FRANÇOIS DRESS

Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 1, nº 1 (1968), p. 1-44
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_1_1_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 1, 1968, p. 1 à 44.

FAMILLES DE SÉRIES FORMELLES ET ENSEMBLES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

PAR FRANÇOIS DRESS (*).

TABLE DES MATIÈRES.

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1967.

INTRODUCTION.

Ce travail a pour origine l'étude, effectuée par M. Pisot, de certaines familles de fractions rationnelles [14]. Il apparaît que plusieurs propriétés arithmétiques de ces fractions rationnelles s'expriment simplement et se prêtent à des généralisations si on les considère comme propriétés de séries formelles.

Dans une première partie, nous exposons donc un certain nombre de résultats relatifs aux séries formelles qui sont quotients de deux séries formelles à coefficients dans un anneau commutatif intègre A :

$$F(X) = a_0 + a_1 X + \ldots = \frac{u_0 + u_1 X + \ldots}{v_0 + v_1 X + \ldots}.$$

Nous donnons notamment, en fonction des coefficients u_i et v_j, une expression des déterminants de Hankel de la série F(X); cette expression nous permet de démontrer une propriété arithmétique de ces déterminants, généralisant la propriété triviale

$$a_n = \frac{N_n}{v_0^{n+1}}, \qquad N_n \in A.$$

Nous classons ensuite ces séries en familles : étant donné $q \in A$, nous désignons par Φ_q la famille des séries $F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$ telles que $v_0 = V(o) = q$. Le résultat principal de cette partie que nous montrons alors est que, pour certains types d'anneaux, les familles Φ_q sont fermées pour la topologie X-adique.

Nous donnons enfin quelques développements relatifs à des sous-familles des familles Φ_q.

Dans une seconde partie, nous étudions les propriétés des fractions rationnelles, qui, considérées comme quotients de séries formelles, appartiennent à une famille Φ_q. Nous obtenons, en particulier, une généralisation du lemme de Fatou sur les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbf{Z}$ [9].

Utilisant alors, outre ce résultat, certains de ceux démontrés dans la première partie, il nous est possible d'étendre le résultat de M. Pisot, qui exprimait que certaines familles de fractions rationnelles (caractérisées par la structure de leurs pôles ainsi que par des propriétés arithmétiques de leur expression) sont compactes. Cela nous permet enfin de montrer que certains ensembles de nombres algébriques, généralisant l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan, sont fermés.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([6], [7]).

PREMIÈRE PARTIE.

FAMILLES DE SÉRIES FORMELLES.

CHAPITRE I.

Produits et quotients de séries formelles. Déterminants associés.

1. Généralités et définitions. — Dans toute cette partie, A désignera un anneau commutatif, possédant un élément unité, intègre (sauf dans la proposition 1), et K son corps des fractions. Les éléments de A seront appelés entiers.

Outre les anneaux et corps classiques de polynômes, fractions rationnelles et séries formelles sur A et K, nous utiliserons les deux anneaux :

$\mathcal{A}$: anneau de séries formelles généralisées,

$$\mathcal{A} = \left\{ F(X) = \sum_{m}^{\infty} a_k X^k \;\middle|\; a_k \in A,\ m \in \mathbf{Z} \right\},$$

soit, si S est la partie multiplicative $\{X^n \mid n \geq 0\}$,

$$\mathcal{A} = S^{-1} A[[X]],$$

et :

$\mathcal{Q}$: anneau des quotients de séries formelles,

$$\mathcal{Q} = \left\{ F(X) = \frac{U(X)}{V(X)} \;\middle|\; U,\ V \in A[[X]],\ V(0) \neq 0 \right\},$$

ainsi que les deux corps :

$\mathcal{K}$: corps des fractions de A[[X]],

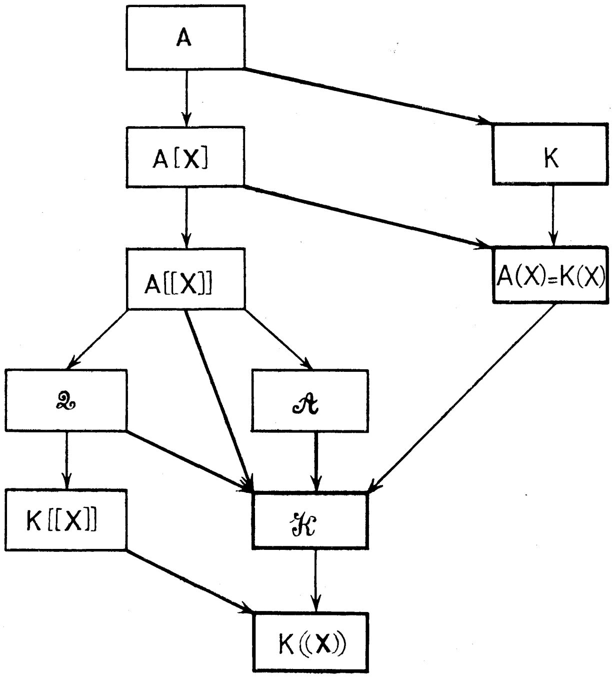
$$\mathcal{K} = S^{-1}\mathcal{Q},$$

et :

K((X)) : corps des séries formelles généralisées,

$$K((X)) = \left\{ F(X) = \sum_{m}^{\infty} a_k X^k \;\middle|\; a_k \in K,\ m \in \mathbf{Z} \right\} = S^{-1} K[[X]].$$

Le tableau ci-dessous rappelle les relations que ces différents anneaux et corps ont entre eux ($\rightarrow$ signifie l'inclusion, $\twoheadrightarrow$ signifie l'inclusion dans le corps des fractions).



Déterminants. — Étant donnée $F(X) = \sum_{0}^{\infty} a_k X^k$ une série formelle de A[[X]] ou de K[[X]], nous considérerons ses déterminants de Hankel :

$$H_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_m & \cdots & a_{m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m+p} & \cdots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

ainsi que d'autres déterminants plus généraux, introduits par J. Hadamard [12] :

$$D_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_0 & \dots & a_p \\ . & \dots & .. & \dots & .. \\ a_0 & \dots & a_m & \dots & a_{m+p} \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_p & \dots & a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

et

$$D_{m_0, m_1, \dots, m_p}^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_{m_0} & a_{m_1} & \dots & a_{m_p} \\ a_{m_0+1} & a_{m_1+1} & \dots & a_{m_p+1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m_0+p} & a_{m_1+p} & \dots & a_{m_p+p} \end{vmatrix}.$$

En étendant aux séries du corps $K((X))$ la définition de ces déterminants, il apparaît que, lorsque $F(X) \in K[[X]]$, $a_{-m} = \dots = a_{-1} = 0$, et donc

$$D_m^{(p)}(F) = H_{-m}^{(m+p)}(F).$$

Les déterminants $D_m^{(p)}$ peuvent donc être considérés comme des déterminants de Hankel, et nous réserverons l'appellation de déterminants de Hadamard aux $D_{m_0, m_1, \dots, m_p}^{(p)}$.

