ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NICU BOBOC
SOLOMON MARCUS

Sur la détermination d'une fonction par les valeurs prises sur un certain ensemble

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 76, nº 2 (1959), p. 151-159
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_2_151_0>

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE FONCTION

PAR LES

VALEURS PRISES SUR UN CERTAIN ENSEMBLE

PAR MM. NICU BOBOC et SOLOMON MARCUS

L'étude des fonctions analytiques suggère le problème de déterminer, pour diverses classes de fonctions, l'ensemble minimum de points où il faut connaître une fonction de la classe pour qu'elle soit connue dans l'intervalle de définition.

Sauf mention contraire, toutes les fonctions considérées dans la suite seront des fonctions réelles définies sur l'intervalle $(0, 1)$.

Un ensemble $E \subset (0, 1)$ sera un *ensemble déterminant* pour une certaine classe $\mathcal{C}$ de fonctions si, pour $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$, on a $f \equiv g$ dès que $f = g$ sur E.

Quelques exemples :

a. $\mathcal{C} =$ la classe des fonctions continues. Les ensembles déterminants sont les ensembles partout denses sur $(0, 1)$.

b. $\mathcal{C} =$ la classe des fonctions intégrables au sens de Riemann. Le seul ensemble déterminant est l'intervalle $(0, 1)$.

c. $\mathcal{C} =$ la classe des fonctions dérivées intégrables au sens de Riemann. Les ensembles déterminants sont les ensembles partout denses. C'est une conséquence du théorème 7 de [5].

d. $\mathcal{C} =$ la classe des fonctions approximativement continues, intégrables au sens de Riemann. Les ensembles déterminants sont les ensembles partout denses. C'est une conséquence du théorème 8 de [5].

Un ensemble $E \subset (0, 1)$ sera un *ensemble stationnaire* pour $\mathcal{C}$ si, pour $f \in \mathcal{C}$, f est constante dès que la restriction de f sur E est constante.

Il est aisé de voir que, pour une classe $\mathcal{C}$ qui contient toutes les fonctions constantes, chaque ensemble déterminant est un ensemble stationnaire.

Une classe $\mathcal{C}$ de fonctions sera *invariante par soustraction* si de $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$, il s'ensuit $f - g \in \mathcal{C}$. Il est aisé de voir que pour une telle classe chaque ensemble stationnaire est un ensemble déterminant.

Toutes les classes envisagées dans les exemples *a*, *b*, *c*, *d* contiennent les constantes et sont invariantes par soustraction. Il s'ensuit que les ensembles stationnaires correspondants sont les mêmes que les ensembles déterminants de ces classes.

Envisageons maintenant la classe des fonctions dérivées bornées. Cette classe contient les constantes et est invariante par soustraction. Les ensembles stationnaires sont les mêmes que les ensembles déterminants.

On va utiliser dans la suite la notion suivante, due à Z. Zahorski ([10], p. 3) : Un ensemble X du type F_σ satisfait à la condition M_4 s'il existe une suite d'ensembles fermés $\{F_n\}$ et une suite de nombres $\{\eta_n\}$, $0 < \eta_n < 1$, telles que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ et que, pour chaque $x \in F_n$ et tout $c > 0$ il existe un nombre $\varepsilon(x, c) > 0$ jouissant de la propriété suivante : pour tous les h et h_1 tels que $hh_1 > 0$, $\frac{h}{h_1} < c$, $|h + h_1| < \varepsilon(x, c)$, on a

$$\frac{\operatorname{mes}\{E \cap [x+h, x+h+h_1]\}}{|h_1|} > \eta_n.$$

L'ensemble vide satisfait, par définition, à la condition M_4.

