MARTHE GRANDET-HUGOT

Étude de certaines suites $\{\lambda\alpha^n\}$ dans les adèles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 3 (1966), p. 171-185
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_3_171_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 171 à 185.

ÉTUDE DE CERTAINES SUITES $\{\lambda\alpha^n\}$ DANS LES ADÈLES

PAR Mme MARTHE GRANDET-HUGOT.

Cette étude a pour but de généraliser à des ensembles d'adèles certaines propriétés relatives aux nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

1. RAPPELS ET NOTATIONS. — Nous noterons par $\mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels, par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers rationnels. P désignera l'ensemble des valuations de $\mathbf{Q}$, o désignant la valuation archimédienne, et p la valuation p-adique avec $|p|_p = \frac{1}{p}$; $\mathbf{Q}_p$ est le corps des nombres p-adique et $\mathbf{\Omega}_p$ sa clôture algébrique. (Alors $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{R}$.)

Soit I un sous-ensemble fini de P, posons

$$I^+ = I \cup \{o\}, \qquad I^- = I - \{o\} \quad \text{si } o \in I,$$
$$I^- = I \quad \text{si } o \notin I.$$

Soit, alors, V_I l'anneau des I-adèles de Q, V_I est isomorphe algébriquement et topologiquement au produit cartésien

$$\prod_{p \in I} \mathbf{Q}_p$$

et contient un sous-corps isomorphe à $\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q}e_I$, e_I étant l'élément unité de V_I. Nous désignerons également par V_P l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$ et par e_P son élément unité.

Si $x \in V_P$, x_p désignera sa composante dans $\mathbf{Q}_p$ et nous poserons

$$|x_p|_p = |x|_p.$$

Enfin, nous désignerons par $\mathbf{Z}[I]$, le sous-anneau de $\mathbf{Q}$ ainsi défini :

$$\mathbf{Z}[I] = \{x \in \mathbf{Q} \mid |x|_p = 1 \text{ pour } p \notin I^+\},$$

autrement dit $\mathbf{Z}[I]$ est l'anneau des fractions n'ayant au dénominateur que des nombres premiers de I.

Si $a \in \mathbf{R}$, nous appellerons domaine fondamental $F_a(P)$ de V_P le sous-ensemble de V_P ainsi défini :

$$F_a(P) = \{ x \in V_P \mid |x|_p \leq 1 \text{ pour } p \neq 0;\ 0 \leq x_0 < a+1 \},$$

on obtient alors le théorème suivant :

Théorème d'Artin ([1], [2]). — *Soit $x \in V_P$; il existe une décomposition unique*

$$x = E(x)\, e_P + \varepsilon(x),$$

où $E(x) \in \mathbf{Q}$ *et* $\varepsilon(x) \in F_a(P)$.

De plus, si $x \in V_I$, $E(x) \in Z[I]$, *et pour* $p \notin I$: $\varepsilon_p(x) = -E(x)$.

Cette décomposition jouera le même rôle que la décomposition en partie réelle et partie fractionnaire dans le domaine réel.

2. Remarques sur la décomposition d'Artin des suites $\{\lambda\alpha^n\}$. — Soit $\alpha \in V_I$, tel que $|\alpha|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et soit λ un élément inversible de V_I.

La décomposition d'Artin de $\lambda\alpha^n$, avec $F_a(P)$ comme domaine fondamental (a est un nombre réel quelconque) :

$$\lambda\alpha^n = u_n e_P + \varepsilon(\lambda\alpha^n), \qquad \text{où} \quad u_n \in \mathbf{Z}[I].$$

Remarque 1. — *Il existe* $q \in \mathbf{Z}$; $q = \prod_{p \in I^-} p^{k_p}$, *tel que, à partir d'un certain rang :* $q^{n+1} u_n \in \mathbf{Z}$.

Soit

$$|\alpha|_p = p^{t_p} \quad \text{où} \quad t_p > 0 \quad \text{pour } p \in I^-,$$
$$|\lambda|_p = p^{r_p} \quad \text{où} \quad r_p \in \mathbf{Z}$$

à partir d'un certain rang $|\lambda\alpha^n|_p > 1$, donc

$$|u_n|_p = |\lambda\alpha^n|_p = p^{r_p + n t_p}, \qquad \forall p \in I^-$$

donc, il existe $k_p \geq t_p$ tel que, à partir d'un certain rang :

$$|u_n|_p \leq p^{k_p(n+1)}$$

et si

$$q = \prod_{p \in I^-} p^{k_p},$$

on a

$$|q^{n+1} u_n|_p \leq 1 \quad \text{pour tout } p \in I^-,$$

ce qui, compte tenu du fait que $u_n \in \mathbf{Z}[I]$ entraîne que $q^{n+1} u_n$ est un entier rationnel.