2. Déterminants des produits et quotients de séries. — Nous abandonnons provisoirement l'hypothèse de l'intégrité de l'anneau A.

Considérons deux séries de $A[[X]]$ et leur produit :

$$V(X) = \sum_0^\infty v_k X^k, \qquad F(X) = \sum_0^\infty a_k X^k, \qquad VF = U(X) = \sum_0^\infty u_k X^k.$$

Nous supposerons que les indices m_i sont ordonnés en croissant, de sorte que $m_p + p$ est le plus grand indice des éléments du déterminant de Hadamard que nous allons étudier.

Nous nous proposons de calculer le produit

$$v_0^{m_p+p+1} D_{m_0, m_1, \dots, m_p}^{(p)}(F),$$

que nous écrirons sous la forme

$$\begin{vmatrix} v_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_1 & v_0 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & \dots & . & . \\ .. & .. & \dots & . & . \\ v_{m_p+p-1} & v_{m_p+p-2} & \dots & v_0 & 0 \\ v_{m_p+p} & v_{m_p+p-1} & \dots & v_1 & v_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ . & \dots & . & . & \dots & .. \\ 0 & \dots & 1 & a_{m_0-1} & \dots & a_{m_p-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m_0} & \dots & a_{m_p} \\ . & \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{m_0+p} & \dots & a_{m_p+p} \end{vmatrix}.$$

Si maintenant nous effectuons (lignes par colonnes) ce produit de déterminants, et si nous tenons compte des relations qui expriment que $V(X)\,F(X) = U(X)$, soient

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
v_0 a_0 & = u_0, \\
v_1 a_0 + v_0 a_1 & = u_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & , \\
v_{m_p+p} a_0 + v_{m_p+p-1} a_1 + \ldots + v_0 a_{m_p+p} & = u_{m_p},
\end{array}
\right.
$$

il vient

$$
v_0^{m_p+p+1} D^{(p)}_{m_0,\ldots,m_p}(F) = \begin{vmatrix}
v_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & u_0 \\
v_1 & v_0 & \ldots & 0 & . & \ldots & u_1 \\
.. & .. & \ldots & . & u_0 & \ldots & .. \\
.. & .. & \ldots & v_0 & .. & \ldots & .. \\
.. & .. & \ldots & .. & u_{m_0} & \ldots & u_{m_p} \\
.. & .. & \ldots & .. & \ldots & \ldots & \ldots \\
v_{m_p+p} & v_{m_p+p-1} & \ldots & v_{p+1} & u_{m_0+p} & \ldots & u_{m_p+p}
\end{vmatrix}
$$

déterminant dont m_p colonnes sont formées de coefficients de $V(X)$, avec une structure régulièrement décalée, et les $p+1$ autres colonnes de coefficients de $U(X)$ avec une structure analogue à celle du déterminant de Hadamard $D^{(p)}_{m_0, m_1, \ldots, m_p}(F)$. Si nous désignons par

$$N^{(p)}_{m_0, m_1, \ldots, m_p}(U, V)$$

le « grand » déterminant obtenu ci-dessus, nous pouvons énoncer :

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau* (*non nécessairement intègre*) *et* $U(X)$, $V(X)$, $F(X)$ *trois séries de* $A[[X]]$ *telles que* $V(X)\ F(X) = U(X)$. *On a alors*

$$v_0^{m_p+p+1} D^{(p)}_{m_0,\ldots,m_p}(F) = N^{(p)}_{m_0,\ldots,m_p}(U, V).$$

(Remarquons que cette identité est triviale lorsque $v_0 = 0$.)

Comme, par la suite, nous nous placerons exclusivement dans le cas où A est intègre, nous donnons une seconde version sous laquelle nous utiliserons cette proposition :

Proposition 1 *bis*. — *Soient* $U(X)$ *et* $V(X)$ *deux séries de* $K[[X]]$, *avec* $v_0 = V(0) \neq 0$. *On a alors*

$$D^{(p)}_{m_0,\ldots,m_p}\left(\frac{U(X)}{V(X)}\right) = v_0^{-(m_p+p+1)} N^{(p)}_{m_0,\ldots,m_p}(U, V).$$

3. Applications. — Nous rappellerons brièvement, dans ce paragraphe, un certain nombre de résultats qu'on peut retrouver très rapidement à l'aide de la proposition 1 *bis*.

Caractérisation des fractions rationnelles. — Si $U(X)$ et $V(X)$ sont des polynômes de degrés respectifs λ et μ, alors les déterminants de Hankel $H_m^{(p)}$ de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$ sont nuls dès que $m+p \geqq \lambda + 1$ et $p \geqq \mu$ (en effet, la dernière ligne du déterminant $N_m^{(p)}$ est alors formée de zéros). Cependant, notre identité ne permet pas d'obtenir de démonstration de la réciproque.

Déterminants relatifs à l'inverse d'une série. — Si $G(X) = \frac{1}{F(X)}$, avec $F = \frac{U}{V}$ et $G = \frac{V}{U}$, les déterminants de Hankel de F et de G sont liés par la relation (J. Hadamard [12], É. Borel [2]) :

$$H_m^{(p)}(G) = \pm \left(\frac{v_0}{u_0}\right)^{m+2p+1} H_{2-m}^{(m+p-1)}(F)$$

(en effet, les déterminants N sont les mêmes à un certain nombre près de permutations entre les colonnes des u_i et des v_j).

Quotients de séries à coefficients entiers. — Si $U(X)$ et $V(X)$ appartiennent à $A[[X]]$, les coefficients du quotient $F(X)$ sont de la forme $a_n = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}$, et l'on a

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{m+2p+1}}$$

(cela résulte immédiatement du fait que le déterminant $N_m^{(p)}$ est un entier). Cette propriété arithmétique avait été démontrée dans le cas $A = \mathbf{Z}$ (F. Dress [5]) et possède des applications importantes (C. Pisot [14]). Nous nous étendrons d'ailleurs sur cette question au paragraphe suivant, avec l'introduction des familles Φ_q.