THÉORÈME 1. — *Pour que* $E \subset (0, 1)$ *soit un ensemble déterminant pour les fonctions dérivées bornées, il faut et il suffit que le complémentaire de* E *par rapport à* $(0, 1)$ *soit de mesure intérieure nulle au sens de Lebesgue.*

Démonstration. — *La condition est nécessaire.* Supposons que E soit un ensemble déterminant pour les fonctions dérivées bornées et admettons, par réduction à l'absurde, que le complémentaire de E ne soit pas de mesure intérieure nulle. Il existe alors un ensemble A mesurable, de mesure positive, contenu dans $(0, 1)$ et tel que $A \cap E = 0$. Désignons par B l'ensemble des points de A qui sont des points de densité pour A. On sait, d'après un théorème classique de Lebesgue, que $A - B$ est de mesure nulle, donc B est encore de mesure positive. B contient un ensemble R du type F_σ et tel que $B - R$ soit de mesure nulle. De ce que chaque point de B est un point de densité pour A il s'ensuit que chaque point de B est un point de densité pour B. On déduit que chaque point de R est un point de densité pour B et, puisque $B - R$ est de mesure nulle, chaque point de R est un point de densité pour R. Pour résumer, R est un ensemble non vide, du type F_σ, contenu dans le complémentaire de E et tel que chaque point de R est un point de densité pour R. C'est ce que Z. Zahorski appelle « ensemble qui satisfait à la condition M_5 » ([10], p. 3). Mais Z. Zahorski a montré que chaque ensemble satisfaisant à la condition M_5 satisfait aussi à la condition M_4([10], p. 3). Z. Zahorski a démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit l'ensemble des zéros d'une dérivée bornée est que le complémentaire de cet ensemble satisfasse à la condition M_4([10], p. 43). Il existe donc une fonction dérivée bornée dont l'ensemble des zéros est $P=(0, 1)-R$. En tenant compte que $E \subset P$, on déduit que E n'est pas un ensemble déterminant pour les fonctions dérivées bornées, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La condition est suffisante. Supposons que le complémentaire de E soit de mesure intérieure nulle et admettons, par réduction à l'absurde, que E n'est pas un ensemble déterminant pour les fonctions dérivées. Il existe donc une fonction dérivée φ non constante et telle que E soit contenu dans l'ensemble L des zéros de φ. Puisque φ est une dérivée, elle est une fonction mesurable, donc L est un ensemble mesurable. En tenant compte que, par hypothèse, la mesure extérieure de E est égale à 1 et puisque $E \subset L$, on déduit que le complémentaire de L est de mesure nulle. De ce que φ n'est pas constante on déduit l'existence d'un $x_0 \in (0, 1)$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Mais, d'après un théorème de Denjoy, pour chaque fonction dérivée f, un ensemble de la forme $\{x;\, \alpha < f(x) < \beta\}$ est vide ou de mesure positive [3]. Admettons, pour faire un choix, que $\varphi(x_0) > 0$. Il s'ensuit que l'ensemble $\{x;\, \varphi(x) > 0,\, 0 < x < 1\}$ est de mesure positive. Mais, d'autre part, cet ensemble étant contenu dans le complémentaire de L, doit être de mesure nulle. La contradiction obtenue montre que l'hypothèse que E n'est pas un ensemble déterminant est fausse.

Remarque. — La condition que les dérivées soient bornées a été utilisée seulement dans la démonstration de la nécessité de la condition.

Considérons maintenant la classe des fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Le seul ensemble déterminant pour ces fonctions est l'intervalle (0, 1). En effet, on sait qu'il existe une fonction qui prend sur chaque intervalle contenu dans (0, 1) toute valeur réelle (*voir*, par exemple, [1]). En modifiant, en un seul point, la valeur d'une telle fonction on obtient une fonction qui jouit encore de la propriété de Darboux.

Les fonctions jouissant de la propriété de Darboux ne forment pas une classe invariante par soustraction. En effet, on sait d'après un théorème de Sierpinski, que la somme (donc la différence aussi) de deux fonctions jouissant de la propriété de Darboux peut fournir une fonction donnée d'avance [8]. Il est donc possible que la famille des ensembles stationnaires contienne aussi d'autres exemplaires que l'intervalle (0, 1). Nous nous proposons de les trouver. Il faut d'abord rappeler une définition et donner un lemme.

