

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MONTEL

Éléments exceptionnels des fonctions analytiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 76, n° 3 (1959), p. 271-281

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_3_271_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉLÉMENTS EXCEPTIONNELS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR M. PAUL MONTEL.



1. Une fonction $u = f(z)$, analytique et régulière dans un domaine (D), c'est-à-dire méromorphe dans ce domaine, peut être considérée comme établissant une correspondance entre les points du plan complexe z et ceux du plan complexe u ou entre les points des sphères de Riemann associées à ces plans. On peut la considérer aussi comme définissant une courbe (Γ) dans un plan projectif rapporté à deux axes de coordonnées z et u .

Les valeurs exceptionnelles sont celles que u ne prend pas ou ne prend qu'un nombre fini de fois. Leur étude repose sur le théorème de Picard. Elle constitue un ensemble de propositions formant le cycle de Picard et donne naissance à une importante famille normale. Le théorème de Picard affirme que u est une constante si elle admet dans le plan z trois valeurs exceptionnelles en se plaçant au premier point de vue; ou, en se plaçant au second point de vue, que la courbe (Γ) est une droite parallèle à l'axe des z si elle ne rencontre qu'un nombre fini de fois chacune de trois droites fixes parallèles à cet axe.

2. Il existe d'autres éléments exceptionnels que les points extérieurs à (Γ). On peut examiner les tangentes à cette courbe et transformer par dualité l'hypothèse du théorème de Picard. La tangente à (Γ) est la multiplicité définie par l'équation

$$U - f(z) - f'(z)(Z - z) = 0,$$

Z et U désignant les coordonnées courantes, z et u celles du point de contact. Aux trois droites parallèles du théorème de Picard vont correspondre trois points en ligne droite.

Supposons que ces points soient d'abord les points $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, à l'infini, c'est-à-dire que la tangente n'est parallèle ni aux axes ni à leur bis-

sectrice. $f'(z)$ ne prendra aucune des valeurs 0, 1, ∞ et sera une constante C, donc

$$f(z) = Cz + C',$$

C' désignant une autre constante : (Γ) est une droite.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de trois points alignés quelconques $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, $P_3(a_3, b_3)$ avec la condition

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soit $\lambda = a_2 - a_3$, $\mu = a_3 - a_1$, $\nu = a_1 - a_2$; si l'un de ces nombres est nul, par exemple λ , on a : $a_2 = a_3$, $b_2 \neq b_3$,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ 0 & b_3 - b_2 & 0 \end{vmatrix} = (b_3 - b_2)(a_2 - a_1) = 0.$$

Donc $a_2 = a_1$, les points sont sur une parallèle à l'axe des u et, comme ils sont distincts,

$$b_1 \neq b_2, \quad b_2 \neq b_3, \quad b_3 \neq b_1,$$

et l'on peut prendre

$$\lambda = b_2 - b_3, \quad \mu = b_3 - b_1, \quad \nu = b_1 - b_2.$$

On peut donc, dans tous les cas, supposer $\lambda\mu\nu \neq 0$.

Posons

$$\begin{aligned} \lambda[f(z) + (a_1 - z)f'(z) - b_1] &= \theta_1(z), \\ \mu[f(z) + (a_2 - z)f'(z) - b_2] &= \theta_2(z), \\ \nu[f(z) + (a_3 - z)f'(z) - b_3] &= \theta_3(z). \end{aligned}$$

On a, puisque $\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 = \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = \lambda + \mu + \nu = 0$,

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv 0,$$

et aucune des fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ n'a de zéro. La fonction $-\frac{\theta_1}{\theta_2}$ ne prend pas les valeurs 0 ni ∞ ; elle ne prend pas non plus la valeur 1, sinon l'égalité

$$\theta_1 + \theta_2 \equiv 0$$

entraînerait $\theta_3 = 0$, ce qui est impossible.