Fonctions à caractéristique bornée. — Si $F(z)$, série entière de la variable complexe z, est à caractéristique bornée à l'intérieur du cercle unité [i. e. $F(z)$ est quotient de deux fonctions bornées dans $|z| < 1$] ou, un peu plus généralement, si $F(z)$ est quotient de deux séries entières $U(z)$ et $V(z)$ telles que $\sum_0^\infty |u_n|^2 < \infty$ et $\sum_0^\infty |v_n|^2 < \infty$, on a alors (D. Cantor [4]) :

$$\lim_{p \to \infty} |K_p(F)|^{\frac{1}{p}} = 0,$$

où les $K_p = H_0^{(p)}$ sont les déterminants de Kronecker de F.

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'écrire que

$$K_p = H_0^{(p)} = v_0^{-(2p+1)} N_0^{(p)},$$

où

$$\mathrm{N}_0^{(p)} = \begin{vmatrix} v_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & u_0 \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdots & v_0 & \cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdots & v_1 & u_0 & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ v_{k+p} & \cdots & v_{k+1} & u_k & \cdots & u_{k+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ v_{2p} & \cdots & v_{p+1} & u_p & \cdots & u_{2p} \end{vmatrix},$$

puis d'appliquer la majoration d'Hadamard à $\mathrm{N}_0^{(p)}$ suivant ses lignes. Cette majoration s'effectue aisément en remarquant que, d'une part, les premières sommes $\sum |u_n|^2 + \sum |v_n|^2$ sont bornées et que, d'autre part, les dernières sommes $\sum_k^{k+p} |u_n|^2 + \sum_{k+1}^{k+p} |v_n|^2$ sont majorées par $\varepsilon(k)$, qui tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini.

Remarque 1. — On a, bien évidemment, le même résultat pour n'importe quel déterminant de Hankel :

$$\lim_{p \to \infty} |\mathrm{H}_m^{(p)}(\mathrm{F})|^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Remarque 2. — Il est possible d'obtenir la même conclusion :

$$\lim_{p \to \infty} |\mathrm{K}_p(\mathrm{F})|^{\frac{1}{p}} = 0,$$

lorsque les séries $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ ne convergent pas, à la condition toutefois que leurs termes décroissent assez rapidement mais surtout assez régulièrement. Ainsi, par exemple, lorsque

$$u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}}\right).$$

Sans donner la démonstration complète, précisons qu'elle repose également sur la majoration d'Hadamard, la croissance des premiers termes :

$$\mathrm{L}_k^2 = \sum_k^{k+p} |u_n|^2 + \sum_{k+1}^{k+p} |v_n|^2$$

étant compensée par une décroissance suffisante des derniers.

4. Familles Φ_q. — Nous classerons les éléments de l'anneau $\mathfrak{Q}$ des quotients de séries formelles de A[[X]] de la manière suivante :

Définition. — Étant donné un entier q non nul, nous désignerons par Φ_q la famille des séries $F(X) \in \mathfrak{L}$ qui possèdent une expression

$$F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}, \qquad \text{où} \quad U(X), V(X) \in A[[X]],$$

telle que $v_0 = V(0) = q$.

Il est clair que :

— si q_1 et q_2 sont associés, $\Phi_{q_1} = \Phi_{q_2}$;

— $\Phi_1 = A[[X]]$;

— si q' est un diviseur de q, $\Phi_{q'} \subset \Phi_q$.

Cette dernière remarque montre que $\Phi_1 \subset \Phi_q$ quel que soit l'entier q, relation que nous compléterons par l'égalité

$$\Phi_1 = \bigcap_{\substack{q \in A \\ q \neq 0}} \Phi_q$$

qui est une conséquence du résultat suivant : si q_1 et q_2 sont étrangers (i. e. si $q_1 A + q_2 A = A$), alors $\Phi_{q_1} \cap \Phi_{q_2} = \Phi_1$. Soit en effet

$$F(X) = \frac{U_1(X)}{V_1(X)} = \frac{U_2(X)}{V_2(X)}, \qquad \text{avec} \quad V_1(0) = q_1 \qquad \text{et} \qquad V_2(0) = q_2.$$

Comme q_1 et q_2 sont étrangers, il existe deux entiers a_1 et a_2 tels $a_1 q_1 + a_2 q_2 = 1$, et alors $F(X) = \dfrac{a_1 U_1(X) + a_2 U_2(X)}{a_1 V_1(X) + a_2 V_2(X)}$ appartient à Φ_1, car $(a_1 V_1 + a_2 V_2)(0) = 1$.

Propriété fondamentale. — Si $F(X) \in \Phi_q$, ses déterminants de Hankel sont de la forme

$$H_m^{(p)} = \frac{N_m^{(p)}}{q^{m+2p+1}}, \qquad \text{avec } N_m^{(p)} \text{ entier.}$$

[c'est une conséquence triviale, ainsi que nous l'avions remarqué au paragraphe précédent, de l'expression du déterminant $N_m^{(p)}(U, V)$].

Il se pose alors le problème de savoir à quelles conditions portant sur ses coefficients et ses déterminants de Hankel une série $F(X) \in K[[X]]$ appartient à une famille Φ_q. Il apparaîtra malaisé d'établir un critère général, mais nous donnerons néanmoins des conditions nécessaires et suffisantes pour que $F(X)$ appartienne à Φ_q, conditions valables seulement dans une certaine « proportion » des éventualités possibles.

Nous nous donnons donc $F(X) = \sum_0^\infty a_k X^k$, dont nous posons, *a priori*, que les coefficients sont de la forme

$$a_k = \frac{N_k}{q^{k+1}} \qquad (N_k \text{ entier}).$$

Supposons alors que nous ayons déterminé $2n$ éléments de A,

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{n-1}; \qquad v_0 = q, \quad v_1, \quad \ldots, \quad v_{n-1},$$

tels que

$$\frac{u_0 + u_1 X + \ldots + u_{n-1} X^{n-1}}{v_0 + v_1 X + \ldots + v_{n-1} X^{n-1}} = \sum_0^\infty \alpha_k X^k, \qquad \text{avec} \quad \alpha_k = a_k \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq n-1.$$

Nous allons établir une condition suffisante pour affirmer qu'il existe deux éléments de A, u_n et v_n, tels que

$$\frac{u_0 + u_1 X + \ldots + u_{n-1} X^{n-1} + u_n X^n}{v_0 + v_1 X + \ldots + v_{n-1} X^{n-1} + v_n X^n} = B_{u_n, v_n}(X) = \sum_0^\infty \beta_k X^k,$$

avec

$$\beta_k = a_k \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq n.$$

Et si cette condition est vérifiée pour toutes les valeurs de n, nous aurons alors démontré que $F(X)$ appartient à Φ_q.