Un ensemble linéaire E est *homogène de puissance du continu* si pour chaque $x \in E$ et pour chaque intervalle ouvert I contenant x l'ensemble $E \cap I$ est de cardinal $2^{\aleph_0}$ [2].

Lemme 1. — *Si* H *est un ensemble réel homogène de puissance du continu, alors* H *est une réunion de puissance du continu d'ensembles disjoints, dont chacun est partout dense par rapport à* H.

Démonstration. — H admet une partie H_1 dénombrable et partout dense sur H. $H - H_1$ est encore homogène de puissance du continu, donc il contient une partie H_2 dénombrable et partout dense par rapport à $H - H_1$. Mais, toujours en vertu de l'homogénéité de puissance du continu de l'ensemble H, $H - H_1$ est partout dense par rapport à H, donc H_2 est aussi partout dense par rapport à H. En continuant ainsi, tant qu'il est possible, on obtient une suite d'ensembles

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots, \quad H_\alpha, \quad \ldots \tag{1}$$

dénombrables, disjoints deux à deux, dont chacun est partout dense par rapport à H et telle que

$$H = \bigcup_\alpha H_\alpha. \tag{2}$$

Le type ordinal de cette suite ne peut être de cardinal inférieur au continu, car en vertu du théorème de König de la théorie des ensembles (*voir*, par exemple, [9]) et du fait que chaque H_α est dénombrable, H serait de puissance inférieure à la puissance du continu, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc la décomposition obtenue pour H est justement celle cherchée.

THÉORÈME 2. — *Pour que* $E \subset (0, 1)$ *soit un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux, il faut et il suffit que* E *rencontre tout ensemble homogène de puissance du continu et contenu dans* $(0, 1)$.

Démonstration. — La condition est nécessaire. Supposons que E soit un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux et admettons, par réduction à l'absurde, qu'il ne rencontre pas tout ensemble homogène de puissance du continu, donc que le complémentaire de E contienne un ensemble H homogène de puissance du continu. On a, pour H, la décomposition (2).

Il y a seulement un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles H_α qui contiennent des extrémités des intervalles contigus avec H. Il y a donc une infinité de puissance du continu d'ensembles H_α qui ne contiennent aucune extrémité des intervalles contigus avec H. Rangeons ces ensembles H_α, dont la réunion sera désignée par $H^\star$, dans une nouvelle suite transfinie :

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots, \quad H_\beta, \ldots.$$

Rangeons tous les nombres réels dans une suite transfinie

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_\beta, \quad \ldots$$

du même type ordinal que la suite des H_β contenus dans $H^\star$.

Définissons une fonction φ, de la manière suivante

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin H^\star \\ \xi_\beta & \text{si} \quad x \in H_\beta. \end{cases}$$

La fonction φ jouit de la propriété de Darboux. En effet, sur chaque intervalle contigu avec H^*, φ est constante, tandis que, sur chaque intervalle contenant à l'intérieur des points de H^*, φ prend chaque valeur réelle ξ_β, car un tel intervalle est rencontré, à la suite de la densité des ensembles H_α par rapport à H, par chaque ensemble H_α. Mais E est contenu dans le complémentaire de H^*; il s'ensuit que la restriction de φ sur E est constante, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que E est un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux.

La condition est suffisante. Supposons que E rencontre tout ensemble homogène de puissance du continu, contenu dans $(0, 1)$ et admettons, par réduction à l'absurde, que E ne soit pas un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Montrons, dans ce cas, qu'il existe un ensemble homogène disjoint avec E, ce qui sera en contradiction avec l'hypothèse.

