

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

**L'espace dont chaque élément est une courbe n'est qu'un  
semi-espace de Banach. II**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 80, n° 2 (1963), p. 135-137

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1963\\_3\\_80\\_2\\_135\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_2_135_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# L'ESPACE DONT CHAQUE ÉLÉMENT EST UNE COURBE N'EST QU'UN SEMI-ESPACE DE BANACH

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

---

## SECONDE PARTIE.

### RÉSUMÉ.

Nous abandonnons les démonstrations figurant aux pages 265-270 de notre précédent Mémoire <sup>(1)</sup> pour les remplacer par de nouvelles démonstrations, aboutissant d'ailleurs aux mêmes conclusions.

INTRODUCTION. — Dans notre Mémoire précédent <sup>(1)</sup> nous avons étudié les espaces dont chaque élément est une courbe et nous y avons généralisé les notions de norme, d'élément neutre, de produit par scalaire et de somme.

Le résultat essentiel de ce Mémoire est, en abrégé, le suivant : l'espace des courbes est un « semi-espace de Banach ». C'est-à-dire qu'il vérifie les conditions définissant un espace de Banach, sauf les conditions 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup> rappelées plus loin, lesquelles sont remplacées par deux axiomes plus faibles.

Nous avons ensuite étudié trois espaces particuliers de courbes, que nous appellerons les semi-espaces  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ . Or, dans un autre Mémoire <sup>(2)</sup>

---

<sup>(1)</sup> *L'espace dont chaque élément est une courbe n'est qu'un semi-espace de Banach*, [Ann. Éc. Norm. Sup., (3), t. 78, 1961, p. 241-272].

<sup>(2)</sup> *L'espace des courbes est-il un espace de Banach ?* (J. Math. pures et appl., t. 40, 1961, p. 197-204).

nous avons montré que ni  $\mathcal{C}_1$ , ni  $\mathcal{C}_2$  ne sont des espaces de Banach. Il résulte alors de ce qui précède que dans  $\mathcal{C}_1$ , comme dans  $\mathcal{C}_2$ , l'une au moins des conditions 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup> ne peut être toujours vérifiée.

D'autre part, dans notre Mémoire précédent (1), nous avons montré que 4<sup>o</sup> est une conséquence de 3<sup>o</sup>.

Il en résultait donc que, dans  $\mathcal{C}_1$  comme dans  $\mathcal{C}_2$ , la condition 3<sup>o</sup> n'est pas toujours vérifiée.

Nous avons alors cru démontrer par un exemple contraire que, dans  $\mathcal{C}_1$ , la condition 4<sup>o</sup> n'est pas non plus toujours vérifiée. Mais M. Kurosh, de l'Université de Syracuse (États-Unis), a attiré notre attention sur l'insuffisance de notre démonstration (p. 265-270). Nous *allons donc*, dans la suite, *utiliser un autre exemple contraire pour aboutir à la même conclusion*.

Autrement dit, le *but recherché* dans les pages 265-270 *va rester atteint* par d'autres moyens, à savoir :

Si  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  sont trois courbes de l'espace  $\mathcal{C}_1$ , la condition

$$3^o (\xi + \xi_1) + \xi_2 = \xi + (\xi_1 + \xi_2),$$

n'est pas toujours vérifiée; et, de même, la condition

$$4^o \text{ si } \xi + \xi_1 = \xi + \xi_2, \text{ alors } \xi_1 = \xi_2,$$

n'est pas toujours vérifiée.

EXEMPLE CONTRAIRE RELATIF A LA CONDITION 4<sup>o</sup> DE BANACH. — Considérons le carré  $A_1 N_1 B_1 N_2$  de centre  $O$  (*fig. 1*) et prenons pour  $\xi_1$  l'angle droit orienté  $\widehat{A_1 N_1 B_1}$  et pour  $\xi_2$  l'angle droit orienté  $\widehat{A_1 N_2 B_1}$ . D'autre part, soit  $M$  un point quelconque de  $A_1 B_1$ , par exemple, situé dans le prolongement de  $B_1 A_1$  au-delà de  $A_1$  comme dans la figure 1. Appelons