La relation

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{n-j} v_j = u_n$$

donne l'expression

$$v_0 \beta_n = u_n - \beta_0 v_n + \frac{M_n}{v_0^n},$$

soit encore

$$\beta_n = \frac{M_n + v_0^{n-1}(v_0 u_n - u_0 v_n)}{v_0^{n+1}},$$

où M_n est un entier qui ne dépend que des u_i et v_j jusqu'à l'ordre $n-1$. Il apparaît alors une condition suffisante pour que u_n et v_n existent :

u_0 et v_0 sont étrangers (i. e. $u_0 A + v_0 A = A$, et alors u_0 et v_0 satisfont à une identité de Bezout);

v_0^{n-1} divise $M_n - N_n$.

Nous supposerons à partir de maintenant que l'anneau A est principal et que $(u_0, v_0) = 1$, de manière à réaliser la première partie de cette condition (la restriction que nous effectuons ainsi n'est pas essentielle, mais nous n'aurons pas besoin de sortir du cas principal).

Il nous reste alors à traduire $v_0^{n-1} \mid M_n - N_n$ en condition sur les déterminants de Hankel de $F(X)$.

Pour cela, considérons les deux déterminants

$$H_{n-2p}^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} & a_{n-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-p} & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} & a_{n-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-p} & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + a_n \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

et

$$H_{n-2p}^{(p)}(B) = \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} & a_{n-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-p} & \cdots & a_{n-1} & \beta_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} & a_{n-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-p} & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + \beta_n \begin{vmatrix} a_{n-2p} & \cdots & a_{n-p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p-1} & \cdots & a_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Nous en déduisons alors

$$\begin{aligned} H_{n-2p}^{(p)}(F) - H_{n-2p}^{(p)}(B) &= (a_n - \beta_n)\, H_{n-2p}^{(p-1)}(F) \\ &= \frac{N_n - M_n}{v_0^{n+1}}\, H_{n-2p}^{(p-1)}(F) - \frac{v_0^{n-1}(v_0 u_n - u_0 v_n)}{v_0^{n+1}}\, H_{n-2p}^{(p-1)}(F) \end{aligned}$$

en utilisant l'expression de β_n que nous avons calculée. Mais nous avons supposé au début de cette étude que les coefficients u_i et v_j avaient pu être déterminés jusqu'à l'ordre $n-1$, de sorte que

$$H_{n-2p}^{(p-1)}(F) = \frac{N_{n-2p}^{(p-1)}}{v_0^{n-1}} = \frac{\text{entier}}{v_0^{n-1}};$$

de plus, par construction de $B = B_{u_n, v_n}$, nous avons

$$H_{n-2p}^{(p)}(B) = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}.$$

Si nous ajoutons maintenant l'hypothèse

$$H_{n-2p}^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}},$$

il vient

$$\frac{N_n - M_n}{v_0^{n+1}}\, H_{n-2p}^{(p-1)}(F) = \frac{N_n - M_n}{v_0^{n+1}}\, \frac{N_{n-2p}^{(p-1)}}{v_0^{n-1}} = \frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}.$$

Cela nous permet d'énoncer : pour que v_0^{n-1} divise $M_n - N_n$, il suffit qu'il existe un couple de déterminants de Hankel de $F(X)$ qui soient de la forme suivante :

$$H_{n-2p}^{(p-1)}(F)=\frac{N_{n-2p}^{(p-1)}(F)}{v_0^{n-1}} \qquad \text{avec} \quad N_{n-2p}^{(p-1)}=\text{entier} \qquad \text{et} \qquad (N_{n-2p}^{(p-1)}, v_0)=1;$$

$$H_{n-2p}^{(p)}(F)=\frac{N_{n-2p}^{(p)}(F)}{v_0^{n+1}} \qquad \text{avec} \quad N_{n-2p}^{(p)}=\text{entier}.$$

Mais, en raison de l'hypothèse que nous avons faite $(u_0, v_0)=1$, nous connaissons un déterminant $H_{n-2p}^{(p-1)}(F)$ convenable pour chaque n, celui correspondant à $p=n-1$:

$$H_{-n+2}^{(n-2)}=\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_0 \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot \\ a_0 & \dots & a_{n-2} \end{vmatrix}=\pm a_0^{n-1}=\frac{\pm u_0^{n-1}}{v_0^{n-1}};$$

et il ne reste plus à vérifier que la condition portant sur le déterminant $H_{n-2p}^{(p)}(F)$.

Proposition 2. — *L'anneau* A *étant supposé principal, soit* $F(X)=\sum_0^\infty a_k X^k$ *une série de* $K[[X]]$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $F(X)$ *appartienne à la famille* Φ_q, *dans le cas particulier où* $a_0=\frac{u_0}{q}$, *avec* $(u_0, q)=1$, *est que :*

1° $$a_n=\frac{\text{entier}}{q^{n+1}},$$

2° $$H_{-n+2}^{(n-1)}=\begin{vmatrix} 0 & \dots & a_0 & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_0 & \dots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_1 & \dots & \cdot\cdot & a_n \end{vmatrix}=\frac{\text{entier}}{q^{n+1}}.$$

Ce déterminant $H_{-n+2}^{(n-1)}(F)$ peut paraître lourd à manier et pratiquement inutilisable. En fait, il a une signification très simple. Posons $\frac{1}{F(X)}=\sum_0^\infty c_k X^k$. D'après la remarque faite au paragraphe 3, sur les déterminants de Hankel de l'inverse de $F(X)$, nous avons

$$H_{-n+2}^{(n-1)}(F)=\pm\left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{n+1} H_n^{(0)}\left(\frac{1}{F}\right)=\pm\left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{n+1} c_n.$$

Nous constatons alors que la condition

$$H_{-n+2}^{(n-1)}(F)=\frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}}$$

équivaut à

$$u_0^{n+1} c_n=\text{entier},$$

et nous pouvons donc donner une seconde forme de la proposition 2 :

PROPOSITION 2 *bis*. — *L'anneau* A *étant supposé principal, soit* $F(X)=\sum_0^\infty a_k X^k$ *une série de* $K[[X]]$; *posons* $\frac{1}{F(X)}=\sum_0^\infty c_k X^k$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $F(X)$ *appartienne à la famille* Φ_{v_0}, *dans le cas particulier où* $a_0=\frac{u_0}{v_0}$, *avec* $(u_0, v_0)=1$, *est que :*

1° $$a_n=\frac{\text{entier}}{v_0^{n+1}} \quad \text{pour tout } n;$$

2° $$c_n=\frac{\text{entier}}{u_0^{n+1}} \quad \text{pour tout } n.$$

Une question ouverte est de savoir si ce critère ne serait pas général, sans la restriction $(u_0, v_0)=1$, et peut-être pour des anneaux moins particuliers que les anneaux principaux.