REMARQUE 2. — *Deux suites $\lambda\alpha^n$ et $\lambda'\alpha'^n$ distinctes ne peuvent pas engendrer la même suite $\{u_n\}$.*

Supposons que

$$\lambda\alpha^n = u_n e_P + \varepsilon(\lambda\alpha^n),$$
$$\lambda'\alpha'^n = u_n e_P + \varepsilon(\lambda'\alpha'),$$

alors

$$\lambda\alpha^n - \lambda'\alpha'^n \varepsilon(\lambda\alpha^n - \varepsilon(\lambda'\alpha'^n) \in F_a(P),$$

supposons, par exemple, que $|\alpha|_p > |\alpha'|_p$ pour un $p \in I^-$, on aurait alors

$$\alpha_p^n\left[\lambda_p - \lambda'_p\left(\frac{\alpha'_p}{\alpha_p}\right)^n\right] = \varepsilon_p(\lambda\alpha^n) - \varepsilon_p(\lambda'\alpha'^n)$$

et, dans $\mathbf{Q}_p$ $\left(\frac{\alpha'_p}{\alpha_p}\right)^n \to 0$ quand $n \to \infty$, donc, pour n suffisamment grand :

$$\left|\lambda_p - \lambda'_p\left(\frac{\alpha'_p}{\alpha_p}\right)^n\right|_p = |\lambda|_p$$

et

$$|\lambda\alpha^n|_p = \operatorname{Max}(|\varepsilon(\lambda\alpha^n)|_p, |\varepsilon(\lambda'\alpha'^n)|_p) \leqq 1,$$

ce qui est impossible puisque $|\lambda\alpha^n|_p \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a donc

$$|\alpha|_p = |\alpha'|_p \quad \text{pour tout } p \in I^-.$$

On a également

$$|\lambda|_p = |\lambda'|_p$$

et, puisque

$$|\alpha|_p^n\left|\lambda_p - \left(\frac{\alpha'_p}{\alpha_p}\right)^n\lambda'_p\right|_p < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_p - \left(\frac{\alpha'_p}{\alpha_p}\right)^n\lambda'_p = 0,$$

donc

$$\lambda_p\alpha^n = \lambda'_p\alpha^n \quad \text{à partir d'un certain rang}$$

et

$$\lambda_p = \lambda'_p, \qquad \alpha_p = \alpha'_p, \qquad \forall p \in I^-.$$

Le cas $p = 0$ se traite alors de la même manière que dans le domaine réel.

3. ENSEMBLES $\mathcal{S}_I^{p'}(a)$.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un élément $\alpha \in V_I$, tel que $|\alpha|_p > 1$ pour $p \in I$, appartient à $\mathcal{S}_I^{p'}(a)$ si il existe un élément λ inversible de V_I tel que, en considérant la décomposition d'Artin :*

$$\lambda\alpha^n = u_n e_P + \varepsilon(\lambda\alpha^n),$$

on ait

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n) = 0, \qquad \text{où} \quad p' \in P,$$

le domaine fondamental étant $F_a(P)$.

Les éléments algébriques de cet ensemble sont alors les éléments $S_I^{p'}$ définis et caractérisés par F. Bertrandias dans [2] :

$S_I^{p'}$ est l'ensemble des éléments algébriques θ de V_I tels que $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$, et pour lesquels il existe un polynome $A \in \mathbf{Z}[X]$ ayant les propriétés suivantes :

— θ est racine de A dans V_I.

— Les racines de A dans $\Omega_{p'}$ (distinctes de $\theta_{p'}$ si $p' \in I$) appartiennent au disque $|X|_{p'} < 1$.

— Les racines de A dans Ω_p (distinctes de θ_p pour $p \in I$) appartiennent au disque $|X|_p \leq 1$ pour tout $p \in P$.

On sait déjà que l'ensemble $\mathcal{S}_0^{\infty}(a)$ est un ensemble dénombrable ([6], [7]) dont les éléments algébriques forment l'ensemble S des nombres de Pisot-Vijayaraghavan. Nous allons généraliser ce résultat.

THÉORÈME. — *L'ensemble $\mathcal{S}_I^{p'}(a)$ est dénombrable.*

Démonstration. — Posons

$$\lambda\alpha^n = u_n e_P + \varepsilon(\lambda\alpha^n),$$

où

$$u_n \in \mathbf{Z}[I] \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(\lambda\alpha^n) \in F_a(P).$$

On en déduit

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+2}\,\varepsilon(\lambda\alpha^n) + u_n\,\varepsilon(\lambda\alpha^{n+2}) - 2\,\varepsilon(\lambda\alpha^{n+1})\,u_{n+1} - \varepsilon^2(\lambda\alpha^{n+1}) + \varepsilon(\lambda\alpha^n)\,\varepsilon(\lambda\alpha^{n+2}),$$

d'où

$$(1)\quad u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = -\frac{u_{n+2}}{u_n}\,\varepsilon(\lambda\alpha^n) + 2\,\frac{u_{n+1}}{u_n}\,\varepsilon(\lambda\alpha^{n+1}) - \varepsilon(\lambda\alpha^{n+2}) + \frac{\varepsilon^2(\lambda\alpha^{n+1}) - \varepsilon(\lambda\alpha^n)\,\varepsilon(\lambda\alpha^{n+2})}{u_n}.$$

En utilisant les notations du paragraphe 2, on obtient les inégalités suivantes à partir de (1), pour tout $p \in I^+ \cup \{p'\}$.

a. $p \neq p'$.