Si E n'est pas partout dense sur $(0, 1)$, alors il existe un intervalle ouvert G, contenu dans $(0, 1)$ et disjoint de E. Un tel intervalle est un ensemble homogène de puissance du continu et le théorème est démontré. Nous pourrons donc admettre, dans ce qui suit, que E est un ensemble partout dense sur $(0, 1)$,

Du fait que E n'est pas un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux il s'ensuit l'existence d'une fonction f non constante, jouissant de la propriété de Darboux sur $(0, 1)$ et l'existence d'une constante k telles que, pour $x \in E$, on ait $f(x) = k$. Posons

$$A = \{x; f(x) \neq k\}.$$

L'ensemble A est non vide et disjoint de E. Le théorème sera démontré dès que nous aurons établi que A est un ensemble homogène de puissance du continu.

Soit $x \in A$. Admettons, pour faire un choix, que $f(x) < k$. Soit un intervalle I contenant le point x. Puisque E est partout dense sur $(0, 1)$, il existe un point $y \in I$ tel que $f(y) = k$. Soit maintenant ξ tel que $f(x) < \xi < k$. En vertu de la propriété de Darboux de f, il existe un point z compris entre x et y, donc appartenant à I, tel que $f(z) = \xi$. On a $z \in A$. Puisque les valeurs comprises entre $f(x)$ et k forment un ensemble de puissance du continu et en tenant compte que chacune de ces valeurs est prise par f au moins une fois sur l'intervalle I, il s'ensuit que $A \cap I$ a la puissance du continu. En tenant compte que x est un point arbitraire de A et I est un intervalle arbitraire contenant le point x, on déduit que A est un ensemble homogène de puissance du continu.

Remarque. — Tout ensemble parfait est un ensemble homogène ayant la puissance du continu. Mais il existe un ensemble homogène de puissance du continu que ne contient aucun ensemble parfait. En effet, la droite réelle est une réunion de puissance du continu d'ensembles disjoints, superposables deux à deux par translation et dont chacun rencontre tout ensemble parfait (*voir*, par exemple, [4]). Un ensemble quelconque de cette décomposition ne contient aucun ensemble parfait. Rangeons les ensembles de la décomposition dans une suite transfinie

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_\alpha, \quad \ldots$$

et rangeons les nombres réels dans une suite du même type ordinal

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_\alpha, \quad \ldots.$$

Définissons une fonction ψ de la manière suivante :

$$\psi(x) = \xi_\alpha \qquad \text{si} \quad x \in E_\alpha.$$

Cette fonction jouit de la propriété de Darboux et est constante sur E_α sans l'être sur toute la droite. Donc, en vertu du théorème 2, l'ensemble $(-\infty, \infty) - E_\alpha$ contient un ensemble homogène de puissance du continu. D'autre part, puisque E_α rencontre tout ensemble parfait, $(-\infty, \infty) - E_\alpha$ ne contient aucun ensemble parfait.

Afin d'obtenir une caractérisation plus simple des ensembles stationnaires pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux, il faut d'abord examiner la structure des ensembles homogènes de puissance du continu.

Lemme 2. — *Un ensemble réel* A *contient un ensemble homogène de puissance du continu si et seulement si la puissance de* A *est égale à la puissance du continu.*

Démonstration. — Considérons l'ensemble B des points x de A tels qu'il existe un intervalle ouvert I_x jouissant de la propriété suivante : l'ensemble $A \cap I_x$ est de puissance inférieure à celle du continu. Faisons usage du théorème de recouvrement de Lindelöf; on peut choisir un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles $I^1_{x_1}, I^2_{x_2}, \ldots, I^n_{x_n}, \ldots$, tels que chaque point de B appartienne à un certain $I^n_{x_n}$. Mais, comme l'ensemble $B \cap I^n_{x_n}$ est, pour chaque n entier positif, de puissance inférieure à celle du continu et comme, d'autre part, en vertu du théorème de König déjà cité, une réunion dénombrable d'ensembles de puissance inférieure à celle du continu est aussi de puissance inférieure à celle du continu, on déduit que B est de puissance inférieure à celle du continu.