Nous donnerons enfin une autre condition d'appartenance à la famille Φ_q, plus particularisée que les propositions 2, mais très simple à vérifier.

PROPOSITION 3. — *L'anneau* A *étant toujours principal, une condition nécessaire et suffisante pour que* $F(X)$ *appartienne à la famille* Φ_q, *dans le cas particulier où* $a_0=\frac{N_0}{q}$, $a_1=\frac{N_1}{q^2}$, *avec* $(N_0, q)=(N_1, q)=1$, *est que :*

1° $$a_n=\frac{\text{entier}}{q^{n+1}};$$

2° $$H_{n-2}^{(1)}=\begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=\frac{\text{entier}}{q^{n+1}}.$$

Démonstration. — Nous remarquerons d'abord que la condition $H_{n-2}^{(1)}=\frac{\text{entier}}{q^{n+1}}$ peut encore s'écrire

$$q^{n-1} \text{ divise } \begin{vmatrix} N_{n-2} & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_n \end{vmatrix},$$

d'où nous déduisons immédiatement, par récurrence, que, si

$$(N_0, q)=(N_1, q)=1,$$

nous avons $(N_n, q)=1$ pour tout $n\geq 0$. Dès lors, nous sommes assurés de l'existence du déterminant $H_{n-2p}^{(p-1)}(F)$ vérifiant $(N_{n-2p}^{(p-1)}, q)=1$, qui est ici celui correspondant à $p=1$, soit a_{n-2}, qui vérifie bien $(N_{n-2}, q)=1$.

Remarque 1. — $(N_0, q)=(N_1, q)=1$ équivaut à $(u_0 v_1, q)=1$ dans l'expression

$$F(X)=\frac{u_0+u_1X+\ldots}{q+v_1X+\ldots}.$$

Remarque 2. — Si un seul des N_n n'est pas premier avec q, alors que N_0 et N_1 le sont, on peut être sûr que $F(X)$ n'appartient pas à la famille Φ_q.

CHAPITRE II.

FAMILLES DE SÉRIES DÉFINIES A PARTIR D'UN ANNEAU EUCLIDIEN.

5. LEMME DE RÉCURRENCE ET APPLICATIONS. — Dans ce chapitre, et sauf spécification contraire, nous supposerons que l'anneau A est euclidien. Nous noterons comme une valeur absolue : $|a| = \varphi(a)$, le stathme euclidien de A $[a = bq + r$, avec $\varphi(r) < \varphi(b)]$.

Afin d'éviter toute confusion, les notations astérisquées ($A^\star$, ..., $U^\star$, ...) seront exclusivement réservées aux polynômes (à coefficients entiers).

LEMME 1. — *Si* F(X), *appartenant à la famille* Φ_q, *est à coefficients non tous entiers* ($F \notin \Phi_1$), *on peut toujours l'écrire sous la forme*

$$F(X) = P^\star(X) + \frac{X^\lambda}{G(X)},$$

où $P^\star(X)$ *est un polynôme à coefficients entiers,* λ *un entier naturel* $\geqq 0$, *et où* $G(X)$ *appartient à une famille* $\Phi_{q'}$, *vérifiant* $|q'| < |q|$ $(q' \neq 0)$.

Si une expression de F(X) *était* $F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$, *avec* $V(0) = q$, *alors* G(X) *possède l'expression* $G(X) = \frac{V(X)}{W(X)}$, *avec* $V(0) = q$, $W(0) = q'$.

Démonstration. — Si $F(X) \notin \Phi_1$, il existe alors un indice λ fini $(\lambda \geqq 0)$ tel que

$$F(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{\lambda-1} X^{\lambda-1} + a_\lambda X^\lambda + \ldots,$$

avec les coefficients a_j entiers pour $0 \leqq j \leqq \lambda - 1$ (et donc aucun a_j entier si $\lambda = 0$), et le coefficient a_λ non entier. Utilisons l'expression de F(X) dans Φ_q et effectuons le produit $V(X)F(X) = U(X)$. L'identification des coefficients montre que qa_λ est entier; il est donc possible de poser, en effectuant la division euclidienne de qa_λ par q :

$$a_\lambda = a'_\lambda + \frac{q'}{q}, \qquad \text{avec } a'_\lambda \text{ entier et } |q'| < |q| \qquad (q' \neq 0).$$

Nous mettons alors en évidence le polynôme à coefficients entiers :

$$P^\star(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{\lambda-1} X^{\lambda-1} + a'_\lambda X^\lambda,$$

et nous obtenons

$$F(X) = \frac{U(X)}{V(X)} = P^\star(X) + X^\lambda\left(\frac{q'}{q} + \ldots\right).$$

Or nous avons $U(X) - P^\star(X)\,V(X) = X^\lambda W(X)$, $W(X)$ étant une série à coefficients entiers, de sorte que nous pouvons écrire

$$F(X) = P^\star(X) + X^\lambda \frac{W(X)}{V(X)},$$

ce qui termine la démonstration, car $\dfrac{W(0)}{V(0)} = \dfrac{q'}{q}$ entraîne $W(0) = q'$, et comme $|q'| < |q|$, l'inverse $G(X) = \dfrac{V(X)}{W(X)}$ appartient bien à une famille $\Phi_{q'}$, qui vérifie les conditions du lemme.

Corollaire. — *Si* $F(X) \in \Phi_q$, *il existe une transformation homographique à coefficients* $A^\star$, $B^\star$, $C^\star$, $D^\star$ *dans* $A[X]$ (avec $A^\star D^\star - B^\star C^\star \neq 0$) *telle que*

$$\frac{A^\star F + B^\star}{C^\star F + D^\star} \quad \textit{appartienne à} \quad \Phi_1 = A[[X]].$$

Démonstration. — D'après le lemme 1, $G(X)$ s'obtient à partir de $F(X)$ au moyen d'une transformation homographique à coefficients polynômiaux de déterminant non nul. Mais ces transformations forment un groupe, de sorte qu'il faut montrer qu'il suffit d'un nombre fini d'applications du lemme 1 pour aboutir à une série de Φ_1. Ce qui est trivial, car les « valeurs absolues » des entiers (de A) étant les entiers naturels de **N**, la chaîne descendante $|q|, |q'|, \ldots$ est finie, cela résulte de la double condition $|q'| < |q|$, $q' \neq 0$.