— Si $p \neq 0$: A partir d'un certain rang :

$$|u_n|_p = p^{r_p + n t_p},$$

d'où, compte tenu de $|\varepsilon_p(\lambda\alpha^n)| \leq 1$:

$$\left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right|_p \leq \operatorname{Max}(p^{2t_p},\ 2p^{t_p},\ 1),$$

donc, à partir d'un certain rang :

$$(2)\qquad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right|_p \leq p^{2t_p}.$$

— Si $p = 0 \in I$: Alors

$$|\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)| \leq \operatorname{Max}(|a|,\ |a+1|) = A.$$

Quand n augmente indéfiniment $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste borné, on peut donc trouver une constante M telle que

$$(3) \qquad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right| \leqq \mathrm{M}$$

à partir d'un certain rang.

— Si $0 \notin \mathrm{I}$: Nous utiliserons alors l'inégalité

$$(4) \qquad a \leqq -u_n < a + 1.$$

b. $p = p'$.

— Si $p' \in \mathrm{I}^-$: A partir d'un certain rang, étant donné ε, on a

$$|\varepsilon(\lambda\alpha^n)|_{p'} < \varepsilon,$$

d'où l'on déduit, en utilisant (1) :

$$(5) \qquad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right|_{p'} < \varepsilon p^{2 l_{p'}}.$$

— Si $p' = 0 \in \mathrm{I}$: On a alors nécessairement $|a| < 1$, et, étant donné ε, à partir d'un certain rang :

$$|\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)| < \varepsilon$$

et, en utilisant (1), on obtient

$$(6) \qquad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right| < \varepsilon \mathrm{M},$$

M étant une constante.

— Si $p' \notin \mathrm{I}$: Alors, étant donné ε, à partir d'un certain rang, on a

$$(7) \qquad |u_n|_{p'} < \varepsilon.$$

Nous allons maintenant montrer que si $u_0, \ldots, u_{n+1}$ sont donnés, ces inégalités définissent de manière unique u_{n+2}, pour n assez grand. Supposons qu'il existe deux éléments u_{n+2} et u'_{n+2} de $\mathbf{Z}[\mathrm{I}]$ vérifiant ces inégalités et étudions la différence $u_{n+2} - u'_{n+2}$.

a. $p' \in \mathrm{I}$.

— Si $0 \in \mathrm{I}$ et $p' = 0$: De (3) on tire

$$(3') \qquad |u_{n+2} - u'_{n+1}| \leqq 2\mathrm{M}$$

et pour $p \neq 0$ et $p \neq p'$ on tire de (2) :

$$(2') \qquad |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p \leqq p^{2l}$$

et, enfin, de (5) on tire

$$(5') \qquad |u_{n+2} - u'_{n+2}|_{p'} \leqq \varepsilon p^{2 l_{p'}}$$

d'où

$$\prod_{p\in\mathrm{I}} |u_{n+2}-u'_{n+2}|_p \leqq \varepsilon\mathrm{M}',$$

où M′ est une constante, donc si ε a été choisi assez petit :

$$\prod_{p\in\mathrm{I}} |u_{n+2}-u'_{n+2}|_p < 1,$$

ce qui, compte tenu du fait que u_{n+2} et u'_{n+2} appartiennent à $\mathbf{Z}[\mathrm{I}]$, entraîne que $u_{n+2}=u'_{n+2}$.

— Si $p'=0$: Alors, pour $p\neq p'$ on utilise (2′), et de plus, (6) entraîne

$$(6')\qquad |u_{n+2}-u'_{n+2}| < 2\varepsilon\mathrm{M},$$

on a donc encore, si ε a été choisi suffisamment petit,

$$\prod_{p\in\mathrm{I}} |u_{n+2}-u'_{n+2}|_p < 1$$

qui entraîne $u_{n+2}=u'_{n+2}$.

— Si $0\notin\mathrm{I}$: On utilise alors (2′), (5′) et puisque

$$a\leqq u_{n+2}<a+1 \qquad \text{et} \qquad a\leqq u'_{n+2}<a+1,$$

on a

$$|u'_{n+2}-u_{n+2}|<1$$

et l'on obtient encore le même résultat.

b. $p'\notin\mathrm{I}$.