Si $f(z)$ est régulière dans tout le plan fini, $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ est une constante et l'on a

$$f(z) + (a_1 - z)f' - b_1 \equiv C[f(z) + (a_2 - z)f' - b_2],$$

C désignant une constante, ou

$$f(z) + (\alpha - z)f' - \beta \equiv 0,$$

en posant

$$\alpha = \frac{a_1 - C a_2}{1 - C}, \quad \beta = \frac{b_1 - C b_2}{1 - C}, \quad \text{si } C \neq 1.$$

L'équation différentielle peut s'écrire

$$\left[\frac{f(z)}{z - \alpha} \right]' = \frac{\beta}{(z - \alpha)^2},$$

d'où

$$f(z) = C_1(z - \alpha) + \beta = C_1 z + C_2$$

La courbe (Γ) est une droite. Si $C = 1$, il vient

$$(a_1 - a_2)f' - (b_1 - b_2) = 0$$

et le résultat est le même.

Si le domaine d'existence (D) de $f(z)$ ne comprend pas tout le plan, on voit que les fonctions $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ forment une famille normale.

Les conclusions demeurent les mêmes si la tangente passe un nombre fini de fois par un seul des trois points.

Mais elles supposent essentiellement que les trois points P_1, P_2, P_3 soient alignés. Supposons en effet que ces points forment un triangle de sommets $(0, \infty), (0, 0), (\infty, 0)$. La fonction $u = e^z$ n'a aucune tangente parallèle aux axes et une tangente passant à l'origine,

Ce cas d'exception ne se présente pas dans le cas des valeurs exceptionnelles ; les droites parallèles peuvent être remplacées par trois droites arbitraires et même par une courbe algébrique d'ordre au moins égal à 3.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toute fonction régulière dans le plan dont la tangente ne passe jamais par l'un de trois points alignés ou ne passe qu'un nombre fini de fois par un de ces points est un binôme du premier degré.

Nous appellerons *points tangentiuellement exceptionnels*, les points par lesquels ne passe aucune tangente à la courbe (Γ).

3. Considérons une famille de fonctions $f(z)$ régulières dans un domaine (D) où elles admettent trois points tangentiuellement exceptionnels alignés. On peut supposer que ce sont les points $(0, 0), (a, 0), (a', 0)$. En effet, des translations sur z et sur u ramènent un des points à l'origine et, si m désigne la pente de la droite qui les porte, en remplaçant $f(z)$ par $f(z) - mz$, on place les deux autres points sur l'axe des z . Soit alors

$$\begin{aligned} -f(z) - f'(z)(a - z) &= \theta_1, \\ -f(z) - f'(z)(a' - z) &= \theta_2, \\ -f(z) + z f'(z) &= \theta_3; \end{aligned}$$

ces expressions sont dépourvues de zéro et vérifient l'identité

$$a'\theta_1 - a\theta_2 + (a - a')\theta_3 = 0.$$

La fonction

$$\frac{\theta_1}{\theta_3} = \frac{f(z) + f'(z)(a - z)}{f'(z) - zf''(z)} = 1 + a \frac{f'}{f - zf'}$$

admet comme valeurs exceptionnelles 0, ∞ , $1 - \frac{a}{a'}$, comme on l'a vu précédemment, donc la fonction $\frac{f'}{f - zf'}$ admet les valeurs exceptionnelles $-\frac{1}{a}$, ∞ , $-\frac{1}{a'}$ et son inverse, $\frac{f}{f' - z}$, les valeurs exceptionnelles $-a$, 0, $-a'$. Donc, la famille $\frac{f}{f'} - z$ est normale et il en est de même pour les fonctions $\frac{f'}{f}$ et pour

$$\varphi = \frac{f'}{f}.$$

On ne peut en conclure que la famille des fonctions $f(z)$ est normale. Par exemple, considérons la suite des fonctions $f_n(z) = e^{nz}$ dans un domaine contenant un segment de l'axe des u et ne contenant aucun des points tangentiellement exceptionnels. Les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ n'ont pas de zéro dans le domaine car leurs zéros sont $a + \frac{1}{n}, a' + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}$: la famille n'est pas normale tandis que la suite $\frac{f'_n}{f_n} = n$ l'est. On verrait de même que la suite $\left(\frac{nz+1}{nz-1}\right)^n = f_n$ n'est pas normale car elle converge non uniformément vers $e^{\frac{2}{z}}$ tandis que la suite $\frac{f'_n}{f_n}$ converge vers $\frac{-2}{z^2}$. Des points tangentiellement exceptionnels sont ici $(-1, 0), (2, 0), (-2, 0)$ si le domaine est le cercle $|z| < 1$.