Remarque 1. — Ce corollaire peut encore s'écrire

$$\exists f \in A[[X]], \qquad \exists A^\star, B^\star, C^\star, D^\star \in A[X],$$

tels que

$$F = \frac{D^\star f - B^\star}{A^\star - C^\star f}.$$

Appelant alors $\mathbf{G}$ le groupe des transformations homographiques à coefficients $A^\star$, $B^\star$, $C^\star$, $D^\star$ dans $A[X]$, nous voyons que nous avons établi que

$$\mathcal{Q} \subset \mathbf{G}(A[[X]]).$$

Nous pouvons alors nous demander si l'égalité a lieu. Elle a « presque » lieu, en ce sens qu'au lieu de $\mathcal{Q}$, c'est $\mathcal{K} = S^{-1}\mathcal{Q}$, le corps des fractions de $A[[X]]$, qu'il faut considérer. Toute série $F \in \mathcal{K}$ pouvant s'écrire $F = X^{-k}F'$, $F' \in \mathcal{Q}$, l'inclusion ci-dessus entraîne aussi bien

$$\mathcal{K} \subset \mathbf{G}(A[[X]]).$$

Et comme l'inclusion inverse

$$\mathbf{G}(A[[X]]) \subset \mathcal{K}$$

est triviale, l'égalité a bien lieu.

Sans pouvoir préciser la validité exacte de cette égalité, nous pouvons cependant l'étendre aux anneaux principaux :

PROPOSITION 4. — *Soit* A *un anneau principal et désignons par* **G** *le groupe des transformations homographiques à coefficients polynômiaux. On a alors*

$$\mathbf{G}(A[[X]]) = \mathcal{K}.$$

Démonstration. — Il nous suffira de montrer, comme précédemment, que

$$\mathcal{Q} \subset \mathbf{G}(A[[X]]),$$

c'est-à-dire que

$$\forall\, F \in \mathcal{Q}, \qquad \exists\, \gamma \in \mathbf{G} \text{ telle que } \gamma(F) \in A[[X]].$$

Le principe de cette démonstration ressemble à celui du lemme 1, la récurrence portant ici sur les diviseurs de q. Soit $F = \frac{U}{V} \in \Phi_q$. Si nous montrons qu'il existe $\gamma \in \mathbf{G}$ telle que $\gamma(F) \in \Phi_d$, où d est un diviseur strict de q, notre résultat sera démontré (car il n'existe qu'un nombre fini de diviseurs strictement « emboîtés » entre q et 1).

En supposant (comme dans le lemme 1) que F est à coefficients non tous entiers, et que a_λ est le premier coefficient non entier, on peut poser

$$a_\lambda = \frac{q'}{q}, \quad \text{avec } q' \text{ entier non multiple de } q.$$

Mais alors $d = (q, q')$ est un diviseur strict de q et, comme A est principal, il existe une identité de Bezout :

$$\alpha q + \beta q' = d.$$

On a alors

$$F(X) = P^* + X^\lambda\left(\frac{q'}{q} + \ldots\right).$$

Posons ensuite

$$\left(\frac{q'}{q} + \ldots\right) = F_1(X) = \frac{W(X)}{V(X)} = \gamma_1(F(X)),$$

avec, par conséquent, $\gamma_1 \in \mathbf{G}$. Si nous formons maintenant la combinaison

$$F_2(X) = \gamma_2(F_1(X)) = \frac{1}{\alpha + \beta F_1(X)} = \frac{V(X)}{\alpha V(X) + \beta W(X)},$$

avec encore $\gamma_2 \in \mathbf{G}$, nous constatons que $(\alpha V + \beta W)(0) = d$, ce qui montre que $F_2(X) \in \Phi_d$, et termine la démonstration [car $F_2 = \gamma_2\gamma_1(F)$, avec $\gamma_2\gamma_1 \in \mathbf{G}$].

Nous avons ainsi établi, dans le cas où A est principal, une condition nécessaire et suffisante pour que F(X) appartienne à $\mathcal{Q}$, c'est-à-dire à une famille Φ_q. Mais la proposition 4 ne fournit pas d'indications utilisables pour déterminer q à partir des coefficients $A^\star$, $B^\star$, $C^\star$, $D^\star$, et nous préférerons, par la suite, nous borner au cas des anneaux euclidiens, utilisant le lemme 1 pour construire des raisonnements par récurrence.

Remarque 2. — En revenant sur le problème énoncé au paragraphe 4, de savoir si une série $F(X) \in K[[X]]$ appartient ou non à une famille Φ_q, nous noterons que le lemme 1 répond à la question, si l'on se donne une série $F(X)$ particulière et un élément q fixé de A : il suffit de suivre le processus indiqué lors de la démonstration du lemme (ou de la proposition 4, si l'on se place dans le cas où A est principal). Malheureusement, cela n'est valable que pour un couple donné $(F(X), q)$ et ne permet d'obtenir aucun critère général.

Remarque 3. — Si nous nous plaçons maintenant dans l'anneau $\mathfrak{A} = S^{-1} A[[X]]$ des séries formelles généralisées, le lemme 1 prend alors une signification remarquable :

Proposition 5. — *Si* A *est un anneau euclidien, l'anneau* $\mathfrak{A}$ *est également euclidien.*

On savait déjà que $\mathfrak{A}$ est euclidien lorsque A est un anneau de valuation discrète (Bourbaki [3 *b*], 1, ex. 9).

Démonstration. — Définissons le stathme d'une série de $\mathfrak{A}$,

$$F(X) = \sum_m^\infty a_k X^k \qquad (m \in \mathbf{Z},\ a_m \neq 0),$$

comme le stathme de son terme de plus bas degré : $|F(X)| = |a_m|$ (en conservant dans $\mathfrak{A}$ la notation du stathme euclidien comme une valeur absolue), et remarquons que $|X^h F(X)| = |F(X)|$ pour tout $h \in \mathbf{Z}$.

Soient maintenant $U(X)$ et $V(X)$ deux séries de $\mathfrak{A}$, et multiplions-les par une puissance convenable de X, de manière à obtenir

$$U(X) = X^m U_1(X) \qquad \text{et} \qquad V(X) = X^n V_1(X),$$

avec

$$U_1(X),\ V_1(X) \in A[[X]] \qquad \text{et} \qquad U_1(o),\ V_1(o) \neq o.$$

Si $|V(X)| = |V_1(o)| = q$, nous pouvons alors appliquer le lemme 1 à $\frac{U_1(X)}{V_1(X)}$ [lorsque $U(X)$ n'est pas multiple de $V(X)$] et écrire

$$U_1(X) = P^\star(X)\, V_1(X) + X^\lambda W_1(X), \qquad \text{avec} \quad |W_1(o)| = |q'| < |q|,$$

d'où nous déduisons

$$U(X) = P^\star(X)\, X^{m-n}\, V(X) + X^{\lambda+m} W_1(X),$$

avec

$$|X^{\lambda+m}W_1(X)| = |q'| < |V(X)| = q,$$

ce qui démontre notre proposition en établissant l'existence d'une division euclidienne dans $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ étant euclidien, est factoriel. Il résulte alors, en corollaire de la proposition 5, que l'anneau A[[X]] est aussi factoriel (théorème de Nagata, la partie multiplicative S étant engendrée par l'élément premier X).