On utilise alors les inégalités

$$(7')\qquad |u_{n+2}-u'_{n+2}|_{p'}<\varepsilon \qquad \text{si} \quad p'\neq 0,$$

$$(7'')\qquad |u_{n+2}-u'_{n+2}|<2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad p'=0,$$

d'où l'on déduit le même résultat.

L'ensemble des suites $\{u_n\}$ est donc dénombrable, et puisqu'à une seule $\{u_n\}$ correspond au plus un élément α de $\mathrm{V_I}$, on en déduit que l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{p'}(a)$ est dénombrable.

4. Cas où $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha'')$ a un nombre fini de points d'accumulation. — Nous allons généraliser le résultat du paragraphe précédent au cas où $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha'')$ a un nombre fini de points d'accumulation dans $\mathbf{Z}_{p'}$, pour un certain $p'\in\mathrm{P}$. Nous prendrons $a=-\frac{1}{2}$ pour définir le domaine fondamental, ce qui ne restreint pas la généralité du problème.

Nous montrerons d'abord que, quitte à modifier le domaine fondamental, on peut ramener ces points d'accumulation dans une boule centrée à l'origine et de rayon aussi petit qu'on veut.

Dans la démonstration, nous supposerons $p' \neq 0$, puisque, pour $p' = 0$, la démonstration est presque identique à celle qui a été faite dans le cas réel [7].

Considérons une suite $\{\varphi_n\}$ d'éléments de V_I, telle que, pour un certain $p' \in P$, $\varepsilon_{p'}(\varphi_n)$ n'ait qu'un nombre fini de points d'accumulation dans $\mathbf{Z}_p$.

Soient $r_i\,(i = 1, \ldots, k)$ les points d'accumulation rationnels et $\omega_j\,(j = 1, \ldots, h)$ les autres. Désignons par $(\varphi_n)_{p'}$ la composante de φ_n dans $Q_{p'}\,[(\varphi_n)_{p'} = 0$ si $p' \notin I]$.

Lemme. — *Si $p' \in I$, on peut trouver $d \in \mathbf{Z}[p']$ tel que, dans la décomposition d'Artin de $d\varphi_n$, le seul point d'accumulation rationnel de $\varepsilon_{p'}(d\varphi_n)$ soit* 0.

a. Si $p' \in I$. — En effet si

$$(\varphi_n)_{p'} = E(\varphi.)\,e + r_i + \varepsilon_n \qquad (i = 1, \ldots, k),$$
$$(d\varphi_n)_{p'} = dE(\varphi_n)\,e + dr_i + d\varepsilon_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

On peut choisir $d \in \mathbf{Z}[p']$ tel que

$$dr_i \in \mathbf{Z}[I] \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, k,$$
$$d\varepsilon(\varphi_n) - dr_i \in F_{-\frac{1}{2}}(P),$$

en effet, si $d \in \mathbf{Z}[p']$,

$$|d|_p \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad p \neq p' \qquad \text{et} \qquad p \neq 0,$$

on peut donc choisir d tel que

$$|dr_i|_p \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad p \neq p' \qquad \text{et} \qquad p \neq 0$$

et si l'on veut avoir

$$-\frac{1}{2} \leqq d\varepsilon_0(\varphi_n) - dr_i < \frac{1}{2},$$

on peut prendre

$$|d| < \frac{1}{|2|r_i| - 1|}$$

et alors

$$E(d\varphi_n) = dE(\varphi_n) + dr_i \qquad (i = 1, \ldots, k),$$
$$\varepsilon(d\varphi_n) = d\varepsilon(\varphi_n) - dr_i.$$

b. Si $p' \notin I$, le calcul précédent est toujours valable.

Nous supposerons donc dans la suite que 0 est le seul point d'accumulation rationnel possible de la suite $\varepsilon_{p'}(d\varphi_n)$.

Considérons maintenant le système des formes linéaires

$$\Lambda_j = x\omega_j - y_j \qquad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, h,$$

ce système, de signature $(h, h+1)$ est non annulable, donc (*cf.* [5], chap. II), si l'on pose

$$H = \operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,h} (|x|, |y_j|),$$
$$\Lambda = \operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,h} |x\omega_j - y_j|_{p'},$$

l'inégalité

$$H^{h+1}\Lambda^h \leq 1$$

admet une infinité de solutions en $(x, y_j) \in \mathbf{Z}^{h+1}$, où les entiers x, y_j sont premiers entre eux dans leur ensemble. Autrement dit, on peut trouver un entier H aussi grand qu'on veut tel que

$$|x\omega_j - y_j|_{p'} < \frac{1}{H^{1+\frac{1}{h}}} \qquad (j = 1, \ldots, h),$$

avec

$$H = \operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,h} (|x|, |y_j|).$$

On a alors nécessairement $|x|_{p'} = 1$, car si $|x|_{p'} < 1$ on aurait aussi $|y_j|_{p'} < 1$ pour $j = 1, \ldots, h$ et x et les y_j ne seraient pas premiers entre eux dans leur ensemble.