Supposons maintenant que A a la puissance du continu. L'ensemble $A - B$ n'est donc pas vide. Mais de la définition même de l'ensemble B on déduit que, pour chaque $x \in A - B$ et pour chaque intervalle I contenant x, l'ensemble $A \cap I$ a la puissance du continu. Mais alors l'ensemble $(A - B) \cap I = (A \cap I) - B$ a aussi la puissance du continu. On a prouvé ainsi que $A - B$ est un ensemble homogène de puissance du continu.

Réciproquement, si A contient un ensemble homogène de puissance du continu, alors A a aussi la puissance du continu et le lemme 2 est démontré.

Du lemme 2 on tire, en tenant compte du théorème 2, le

THÉORÈME 3. — *Un ensemble* $E \subset (0, 1)$ *est un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux si et seulement si le complémentaire de* E *par rapport à* $(0, 1)$ *est de puissance inférieure à celle du continu.*

COROLLAIRE. — *Si l'hypothèse du continu est vraie, alors un ensemble* $E \subset (0, 1)$ *est un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux si et seulement si le complémentaire de* E *par rapport à* $(0, 1)$ *est un ensemble dénombrable.*

Afin d'obtenir une troisième caractérisation des ensembles stationnaires pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux nous avons besoin du

LEMME 3. — *Si l'ensemble réel* H *est une réunion de puissance du continu d'ensembles disjoints dont chacune est partout dense par rapport à* H, *alors* H *est un ensemble homogène de puissance du continu.*

Démonstration. — Soit $x \in H$ et soit I un intervalle contenant x. Désignons par $H = \bigcup_\alpha H_\alpha$ une décomposition de H du type envisagé dans l'énoncé. En vertu de la densité de chaque H_α par rapport à H on déduit que l'ensemble $H_\alpha \cap I$ n'est vide pour aucun α. Mais les ensembles H_α sont disjoints; il s'ensuit donc que l'ensemble $\bigcup_\alpha (H_\alpha \cap I)$ a la puissance du continu. Comme on a

$$H \cap I = \bigcup_\alpha (H_\alpha \cap I),$$

on déduit que $H \cap I$ a la puissance du continu. Remarquons enfin que x est un point arbitraire de H et I est un intervalle arbitraire contenant x. H est donc homogène de puissance du continu.

Posons la définition suivante : un ensemble X est *décomposable* s'il est une réunion de puissance du continu d'ensembles disjoints dont chacun est partout dense par rapport à X.

Des lemmes 1 et 3 et en faisant usage du théorème 2 on déduit le

THÉORÈME 4. — *Un ensemble* $E \subset (0, 1)$ *est un ensemble stationnaire pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux si et seulement si le complémentaire de* E *par rapport à* $(0, 1)$ *ne contient aucun ensemble décomposable.*

Remarques finales. — Les théorèmes 1 et 3 montrent en quelle mesure le « degré d'analyticité » des fonctions dérivées bornées est plus élevé que celui des fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Pour savoir si deux dérivées bornées sur $(0, 1)$ coïncident, il suffit de savoir qu'elles coïncident sur un ensemble de mesure extérieure égale à 1. C'est assez peu, si nous pensons que le complémentaire d'un tel ensemble peut être aussi de mesure extérieure égale à 1. Mais deux fonctions jouissant de la propriété de Darboux peuvent ne pas coïncider même lorsque leurs valeurs sont les mêmes sur le complémentaire d'un ensemble formé d'un seul point.

Pour déduire qu'une dérivée bornée, constante sur l'ensemble E, est constante sur $(0, 1)$, il suffit que la mesure extérieure de E soit égale à 1. Mais si, au lieu de la dérivée bornée, on considère une fonction jouissant de la propriété de Darboux, alors le complémentaire de E doit être de puissance inférieure à celle du continu et c'est bien plus restrictif.