Remarque 4. — Signalons qu'il est possible de démontrer de la même manière que, lorsque A est principal, A[[X]] est factoriel (*voir* P. Samuel [16]). Il suffira pour cela de montrer que, lorsque A est principal, l'anneau $\mathfrak{A}$ est factoriel. Il est même principal (ce qui est un résultat connu), et nous pouvons en donner une démonstration directe ainsi :

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathfrak{A}$ et soient $X^{m_i}\sum_0^\infty a_{k_i}X^k$, $i \in I$ $(m_i \in \mathbf{Z})$, ses éléments. Comme X est inversible dans $\mathfrak{A}$, les éléments $\sum_0^\infty a_{k_i}X^k$ appartiennent à $\mathfrak{I}$. Il s'ensuit immédiatement que les entiers a_{0_i} forment un idéal de A, soit l'idéal principal bA. Il existe alors un élément de terme initial b, $\beta(X) = b + b_1X + b_2X^2 + \ldots$, dans l'idéal $\mathfrak{I}$. Nous disons que $\mathfrak{I} = \beta\mathfrak{A}$. Comme il est clair que $\beta\mathfrak{A} \subset \mathfrak{I}$, il nous reste à montrer que $\mathfrak{I} \subset \beta\mathfrak{A}$, c'est-à-dire que tout élément $X^m\sum_0^\infty a_kX^k$ de $\mathfrak{I}$ est un multiple de $\beta(X)$.

Nous pouvons même nous borner à montrer que $\sum_0^\infty a_kX^k$ est un multiple de $\beta(X)$. Nous procéderons par récurrence sur l'indice k. Supposons donc que nous ayons déterminé n éléments de A : $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, tels que

$$\beta(X)\,(c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-1}X^{n-1}) = \sum_0^\infty \alpha_kX^k, \qquad \text{avec} \quad \alpha_k = a_k \quad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq n-1.$$

Alors

$$\sum_0^\infty a_kX^k - \beta(X)\,(c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-1}X^{n-1}) = u_nX^n + \ldots \in \mathfrak{I},$$

donc $u_n \in bA$, soit $u_n = bc_n$, ce qui entraîne que

$$\beta(X)\,(c_0 + c_1X + \ldots + c_{n-1}X^{n-1} + c_nX^n) = \sum_0^\infty \alpha'_kX^k, \qquad \text{avec} \quad \alpha'_k = a_k \quad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq n.$$

Le début de cette récurrence ne pose aucun problème, puisque $a_0 \in bA$, soit $a_0 = bc_0$. Nous avons donc déterminé une série $\sum_0^\infty c_kX^k$ telle que

$\beta(X)\sum_0^\infty c_k X^k = \sum_0^\infty a_k X^k$, ce qui achève notre démonstration : $\mathcal{J} = \beta\mathcal{A}$. Ainsi donc, tout idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ est principal.

6. Polynômes et séries lacunaires dans $\mathcal{Q}$. — Nous allons tout d'abord donner quelques compléments sur les expressions possibles d'une série de $\mathcal{Q}$, ceci dans le cas où A est principal, et donc A[[X]] factoriel.

Familles Φ_q auxquelles peut appartenir F(X). — Toute série de $\mathcal{Q}$ possède une expression irréductible $F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$ (i. e. U et V premières entre elles dans A[[X]]), expression unique à une multiplication près des numérateur et dénominateur par un élément inversible E(X) [caractérisé, nous le rappelons, par $e_0 = E(o) =$ élément inversible de A]. Il s'ensuit que, pour toute autre expression $F(X) = \frac{U'(X)}{V'(X)}$, il existe une série $D(X) \in A[[X]]$ telle que

$$U' = UD \qquad \text{et} \qquad V' = VD.$$

Mais cette relation entraîne $V'(o) = V(o)\,D(o)$, et nous voyons donc que si $F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$, avec $V(o) = q$, est une expression irréductible, les familles Φ_{q_1} auxquelles appartient F(X) sont caractérisées par $q_1 = hq$ ($h \in A$). Et inversement, si F(X) appartient à la famille Φ_q sans appartenir à aucune famille $\Phi_{q'}$, q' diviseur de q, alors toute expression de F(X) dans Φ_q est irréductible.

Éléments extrêmaux de A[[X]]. — Les éléments q extrêmaux dans A sont extrêmaux dans A[[X]] : en effet, $q = Q_1(X)\,Q_2(X)$ entraîne $q = Q_1(o)\,Q_2(o)$ et alors $Q_1(o)$ ou $Q_2(o)$ est inversible dans A, donc $Q_1(X)$ ou $Q_2(X)$ est inversible dans A[[X]].

Nous noterons enfin, mais sans démonstration car cela n'intervient pas dans la suite de cette étude, la classification suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad Q(X) \in A[[X]], \qquad Q(o) = q \in A; \\ \quad q \text{ extrêmal} \;\Rightarrow\; Q(X) \text{ extrêmal}; \\ q = p^h \;(p \text{ extrêmal}) : \text{on ne peut pas conclure } \textit{a priori}; \\ q \neq p^h \qquad \text{»} \qquad \Rightarrow\; Q(X) \text{ composé} \end{array}\right.$$

[nous remarquerons en passant qu'un polynôme $Q^\star(X) \in A[X]$ peut être irréductible dans A[X] sans l'être des A[[X]], ainsi par exemple $6 + X$ dans $\mathbf{Z}$[[X]].]

Polynômes dans $\mathcal{Q}$. — En utilisant les quelques précisions sur A[[X]] et $\mathcal{Q}$ que nous venons d'indiquer, nous pouvons démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 6. — *Si un polynôme* $F^*(X)$ *appartient à la famille* Φ_q, *alors* $qF^*(X) = P^*(X)$ *est un polynôme à coefficients entiers.*

Démonstration. — Il suffit de montrer ce résultat pour $F^*(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$, expression irréductible où $V(o) = q$; en effet, pour toute famille Φ_{q_1} contenant $F^*(X)$, nous avons $q_1 = hq$, et $qF^*(X) \in A[X]$ entraîne, *a fortiori*, $q_1 F^*(X) = h(qF(X)) \in A[X]$.