On peut alors écrire

$$(x\varphi_n)_{p'} = x\,E(\varphi_n) + x\omega_j + x\varepsilon_n \qquad (j = 1, \ldots, h),$$
$$\text{où} \quad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

et, si l'on pose

$$\eta_j = x\omega_j - y_j \qquad \text{où} \quad |\eta_j|_{p'} < \frac{1}{H^{1+\frac{1}{h}}},$$

il vient

(4) $$(x\varphi_n)_{p'} = x\,E(\varphi_n) + y_j + \eta_j + x\varepsilon_n.$$

Et l'on peut poser

$$x\varphi_n = V_n e_P + \varepsilon'(x\varphi_n),$$

où

$$v_n = x\,E(\varphi_n) + y_j \in \mathbf{Z}[\Gamma]$$

et où

$$\eta(x\varphi_n) = x\varepsilon(\varphi_n) - y_j e_P$$

vérifie les inégalités suivantes :

$$|\eta(x\varphi_n)|_{p'} < \frac{2}{H^{1+\frac{1}{h}}} \quad \text{à partir d'un certain rang,}$$
$$|\eta(x\varphi_n)|_p \leq 1 \qquad \text{pour} \quad p \neq p',$$
$$|\eta(x\varphi_n)| \leq \frac{3H}{2}.$$

Pour $\varphi_n = \lambda\alpha^n$, on peut alors écrire des inégalités analogues à celles du paragraphe 3. Plus précisément, pour $p \neq p'$ et $p \neq 0$ on aura entre les v_n les mêmes inégalités qu'au paragraphe 3.

— *Si* $p' \in \mathrm{I}$, on aura

$$\left| v_{n+2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_n} \right|_{p'} \leq \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}^{1+\frac{1}{h}}} \quad \text{à partir d'un certain rang,}$$

K étant une constante.

— *Si* $p' \notin \mathrm{I}$, alors

$$| v_n |_{p'} \leq \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}^{1+\frac{1}{h}}} \quad \text{à partir d'un certain rang.}$$

— *Si* $0 \in \mathrm{I}$, on a

$$\left| v_{n+2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_n} \right| < \mathrm{CH} \qquad \text{(C étant une constante).}$$

— *Si* $0 \notin \mathrm{I}$, on a alors

$$| v_n | \leq \mathrm{CH}.$$

On en déduit alors comme au paragraphe 3 que l'ensemble des suites $\{v_n\}$ est dénombrable, il en est donc de même de l'ensemble des α et de l'ensemble des λ.

THÉORÈME 2. — *Les éléments* $\alpha \in \mathrm{V_I}$, $|\alpha|_p > 1$ *pour* $p \in \mathrm{I}$ *tels qu'il existe un élément inversible* $\lambda \in \mathrm{V_I}$ *tel que, en considérant la décomposition d'Artin de* $\lambda\alpha^n$ *dans* $\mathrm{V_{I'}}$ *(où* $\mathrm{I'} = \mathrm{I} \cup \{p'\}$*),* $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n)$ *ait un nombre fini de points d'accumulation dans* $\mathbf{Z}_{p'}$*, forment un ensemble dénombrable. L'ensemble des* λ *associés est également dénombrable.*

ÉLÉMENTS ALGÉBRIQUES DE CET ENSEMBLE. — Soit θ un élément algébrique de l'ensemble défini ci-dessus et soit

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_0 + a_1\mathrm{X} + \ldots + a_s\mathrm{X}^s \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}]$$

son polynome minimal.

Alors

$$(x\lambda\theta^n)(a_0 + a_1\theta + \ldots + a_s\theta^s) = 0$$

et

$$w_n = a_0 v_n + \ldots + a_s v_{n+s} = -[a_0 \varepsilon'(x\lambda\theta^n) + \ldots + a_s \varepsilon'_s(x\lambda\theta^{n+s})],$$

on peut, alors, obtenir les majorations suivantes des valeurs absolues ordinaires et p-adiques de $w_n \in \mathbf{Z}[\mathrm{I}]$:

$$| w_n |_p \leq 1 \qquad \text{pour} \quad p \neq p' \qquad \text{et} \qquad p \neq 0,$$

$$| w_n |_{p'} \leq \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}^{1+\frac{1}{h}}},$$

$$| w_n | \leq \mathrm{KH} \qquad \text{si} \qquad p' \neq 0 \qquad \text{(K étant une constante).}$$

