \sum_0^q c_\nu z^\nu \right) \frac{\prod \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{q} \left( \frac{z}{a_n} \right)^q}}{\prod \left( 1 - \frac{z}{b_n} \right) e^{\frac{z}{b_n} + \dots + \frac{1}{q} \left( \frac{z}{b_n} \right)^q}}.$$

(1)  $b$  étant un nombre indépendant de  $r$ .

*Démonstration.* — Écrivons  $\log f(z)$  d'après la formule de Poisson-Jensen pour  $|z| < R$ , et dérivons  $(q+1)$  fois successivement; nous obtenons

$$D^{q+1} \log f(z) = \sum_{|a_n| < R} \frac{(-)^q q!}{(z - a_n)^{q+1}} - \sum_{|b_n| < R} \frac{(-)^q q!}{(z - b_n)^{q+1}} + \sigma_R(z) + I_R(z),$$

où

$$\sigma_R(z) = q! \left\{ \sum_{|a_n| < R} \left[ \frac{\bar{a}_n}{R^2 - \bar{a}_n z} \right]^{q+1} - \sum_{|b_n| < R} \left[ \frac{\bar{b}_n}{R^2 - \bar{b}_n z} \right]^{q+1} \right\}$$

et

$$I_R(z) = \frac{q+1!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\Phi})| \frac{2R e^{i\Phi}}{(R e^{i\Phi} - z)^{q+2}} d\Phi.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \sigma_R(z) &\leq q! (R-r)^{-q-1} [n(R; 0) + n(R; \infty)] \\ &< A (R-r)^{-q-1} \log S^*(r). \end{aligned}$$

Le second nombre tend vers zéro uniformément lorsque  $R$  tend vers l'infini. De plus

$$\begin{aligned} I_R(z) &\leq \frac{q+1!}{2\pi} \frac{2R}{(R-r)^{q+2}} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\Phi})| d\Phi \\ &\leq \frac{q+1!}{\pi} \frac{R}{(R-r)^{q+2}} \log S^*(R) \end{aligned}$$

et, par conséquent,  $I(z)$  tend uniformément vers zéro lorsque  $R$  tend vers l'infini. Donc

$$D^{q+1} \log f(z) = \sum \frac{(-)^q q!}{(z - a_n)^{q+1}} - \sum \frac{(-)^q q!}{(z - b_n)^{q+1}}.$$

En intégrant successivement  $(q+1)$  fois, nous obtenons ce résultat.

**THÉORÈME 7.** — Soit  $f(z)$ , une fonction méromorphe d'ordre fini. On a

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \log R + 2 \log \frac{1}{R-r} + 2 \log \log S^*(r) + O(1),$$

pour  $0 < r < R \leq 2r$ , où  $O(1)$  est une fonction bornée de  $r$  pour des valeurs suffisamment grandes de  $r$ .

*Démonstration.* — En représentant la fonction  $f(z)$  dans le cercle  $|z| < R$  d'après la formule de Poisson-Jensen, et en prenant la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\Phi})| \frac{2R e^{i\Phi}}{(R e^{i\Phi} - z)^2} d\Phi \\ &+ \sum_{|a_n| < R} \frac{R^2 - |\bar{a}_n|^2}{(z - a_n) |R^2 - \bar{a}_n z|} - \sum_{|b_n| < R} \frac{R^2 - |b_n|^2}{(z - b_n) |R^2 - \bar{b}_n z|}. \end{aligned}$$

Donc, pour  $|z| = r < R$ , on a

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{2R}{(R-r)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\Phi})| d\Phi \\ + \sum_{|a_n| < R} \frac{R^2 - |a_n|^2}{|z - a_n| \cdot |R^2 - \bar{a}_n z|} + \sum_{|b_n| < R} \frac{R^2 - |b_n|^2}{|z - b_n| \cdot |R^2 - \bar{b}_n z|}.$$

Mais

$$|R^2 - \bar{a}_n z| \geq R^2 - |a_n| r > R(R-r)$$

et

$$\frac{R^2 - |a_n|^2}{|z - a_n| \cdot |R^2 - \bar{a}_n z|} = \frac{R(R^2 - |a_n|^2)}{|R^2 - \bar{a}_n z|^2} \left| \frac{R^2 - \bar{a}_n z}{R(z - a_n)} \right| \\ < \frac{R}{(R-r)^2} \left| \frac{R^2 - \bar{a}_n z}{R(z - a_n)} \right|.$$

Donc

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| < \frac{2R}{(R-r)^2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\Phi})| d\Phi \right] \\ + \sum_{|a_n| < R} \left| \frac{R^2 - \bar{a}_n z}{R(z - a_n)} \right| + \sum_{|b_n| < R} \left| \frac{R^2 - \bar{b}_n z}{R(z - b_n)} \right|.$$

Utilisant maintenant les inégalités suivantes, nous obtenons

$$\log^+(a_1 a_2 \dots a_n) \leq \log^+ a_1 + \log^+ a_2 + \dots + \log^+ a_n, \\ \log^+(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq \log^+ a_1 + \log^+ a_2 + \dots + \log^+ a_n + \log^+ h, \\ \log^+ \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| < \log 2 + \log R + \log \frac{1}{R-r} + \log \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\Phi})| d\Phi \right\} \\ + \sum_{|a_n| < R} \log^+ \left| \frac{R^2 - \bar{a}_n z}{R(z - a_n)} \right| + \sum_{|b_n| < R} \log^+ \left| \frac{R^2 - \bar{b}_n z}{R(z - b_n)} \right| \\ + \log^+ \left[ n(R, f) + n\left(R, \frac{1}{f}\right) + 1 \right].$$

Donc, après l'intégration (cf. [5], p. 14), nous avons

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \log R + 2 \log \frac{1}{R-r} + \log \log S^*(r) \\ + N(R, f) + N\left(R, \frac{1}{f}\right) - N(r, f) \\ - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log^+ \left[ n(R, f) + n\left(R, \frac{1}{f}\right) \right] + O(1)$$

et

$$N(R, f) + N\left(R, \frac{1}{f}\right) - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) < O(1)$$

et enfin

$$n(R, f) + n\left(R, \frac{1}{f}\right) < N(eR, f) + N\left(eR, \frac{1}{f}\right) < \log S^*(eR, f) + O(1).$$

Puisque  $f(z)$  est d'ordre fini, nous avons

$$\log \log S^*(er) = O(\log r),$$

d'où

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \log R + 2 \log \frac{1}{R-r} + \log \log S^*(r) + O(1).$$

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] S. K. BOSE, *Bull. Cal. Math. Soc.*, t. 44, 1952, p. 69-74.
- [2] S. K. BOSE, *Math. Z.*, t. 56, 1952, p. 222-226.
- [3] S. K. BOSE, *Math. Z.* t. 66, 1957, p. 487-489.
- [4] R. P. SRIVASTAV, *Rivista di Matematica* (sous presse).
- [5] R. NEVANLINNA, *Acta Math.*, t. 46, 1925, p. 1-99.
- [6] J. M. WHITTAKER, *Proc. London Math. Soc.*, t. 40, 1936, p. 255-272.