La famille des dérivées logarithmiques est normale dans le domaine (D). On en déduit un cycle de théorèmes correspondant à ceux des cycles de Picard ou de Liouville dus à Schottky et à Landau.

Soit par exemple le domaine $|z| < 1, a' = \infty$ et

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots,$$

on montre aisément que, pour $|z| < \theta < 1$, le module de $\frac{f(z)}{f'(z)}$ est borné par un nombre dépendant des données, de θ et de $\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$.

Si le domaine est $|z| < R$, on démontre que, si R dépasse une valeur dépendant de $|a_0|, |a_1|, |a_2|$, la fonction cesse d'être régulière ou l'un des points cesse d'être tangentiellement exceptionnel.

Dans certains cas, la famille des $f(z)$ est aussi normale ⁽¹⁾.

(1) Cf. P. MONTEL, *Sur les propriétés tangentielles des fonctions analytiques* (Institut de mathématiques, 1958, Bucarest.)

4. Le théorème établi au paragraphe 2 peut être étendu à d'autres éléments exceptionnels. Appelons parabole osculatrice d'ordre p à la courbe (Γ) au point (z, u) la courbe d'équation

$$U = f(z) + \frac{Z-z}{1} f'(z) + \frac{(Z-z)^2}{1.2} f''(z) + \dots + \frac{(Z-z)^p}{p!} f^{(p)}(z),$$

et supposons qu'il existe p points du plan P_1, \dots, P_p , exceptionnels c'est-à-dire tels qu'aucune parabole osculatrice d'ordre p à (Γ) ne passe par un de ces points. Si les p points P_1, P_2, \dots, P_p sont sur une parabole d'ordre p , la fonction $f(z)$, supposée régulière dans le plan, est un polynôme de degré p . Pour $p=1$, on retrouve le théorème du paragraphe 2.

Donnons la démonstration dans le cas de $p=4$. Soient $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2), P_3(a_3, b_3), P_4(a_4, b_4)$, les quatre points exceptionnels, on doit avoir

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & b_1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & b_2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & b_3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par λ, μ, ν, ρ les coefficients de b_1, b_2, b_3, b_4 , dans le développement de δ . Si l'un d'eux, λ par exemple, est nul, on en déduit que deux des a_1, a_2, a_3, a_4 sont égaux, par exemple $a_1 = a_2$ et, comme $b_1 \neq b_2$, on en déduit, comme au paragraphe 2, que $a_2 = a_3$. Donc $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

Alors

$$f + (a-z)f' + \frac{(a-z)^2}{2} f''$$

a trois valeurs exceptionnelles b_1, b_2, b_3 , donc

$$f + (a-z)f' + \frac{(a-z)^2}{2} f'' = C,$$

et, en dérivant,

$$(a-z)^2 f''' = 0,$$

d'où

$$f = Az^2 + Bz + C.$$

Supposons donc $\lambda\mu\nu\rho \neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \lambda \left[f + (a_1-z)f' + \frac{1}{2}(a_1-z)^2 - b_1 \right] &= \frac{e^{\theta_1(z)}}{\varphi(z)}, \\ \mu \left[f + (a_2-z)f' + \frac{1}{2}(a_2-z)^2 - b_2 \right] &= \frac{e^{\theta_2(z)}}{\varphi(z)}, \\ \nu \left[f + (a_3-z)f' + \frac{1}{2}(a_3-z)^2 - b_3 \right] &= \frac{e^{\theta_3(z)}}{\varphi(z)}, \\ \rho \left[f + (a_4-z)f' + \frac{1}{2}(a_4-z)^2 - b_4 \right] &= \frac{e^{\theta_4(z)}}{\varphi(z)}, \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} = 0,$$

$\varphi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ désignant des fonctions entières. On en déduit que les différences entre deux des $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ sont des constantes ⁽²⁾. On a donc

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{Cte}$$

ou

$$f + (a_1 - z)f' + \frac{1}{2}(a_1 - z)^2 - b_1 = C \left[f + (a_2 - z)f' + \frac{1}{2}(a_2 - z)^2 - b_2 \right]$$

ou, en dérivant,

$$[(a_1 - z)^2 - C(a_2 - z)^2] f'' = 0$$

et, puisque $\lambda \neq 0, a_1 \neq a_2,$

$$\begin{aligned} f'' &= 0 \\ f &= A z^2 + B z + C. \end{aligned}$$

On raisonnerait de même dans le cas général et l'on établit ainsi le théorème :

Toute fonction analytique régulière dont aucune parabole osculatrice d'ordre p ne passe par un de p points fixes situés sur une parabole d'ordre p est un polynôme de degré p.