On a donc

$$\prod_{p \in P} |w_n|_p \leqq CH^{-\frac{1}{h}} < 1$$

si H a été choisi suffisamment grand. Donc $w_n = 0$ à partir d'un certain rang et les v_n vérifient une relation de récurrence à coefficients constants.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n$ représente donc une fraction rationnelle $\frac{A(X)}{Q_1(X)}$, où A et Q appartiennent à $\mathbf{Z}[X]$ et sont premiers entre eux, et $Q_1(X)$ divise le polynome

$$Q(X) \equiv X^s P\left(\frac{1}{X}\right);$$

— *pour* $p \notin I \cup \{p'\}$ $|v_n|_p \leqq 1$ la série converge dans le disque $|X|_p < 1$ de Ω_p, les racines de $Q_1(X)$ vérifient donc $|X|_p \geqq 1$;

— *pour* $p \in I$ et $p \neq p'$:

$$\frac{A(X)}{Q_1(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} x\lambda_p \theta_p^n X^n - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(x\lambda\theta^n) X^n = \frac{x\lambda_p}{1-\theta_p X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(x\lambda\theta^n) X^n,$$

comme $|\varepsilon'_p(x\lambda\theta^n)|_p \leqq 1$, la série converge pour $|X|_p < 1$.

— *Si* $p' \in I$, on a aussi

$$\frac{A(X)}{Q_1(X)} = \frac{x\lambda_{p'}}{1-\theta_{p'} X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_{p'}(x\lambda\theta^n) X^n,$$

il en résulte que θ est racine de $Q_1(X)$ dans V_I, donc si l'on a choisi $P(X)$ primitif :

$$Q_1(X) \equiv q\,Q(X), \qquad \text{où} \quad q \in \mathbf{Z}$$

et il est facile de voir que $q = \prod_{\in I} p^{e_p}$ avec $e_p \in \mathbf{N}$.

D'autre part, les racines de $Q(X)$ dans Ω_p (autres que θ_p si $p \in I$) vérifient $|X|_p \geqq 1$.

Et l'on peut écrire

$$\frac{A(X)}{qQ(X)} = \frac{x\lambda}{1-\theta X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x\lambda\theta^n)^n X \quad \text{dans } V_I,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n,$$

cette égalité étant valable si $1 - \theta X$ est un élément inversible de V_I et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(x\lambda\theta^n) X_p^n$ converge pour tout $X \in V_I$ vérifiant $|X|_p \leqq 1$ pour $p \in I$.

Supposons maintenant que, pour deux valeurs x_1 et x_2 de x, on obtienne deux fractions rationnelles : $\dfrac{A_1(X)}{q_1 Q(X)}$ et $\dfrac{A_2(X)}{q_2 Q(X)}$, alors

$$\frac{A_1(X)}{q_1 Q(X)} = \frac{x_1\lambda}{1-\theta X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x_1\lambda\theta^n)\, X^n,$$

$$\frac{A_2(X)}{q_2 Q(X)} = \frac{x_2\lambda}{1-\theta X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x_2\lambda\theta^n)\, X^n,$$

d'où

$$\frac{q_2 x_2 A_1(X) - q_1 x_1 A_2(X)}{q_1 q_2 Q(X)} = q_2 x_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x_2\lambda\theta^n) - q_1 x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x_1\lambda\theta^n),$$

cette fraction rationnelle n'a donc plus le pôle $\frac{1}{\theta}$ dans V_1, donc $q_2 x_2 A_1(X) - q_1 x_1 A_2(X)$ est divisible par le polynome minimal de $\frac{1}{\theta}$ dans $\mathbf{Z}[X]$, c'est-à-dire par $Q(X)$.

Et si $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de $Q(X)$, alors

$$\frac{A_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{q_1 x_1} = \frac{A_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{q_2 x_2} = \rho(\alpha)$$

et $\rho(\alpha)$ ne dépend donc pas de x, donc de H.

Étudions maintenant les racines de $Q(X)$ dans $\Omega_{p'}$; (nous supposons toujours $p' \neq 0$, car dans le cas $p' = 0$ la démonstration est identique à celle qui a été faite dans le cas réel, *cf.* [7]), alors, puisque $|x|_{p'} = 1$, on a

$$\left|\frac{A\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{q}\right|_{p'} = |\rho(\alpha)|_{p'}.$$

Supposons de plus que $|\alpha|_{p'} = 1$.