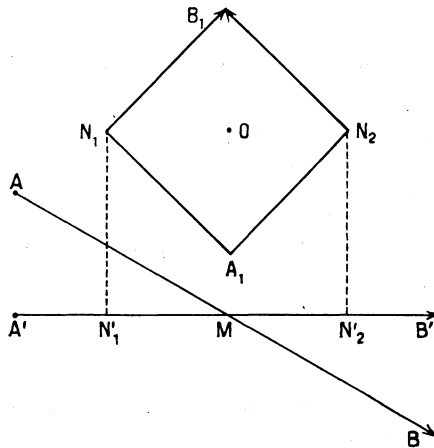


Fig. 1.

alors  $A'B'$  un vecteur parallèle à  $N_1N_2$ , plus grand que  $N_1N_2$  et de milieu  $M$ ,  $\overline{A'B'}$  et  $\overline{N_1N_2}$  ayant même orientation. Nous prendrons pour  $\xi$  un vecteur  $\overline{AB}$  obtenu en prenant pour  $\overline{AA'}$  un vecteur équipollent à  $\overline{OA_1}$  et pour  $\overline{BB'}$  un vecteur équipollent à  $\overline{OB_1}$ . Il est clair que  $\xi'_1 \equiv \xi + \xi_1$  et  $\xi'_2 = \xi + \xi_2$  auront tous deux pour extrémités  $A'$  et  $B'$ , (quand on prend pour origine le centre  $O$  du carré  $A_1N_1B_1N_2$ ).

D'autre part, dans  $\mathcal{C}_1$ , les « diamètres » de  $A_1N_1$  et de  $N_1B_1$  étant égaux, le paramètre intrinsèque  $t$ , de  $N_1$  sur  $\xi_1$  sera  $\frac{1}{2}$ . Et il en sera de même pour le paramètre intrinsèque de  $N_2$  sur  $\xi_2$ .

Alors le point de  $\xi'_1$  qui correspond à cette valeur  $\frac{1}{2}$  sera le point  $N'_1$ , tel que

$$\overline{ON'_1} = \overline{OM} + \overline{ON_1}.$$

Ce point sera évidemment sur  $A'B'$ . Alors les points de  $\xi'_1$  correspondant à  $0 < t < \frac{1}{2}$  correspondront à des points  $P, Q$  de  $A_1N_1$  et  $AM$  pour lesquels le diamètre de chaque arc est égal à sa longueur. Dès lors, si  $\overline{OR}$  est la résultante de  $\overline{OP}$  et  $\overline{OQ}$ , le point  $R$  parcourra le segment  $A'N'_1$ . Et pour  $\frac{1}{2} < t < 1$  le point  $R$  parcourra l'intervalle  $N'_1B'$ . De sorte que finalement,  $\xi'_1$  n'est autre que le vecteur  $\overline{A'B'}$ . Il en est de même pour  $\xi'_2$ .

Finalement, on voit que  $\xi'_1 = \overline{A'B'} = \xi'_2$ , de sorte que

$$\xi + \xi_1 = \xi + \xi_2, \quad \text{avec } \xi_1 \neq \xi_2.$$

Donc dans  $\mathcal{C}_1$ , la condition 4<sup>o</sup> n'est pas toujours vérifiée (et, par suite, 3<sup>o</sup> non plus), comme nous l'avions annoncé.

#### ERRATUMS.

Je saisis cette occasion pour rectifier quelques erreurs typographiques de mon précédent article (1).

Page 265, 15<sup>e</sup> ligne : au lieu de  $t + \frac{P}{q(t'' - t)}$ , lire  $t' + \frac{P}{q}(t'' - t)$ .

Page 266, 7<sup>e</sup> ligne : au lieu de  $C'C''$ , lire  $OC''$ .

» 8<sup>e</sup> ligne : au lieu de  $A''\gamma D''$ , lire  $A''\gamma D'$ .

» Dans la figure 6,  $CD$  qui devrait être égal à  $AB$ , comme dans la figure 4, a été dessiné, par moi, trop long.

Page 269, 2<sup>e</sup> ligne au lieu de page 266, lire page 260.

» 5<sup>e</sup> ligne, au lieu de le point de  $A_1$ , lire le point de  $\xi_1$ .