5. Remplaçons la multiplicité tangente par la multiplicité normale

$$f'(U - f) + Z - z = 0.$$

Supposons qu'aucune normale ne passe par l'un de trois points alignés et reprenons les notations du paragraphe 2 en posant

$$\begin{aligned} \lambda [f'(z)(b_1 - f(z)) + a_1 - z] &= \theta_1, \\ \mu [f'(z)(b_2 - f(z)) + a_2 - z] &= \theta_2, \\ \nu [f'(z)(b_3 - f(z)) + a_3 - z] &= \theta_3, \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &\equiv 0. \end{aligned}$$

On en déduit que le rapport $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ est constant ou

$$\begin{aligned} z + f(z)f'(z) - \alpha - \beta f' &= 0, \\ z^2 + u^2 - 2\alpha z - 2\beta u + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

La courbe (Γ) est un cercle dont le centre est situé sur la droite $P_1P_2P_3$; elle admet donc des normales passant par ces trois points. Lorsque α et β sont infinis, la courbe est une droite et possède des normales passant par ces points. Il n'existe donc pas de fonction analytique uniforme et régulière dont aucune normale ne passe par trois points alignés.

⁽²⁾ Cf. É. BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (Acta Mathematica, t. 20, 1897, p. 337-404).

6. Remplaçons la tangente à (Γ) par la corde joignant les points (z, u) et $(z+h, u+\Delta u)$, h étant fixe. Supposons que cette droite ne passe par aucun des points alignés P_1, P_2, P_3 et conservons les notations du paragraphe 2. La corde a pour équation

$$U - f - \frac{\Delta f}{h}(Z - z) = 0.$$

On aboutira à l'équation

$$\beta - f - \frac{\Delta f}{h}(\alpha - z) = 0.$$

$f = \beta$ est une solution; posons $f(z) = \beta - g(z)$, il vient

$$g(z+h)(\alpha - z) - g(z)(\alpha - z - h),$$

$$\frac{g(z+h)}{\alpha - z - h} = \frac{g(z)}{\alpha - z} = \omega(z),$$

$\omega(z)$ désignant une fonction périodique de période h . On a donc

$$f(z) = \beta + (z - \alpha)\omega(z).$$

Si $C = 1$, on a

$$(a_1 - a_2) \frac{\Delta f}{h} = b_1 - b_2,$$

et, comme $a_1 - a_2$ n'est pas nul,

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = c,$$

et, en posant $f = cz + g$,

$$\Delta g = 0$$

et $g = \omega(z)$ est périodique de période h .

Si la même propriété est vérifiée pour l'accroissement k et les points P'_1, P'_2, P'_3 , on aura

$$\omega(z - \alpha) + \beta \equiv \omega_1(z - \alpha') + \beta',$$

α', β' étant les coordonnées d'un point de la droite $P'_1 P'_2$. En remplaçant z par $z + k$,

$$\omega(z + k)(z + k - \alpha) + \beta = \omega_1(z)(z + k - \alpha') + \beta',$$

et, en retranchant,

$$(z + k - \alpha) \Delta_k \omega + k \omega = k \omega_1.$$

Remplaçons maintenant z par $z + h$ et retranchons, nous aurons

$$h \Delta_k \omega = k \Delta_h \omega_1$$

et

$$\frac{\Delta_h \omega_1}{h} = \frac{\Delta_k \omega}{k}.$$

$\frac{k}{h} \Delta_h \omega_1$ est une fonction doublement périodique θ . Donc

$$\begin{aligned} \omega(z+k) - \omega(z) &= \theta, \\ \omega(z+2k) - \omega(z+k) &= \theta, \\ \dots\dots\dots, \\ \omega(z+mk) - \omega[z+(m-1)k] &= \theta, \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\omega(z+mk) - \omega(z) = m\theta$$

et, si θ n'est pas identiquement nul, $\omega(z+mk)$ augmente indéfiniment avec m .