Ainsi, on peut dire que la différence entre les ensembles de mesure intérieure nulle et ceux de puissance inférieure à celle du continu marque, en quelque sorte, la différence entre les fonctions dérivées bornées et les fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Entre ces deux classes de fonctions il y a « un monde entier » même si l'on considère seulement les fonctions jouissant de la propriété de Darboux qui sont de la première classe de Baire. L'étude des ensembles déterminants et des ensembles stationnaires pour les classes de fonctions intermédiaires, plus larges que la classe des dérivées bornées mais plus restreintes que la classe des fonctions jouissant de la propriété de Darboux, s'impose donc de la façon la plus naturelle.

Il faut aussi remarquer la nature diverse des ensembles stationnaires. Pour les fonctions continues ces ensembles sont caractérisés par leur densité; pour les dérivées bornées, par leur mesure; pour les fonctions jouissant de la propriété de Darboux, par leur puissance.

Enfin nous signalons deux résultats publiés ailleurs par l'un de nous, résultats concernant les ensembles déterminants ([6], [7]).

Considérons la classe $\mathcal{C}$ des fonctions réelles, de variable réelle, définies par les trois propriétés suivantes :

1° Si $f \in \mathcal{C}$, alors f n'est pas monotone sur $(-\infty, \infty)$;
2° Si $f \in \mathcal{C}$, alors f jouit de la propriété de Darboux;
3° Si $f \in \mathcal{C}$, alors, pour $x < y$, on a

$$\min[f(x), f(y)] < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max[f(x), f(y)]$$

ou

$$f(x) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(y).$$

Dans [6] on montre que chaque intervalle est un ensemble déterminant pour la classe $\mathcal{C}$. Il faut remarquer que $\mathcal{C}$ contient aussi d'autres fonctions que les solutions discontinues de l'équation fonctionnelle de Cauchy. (Cette chose est montrée aussi dans [6].) On a cherché, d'habitude, des classes de fonctions admettant les intervalles comme ensembles déterminants seulement parmi les fonctions continues (telles sont les fonctions quasi analytiques au sens de S. Bernstein et les fonctions quasi analytiques au sens de Borel-Denjoy-Carleman). Or, dans [6] on montre que la classe $\mathcal{C}$ envisagée ci-dessus est formée seulement de fonctions non mesurables et dépourvues de la propriété de Baire.

Un autre résultat : Pour que l'ensemble $E \subset R^n$ soit un ensemble déterminant pour les fonctions réelles définies dans R^n et continues, dans R^n, par rapport à chaque variable prise à part, il faut et il suffit que E soit partout dense dans R^n [7].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Boboc, *Un exemple d'une fonction continue « à la Darboux », partout discontinue* (en roumain) (*Com. Acad. R. P. R.*, t. **4**, nos 5-6, 1954, p. 199-200).

[2] G. Cantor, *Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punctmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume* G_n (*Acta mathematica*, t. **7**, 1885, p. 105-124).

[3] A. Denjoy, *Sur une propriété des fonctions dérivées* (*Enseignement Mathématique*, t. **18**, 1916, p. 320-328).

[4] P. Erdös et S. Marcus, *Sur la décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes* (*Acta Mathematica, Academiæ Scientiarum Hungaricæ*, t. **8**, nos 3-4, 1957, p. 443-452).

[5] S. Marcus, *Remarques sur les fonctions intégrables au sens de Riemann* (*Bull. Math. Soc. Math. et Phys. R. P. R.*, t. **2**, 1958 (sous presse).

[6] S. Marcus, *Sur une classe de fonctions, définies par des inégalités, introduite par M. Á. Császár* (*Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, t. **19**, nos 3-4, 1958, p. 209).

[7] S. Marcus, *Sur les fonctions continues par rapport à chaque variable prise à part* (en russe) (*Dokl Akad. Nauk U. R. S. S.*, t. **112**, no 5, 1957, p. 812-814).

[8] W. Sierpinski, *Sur une propriété des fonctions réelles quelconques* (*Le Mathematiche*, Catania, t. **8**, no 2, 1953, p. 43-48).

[9] W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis*, Gauthier-Villars, Paris, 1950, p. 131.

[10] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **69**, 1950, p. 1-54).