Alors

$$Q(X) = (1-\alpha_{p'}X)\, Q_1(X), \qquad \text{où} \quad Q_1\left(\frac{1}{\alpha_{p'}}\right) \neq 0.$$

Posons

$$\frac{A(X)}{q\theta(X)}\, \theta_1(X) = \frac{A(X)}{q(1-\alpha_{p'}X)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n X^n$$

et si a est le degré de $A(X)$:

$$r_n = \alpha_{p'}^{n-a}\, \frac{A\left(\frac{1}{\alpha_{p'}}\right)}{q},$$

d'où $|r_n|_{p'} = |\rho(\alpha)|_{p'}$ ne dépend donc pas de x, donc de H; d'autre part, si l'on pose

$$Q_1(X) = q_0 + q_1 X + \ldots + Q_{s-1} X^{s-1},$$
$$r_n = (q_0 v_n + q_1 v_{n-1} + \ldots + q_{s-1} v_{n-(s-1)}),$$

donc

$$v_n = -[q_0 \varepsilon'_{p'}(x\lambda\theta^n) + \ldots + q_{s-1}\varepsilon'_{p'}(x\lambda\theta^{n-s+1})]$$

et, pour n assez grand :

$$|r_n|_{p'} \leqq \frac{K}{H^{1+\frac{1}{h}}} \qquad \text{(K étant une constante).}$$

Cette inégalité étant incompatible avec l'égalité précédente, il en résulte que $|\alpha|_{p'} \neq 1$, donc les racines de $P(X)$ dans $\mathbf{\Omega}_{p'}$ (autres que $\theta_{p'}$ si $p' \in I$) appartiennent au disque $|X|_{p'} < 1$ et $\theta \in S_I^{p'}$, donc λ appartient à l'anneau $\mathbf{Q}_I[\theta]$ engendré par $\mathbf{Q}e_I$ et l'élément θ.

Théorème 3. — *Si θ est un élément algébrique de V_I, $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$ et si il existe un élément inversible λ de V_I, tel que pour $p' \in P$, $\varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n)$ ait un nombre fini de points d'accumulation dans $\mathbf{Z}_{p'}$ alors $\theta \in S_I^{p'}$ et $\lambda \in Q_I[\theta]$.*

On peut également étendre aux adèles, le théorème suivant de C. Pisot [7].

Si $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 1$ et si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) il existe $\lambda > 1$ tel que si l'on pose

$$\lambda\alpha^n = u_n + \varepsilon_n, \quad u_n \in \mathbf{Z}, \qquad -\frac{1}{2} \leqq \varepsilon_n < \frac{1}{2}.$$

ε_n admet un nombre fini de points d'accumulation;

(b) la convergence de ε_n vers ses points d'accumulation est $o\left(\frac{1}{n^{h+1}}\right)$, h étant le nombre de points d'accumulation irrationnels.

Théorème 4. — *Si $\alpha \in V_I$, $|\alpha|_p > 1$ pour tout $p \in V_I$ et si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) Il existe un élément inversible λ de V_I tel que, si l'on considère la décomposition d'Artin de $\lambda\alpha^n$:

$$\lambda\alpha^n = u_n e_I + \varepsilon(\lambda\alpha^n),$$

$\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n)$ admet un nombre fini de points d'accumulation.

(b) La convergence de $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n)$ vers ses points d'accumulation est $o\left(\frac{1}{n^{h+1}}\right)$, h étant le nombre de points d'accumulation irrationnels.

Alors $\alpha \in S_I^{p'}$ et λ est un élément de l'anneau $Q_I[\alpha]$.

D'après ce qui précède il nous suffit de montrer que α est algébrique. La démonstration repose sur le théorème suivant dû à A. Decomps-Guilloux ([3], [4]) (1).

THÉORÈME A. — *Soit* $\alpha \in V_I$, $|\alpha|_p = p^{t_p}$, $t_p > 0$ *pour* $p \in I^-$, $\alpha_0 > 1$ *si* $p \in I$. *S'il existe* $\lambda \in V_I$, $|\lambda|_p = p^{b_p}$, $b_p > 0$, *pour* $p \in I^-$, *et* $|\lambda_0| > 1$ *si* $0 \in I$, *tel que si l'on pose*

$$\lambda\alpha^n = u_n e_P + \eta(\lambda\alpha^n),$$

où $u_n \in \mathbf{Z}[I]$ *et*

$$|\eta_p(\lambda\alpha^n)| \leqq \varepsilon_p \qquad \textit{pour} \quad p \in P, \textit{ et tout } n \geqq 0,$$

avec la condition

$$\prod_{p\in P} \varepsilon_p < \frac{1}{\psi},$$

où

$$\psi \geqq q^2 e(1 + \operatorname{Log} m) \qquad \text{si} \quad 0 \notin I,$$
$$\psi \geqq 2q^2 \alpha_0(\alpha_0 + 1) e(1 + \operatorname{Log} m) \qquad \text{si} \quad 0 \in I,$$

où l'on a posé

$$q = \prod_{p\in I} p'_p, \qquad m = \prod_{p \in I} |\lambda|_p.$$

Démonstration du théorème 4. — Soient $\omega_1, \ldots, \omega_h$ les points d'accumulation irrationnels de $\varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n)$ qui admet éventuellement, en plus, le point d'accumulation rationnel $\omega_0 = 0$.