D'autre part, l'égalité

$$(z-\alpha)\omega + \beta = (z-\alpha')\omega_1 + \beta'$$

donne

$$\begin{aligned} (z+mk-\alpha)\omega(z+mk) + \beta &= (z+mk-\alpha')\omega_1(z) + \beta', \\ \omega(z+mk) &= \frac{z+mk-\alpha'}{z+mk-\alpha} \omega_1(z) + \frac{\beta'-\beta}{z+mk-\alpha} \end{aligned}$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega(z+mk) = \omega_1(z).$$

On peut supposer $\omega_1(z)$ fini puisque z est arbitraire. Il y a contradiction, donc θ est nul et

$$\Delta_k \omega = 0.$$

$\omega(z)$ est doublement périodique. En résumé,

Une fonction régulière $f(z)$, telle que la corde unissant les points $(z, f(z))$, $(z+h, f(z+h))$ ne passe par aucun de trois points alignés est de la forme

$$(z-\alpha)\omega(z) + \beta,$$

$\omega(z)$ désignant une fonction périodique de période h , α et β des constantes.

Si la même propriété est vérifiée pour des accroissements h et k dont le rapport est imaginaire, ω est doublement périodique.

Si la même propriété est vérifiée pour des accroissements h, k, l , linéairement indépendants, ω est une constante et la fonction est linéaire.

Remarque. — Dans le cas où le rapport $\frac{h}{k}$ est réel, si ce rapport est rationnel, $\omega(z)$ est périodique et si ce rapport est irrationnel, ω est une constante et $f(z)$ est linéaire.

7. Soit $u = f(z, z')$, une fonction analytique de deux variables z, z' , régulière pour toutes valeurs finies de ces variables. Supposons qu'aucun plan tangent à la surface (S) définie par les valeurs (z, z', u) ne passe par un des points alignés $P_1(a_1, a'_1, b_1)$, $P_2(a_2, a'_2, b_2)$, $P_3(a_3, a'_3, b_3)$. On a

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta' = \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & 1 \\ a'_2 & b_2 & 1 \\ a'_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe trois nombres λ, μ, ν , différents de zéro, comme on l'a montré au paragraphe 2, tels que

$$\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 = \lambda a'_1 + \mu a'_2 + \nu a'_3 = \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = \lambda + \mu + \nu = 0.$$

Le plan tangent au point (z, z', u) a pour équation

$$U - u - p(Z - z) - q(Z' - z') = 0,$$

avec $p = \frac{\partial u}{\partial z}$, $q = \frac{\partial u}{\partial z'}$. Si ce plan ne passe par aucun des points P_1, P_2, P_3 , les fonctions

$$\lambda[b_1 - u - p(a_1 - z) - q(a'_1 - z')] = \theta_1,$$

$$\mu[b_2 - u - p(a_2 - z) - q(a'_2 - z')] = \theta_2,$$

$$\nu[b_3 - u - p(a_3 - z) - q(a'_3 - z')] = \theta_3$$

n'ont pas de zéro, On a d'ailleurs

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0.$$

On en déduit, comme au paragraphe 2, que le rapport $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ est une constante C , d'où

$$b_1 - u - p(a_1 - z) - q(a'_1 - z') = C[b_2 - u - p(a_2 - z) - q(a'_2 - z')]$$

ou

$$\beta - u - p(\alpha - z) - q(\alpha' - z') = 0,$$

avec

$$\alpha = \frac{a_1 - C a_2}{1 - C}, \quad \alpha' = \frac{a'_1 - C a'_2}{1 - C}, \quad \beta = \frac{b_1 - C b_2}{1 - C}, \quad \text{si } C \neq 1.$$

Par une translation des axes, cette équation devient

$$u - pz - qz' = 0.$$

Le premier membre est le déterminant fonctionnel des fonctions $\frac{u}{z}$ et $\frac{z'}{z}$; en effet

$$\frac{D\left(\frac{u}{z}, \frac{z'}{z}\right)}{D(z, z')} = \begin{vmatrix} \frac{p}{z} - \frac{u}{z^2} & -\frac{z'}{z^2} \\ \frac{q}{z} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{u - pz - qz'}{-z^3}.$$

On a donc

$$\frac{u}{z} = \varphi\left(\frac{z'}{z}\right);$$

la surface est un cône de sommet origine. La section de ce cône par le plan $z' = tz$ est la droite d'intersection de ce plan avec le plan

$$u = \varphi(t)z,$$

la fonction $\varphi\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{u(z, z')}{z}$ est analytique et régulière et il en est de même

pour $\varphi(t)$. La génératrice du cône

$$z' = tz, \quad u = \varphi(t)z$$

est unique dans tout plan passant par l'axe des u . Pour un pôle de $\varphi(t)$, on obtiendrait la droite

$$z = z' = 0,$$

c'est-à-dire l'axe des u qui devrait alors appartenir à chacun de ces plans, ce qui n'a pas lieu. Donc $\varphi(t)$ n'a pas de pôle. Si l'on coupe le cône par le plan $z = 0$ correspondant à t infini, la génératrice est définie par le plan

$$u = \frac{\varphi(t)}{t} z'$$

et $\frac{\varphi(t)}{t}$ a une valeur limite pour t infini. Donc $\varphi(t)$ a un pôle à l'infini; c'est un polynôme qui est du premier degré si $\frac{\varphi(t)}{t}$ a une limite finie. Cette limite ne peut d'ailleurs être infinie, sinon on obtiendrait l'axe des u , $z = z' = 0$. En définitive,

$$\varphi(t) = A + Bt, \quad u = Az + Bz',$$

la surface (S) est un plan.

Supposons maintenant $C = 1$. L'équation devient

$$(a_1 - a_2)p + (a'_1 - a'_2)q = b_1 - b_2.$$

L'une des différences $a_1 - a_2$, $a'_1 - a'_2$ est différente de zéro, sinon on aurait $b_1 = b_2$ et les points P_1 et P_2 ne seraient pas distincts. Supposons donc $a_1 - a_2 \neq 0$. Posons $\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = \lambda$, $\frac{a'_1 - a'_2}{a_1 - a_2} = \mu$, on a l'équation

$$p + \mu q = \lambda,$$

elle admet la solution particulière λz et, si $f = \lambda z + f_1$, on a

$$p_1 + \mu q_1 = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad q_1 = \frac{\partial f_1}{\partial z'}.$$

C'est le déterminant fonctionnel des fonctions f_1 et $z' - \mu z$. Donc

$$f_1 = \varphi(z' - \mu z).$$

La solution générale est donnée par

$$u - \lambda z = \varphi(z' - \mu z).$$

La surface (S) est un cylindre de génératrices parallèles à la droite $P_1 P_2$. Chaque génératrice est donnée par les équations

$$\begin{aligned} z' - \mu z &= t, \\ u - \lambda z &= \varphi(t), \end{aligned}$$

$\varphi(t)$ désignant une fonction analytique régulière. On verrait comme plus haut que $\varphi(t)$ est un polynôme et que $\frac{\varphi(t)}{t}$ a une limite finie pour t infini. Donc $\varphi(t)$ est un binôme du premier degré et la surface est un plan.

Appelons *points tangentiellement exceptionnels* les points en lesquels ne passe aucun plan tangent à la surface (S). Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Toute fonction $f(z, z')$ de deux variables complexes z, z' , régulière dans les plans des z et des z' , admettant trois points tangentiellement exceptionnels alignés est une fonction linéaire de ses variables.

Ce théorème correspond par dualité au théorème de Picard relatif à une fonction de deux variables.

8. Les éléments exceptionnels relatifs à une fonction analytique peuvent être associés quoique de natures différentes et conduisent à des propositions utiles. Le premier exemple nous en est donné par le théorème de Bureau-Miranda qui associe deux valeurs exceptionnelles à un point tangentiellement exceptionnel en établissant que la famille des fonctions holomorphes dépourvues de zéros et dont les dérivées ne prennent pas la valeur un est normale. Si l'on remplace le point $(1, 1)$ à l'infini par l'origine, la condition $f'(z) \neq 1$ devient $f(z) - zf'(z) \neq 0$ et le résultat est le même d'après un théorème de M. Chi Tai Chuang ⁽³⁾.

⁽³⁾ Cf. CHI TAI CHUANG, *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 1936.