a. Si $p' = 0$: Alors, étant donné H, il existe des entiers (x, y_j) tels que

$$0 < x < H^h$$

et

$$|x\omega_j - y_j| \leqq \frac{1}{H},$$

alors

$$x\lambda_0\alpha_0^n = xu_n + x\varepsilon_0(\lambda\alpha^n) \qquad (\alpha_0 = 0 \text{ si } p \notin I)$$
$$= xu_n + x\omega_j + x\varepsilon_n \qquad (j = 1, \ldots, h),$$

où

$$\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{h}}}\right),$$

d'où

$$x\lambda_0\alpha_0^n = xu_n + y_j + \eta_j + x\varepsilon_n,$$

avec

$$|\eta_j| \leqq \frac{1}{H}.$$

(1) Il est, en effet, très facile de voir que la démonstration de A. Decomps-Guilloux s'applique au cas où sans être nécessairement une décomposition d'Artin, la décomposition est du type indiqué.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} x\lambda\alpha^n &= (xu_n + y_j)\, e_{\mathrm{P}} + x\varepsilon(\lambda\alpha^n) - y_j e_{\mathrm{P}} \\ &= v_n e_{\mathrm{P}} + \eta(\lambda\alpha^n), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} v_n &= xu_n + y_j \in \mathbf{Z}[\mathrm{I}], \\ \eta(x\lambda\alpha^n) &= x\varepsilon(\lambda\alpha^n) - y_j e_{\mathrm{P}} \end{aligned}$$

vérifie les inégalités

$$|\eta(x\lambda\alpha^n)|_p \leq 1 \qquad (p \neq 0)$$

$$|\eta(x\lambda\alpha^n)| \leq \frac{1}{\mathrm{H}} + \mathrm{H}^h |\varepsilon_n|;$$

posons maintenant

$$\beta = q^2 e \hat{\alpha} \operatorname{Log} q,$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 1 && \text{si} \quad 0 \notin \mathrm{I} \\ \hat{\alpha} &= 2\alpha_0(\alpha_0 + 1) && \text{si} \quad 0 \in \mathrm{I}, \end{aligned}$$

et soit b un entier vérifiant

$$b > 4\beta.$$

Alors, on peut trouver un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{(bn_0)^{h+1}},$$

$$|x\lambda\alpha^{n_0}|_p > 1, \qquad \forall p \in \mathrm{I} \quad \text{et} \quad \forall x \leq (bn_0)^h \quad (x \in \mathbf{N})$$

$$q^{n_0} > em(bn_0)^h$$

et si l'on prend

$$\mathrm{H} = bn_0,$$

on peut trouver $x \leq (bn_0)^h$ tel que

$$|\eta(x\lambda\alpha^n)| < \frac{2}{bn_0},$$

or

$$\frac{1}{2} bn_0 > q^2 e\hat{\alpha} . 2n_0 \operatorname{Log} q,$$

donc

$$\frac{1}{2} bn_0 > q^2 e\hat{\alpha}(1 + \operatorname{Log} q + \operatorname{Log} mx)$$

et en posant $\lambda' = \lambda x\alpha^{n_0}$ on peut appliquer le théorème A à la suite $\{\lambda'\alpha^n\}$, α est donc algébrique et, d'après le théorème 3, $\alpha \in \mathrm{S}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{P}}$ et $\lambda \in \mathbf{Q}_{\mathrm{I}}[\alpha]$.

b. Si $p' \neq 0$: En reprenant les mêmes notations que lors de la démonstration du théorème 3, on obtient l'inégalité

$$\prod_{p \in \mathrm{P}} |\eta(x\lambda\alpha^n)|_p \leq \mathrm{CH}^{-\frac{1}{h}}.$$

et la suite de la démonstration est analogue à la précédente, si H vérifie

$$[b(n_0-1)]^h < H \leq (bn_0)^h$$

puisqu'une telle inégalité peut être vérifiée pour des valeurs de n_0 suffisamment grandes.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Emil ARTIN, *Algebraic numbers and algebraic functions*, New York and Princeton University, 1950-1951 (multigraphié).

[2] Françoise BERTRANDIAS, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques* [*Bull. Soc. math. France*, Mémoire 4, 1965 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1965)].

[3] Annette DECOMPS-GUILLOUX, *Ensembles d'éléments algébriques dans les adèles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 261, 1965, p. 1929-1931).

[4] Annette DECOMPS-GUILLOUX, *Répartition modulo* 1 *de* $\lambda\alpha^n$ *dans les adèles*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 7e année, 1965-1966, nº 5.

[5] Élisabeth LUTZ, *Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques*, Paris, Hermann, 1955 (*Act. scient. et ind.*, 1224; *Publ. Inst. math. Univ.*, Strasbourg, 12).

[6] Charles PISOT, *La répartition modulo* 1 *et les nombres algébriques* (*Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248).

[7] Charles PISOT, *Répartition* (mod 1) *des puissances successives des nombres réels* (*Comment. Math. Helvet.*, t. 19, 1946, p. 153-160).