$F^*(X)$, étant un polynôme, ne possède qu'un nombre fini de coefficients non nuls, de la forme $a_k = \frac{\text{entier}}{q^{k+1}}$, et il existe donc une puissance q^m de q telle que $q^m F^*(X)$ soit à coefficients entiers :

$$F^*(X) = \frac{Q^*(X)}{q^m}.$$

Comme l'expression $F^*(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$ dans Φ_q a été supposée irréductible, il résulte de ce que nous avons dit au début de ce paragraphe qu'il existe une série $D(X) \in A[[X]]$ telle que

$$q^m = V(X)\, D(X).$$

Nous aurons démontré notre proposition si nous montrons que q divise $V(X)$: si, en effet, $V(X) = qV'(X)$, alors $V'(o) = 1$, ce qui entraîne que $qF^*(X) = \frac{U(X)}{V'(X)}$ appartient à $A[[X]]$, et donc à $A[X]$. Nous allons donc montrer que, si $q = \prod p_i^{\nu_i}$ (les p_i étant extrêmaux), chaque facteur $p_i^{\nu_i}$ divise $V(X)$. Or toute puissance de p_i qui divise une série $B(X)$ doit diviser $b_0 = B(o)$. Mais $V(o) = q$ et $D(o) = q^{m-1}$, de sorte que si p_i^{α} divise $D(X)$ et donc $D(o)$, on a $\alpha \leqq (m-1)\nu_i$. L'anneau $A[[X]]$ étant factoriel, nous en concluons que $p_i^{\nu_i}$ divise $V(X)$, ce qui termine la démonstration.

Séries lacunaires dans $\mathfrak{D}$. — Des résultats de même nature que ce dernier, parfois moins précis, peuvent être démontrés lorsqu'il existe une lacune assez grande avant ou après un coefficient d'une série de $\mathfrak{D}$.

PROPOSITION 7. — *Soit* $F(X)$ *une série appartenant à la famille* Φ_q, *avec* $q = \prod p_i^{\nu_i}$ *(les* p_i *étant extrêmaux). On pose* $\nu = \max_i \nu_i$. *Si*

$$a_{h+1} = a_{h+2} = \ldots = a_{h+k} = 0, \qquad \textit{ou si} \quad a_{h-1} = a_{h-2} = \ldots = a_{h-k} = 0,$$

alors

$$a_h = \frac{\text{entier}}{q^{1+\mu}}, \qquad \textit{avec} \quad \mu = \left[\frac{h}{k+1} - \frac{1}{\nu} + 1\right]$$

([ ] *notation de la partie entière*).

Démonstration. — Les deux cas étant similaires, supposons par exemple $a_{h+1}=\ldots=a_{h+k}=0$ et considérons le déterminant de Hankel $H_{h-k}^{(k)}$. En raison de la lacune supposée, nous pouvons écrire

$$H_{h-k}^{(k)}=\begin{vmatrix} a_{h-k} & \ldots & a_h \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_h & \ldots & a_{h+k} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{h-k} & \ldots & \ldots & a_h \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a_h & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\pm(a_h)^{k+1}.$$

Et nous savons (proposition 1 *bis*) que

$$H_{h-k}^{(k)}=\frac{\text{entier}}{q^{h+k+1}}.$$

Mais $a_h=\dfrac{\text{entier}}{q^{h+1}}$; posons, plus précisément,

$$a_h=\frac{N}{\prod p_i^{w_i}},\qquad \text{avec}\quad (N,p_i)=1,\quad \forall\, i.$$

La puissance de p_i qui intervient dans $(a_h)^{k+1}$ est donc exactement $-(k+1)w_i$. Celle qui intervient dans $H_{h-k}^{(k)}$ est, elle, supérieure ou égale à $-(h+k+1)v_i$. Ce qui nous donne

$$-(h+k+1)v_i \leqq -(k+1)w_i,$$

soit

$$w_i \leqq \frac{h+k+1}{k+1}v_i.$$

Or nous avons $\mu=\left[\dfrac{h}{k+1}-\dfrac{1}{v}+1\right]$, ce qui équivaut à

$$\mu \leqq \frac{h}{k+1}-\frac{1}{v}+1<\mu+1$$

ou encore

$$\frac{h}{k+1}<\mu+\frac{1}{v}.$$

En reportant dans l'inégalité obtenue pour w_i, il vient

$$w_i \leqq v_i+\frac{h}{k+1}v_i<(1+\mu)v_i+\frac{v_i}{v}\leqq(1+\mu)v_i+1,$$

ce qui est précisément ce que nous voulions démontrer.

Corollaire 1. — *Si* $a_{h+1}=a_{h+2}=\ldots=a_{h+hv}=0$, *alors* $a_h=\dfrac{\text{entier}}{q}$.

En effet, $k=hv$ est la plus petite valeur telle qu'on ait $\dfrac{h}{k+1}-\dfrac{1}{v}+1<1$, ce qui entraîne $\mu=0$. Remarquons qu'il n'est pas question ici d'obtenir un résultat similaire pour une lacune située avant a_h.

Corollaire 2. — *Si* $a_{h+1} = \ldots = a_{h-n+(n+1)(h-n)v} = 0$, *alors*

$$a_h = \frac{\text{entier}}{q}, \qquad a_{h-1} = \frac{\text{entier}}{q^2}, \qquad \ldots, \qquad a_{h-n} = \frac{\text{entier}}{q^{n+1}}.$$

La démonstration s'effectue de proche en proche : la lacune supposée est assez grande pour appliquer le corollaire 1 à $F(X)$, d'où $a_h = \dfrac{\text{entier}}{q}$, puis à

$$F(X) - \frac{N_h}{q} X^h = \frac{q\,U(X) - N_h X^h V(X)}{q\,V(X)}$$

qui appartient à Φ_{q^2}, d'où $a_{h-1} = \dfrac{\text{entier}}{q^2}$, ensuite à

$$F(X) - \frac{N_h}{q} X^h - \frac{N_{h-1}}{q^2} X^{h-1} = \frac{q^2 U(X) - q N_h X^h V(X) - N_{h-1} X^{h-1} V(X)}{q^2 V(X)}$$

qui appartient à Φ_{q^3}, etc.

Corollaire 3. — *Soit* $F(X) = \sum_0^\infty a_m X^{\lambda_m}$ *une série lacunaire appartenant à la famille* Φ_q. *S'il existe un nombre réel* $K > 1$ *tel que* $\lambda_{m+1} \geq K\lambda_m$ *pour tout* m, *alors* $qF(X)$ *est à coefficients entiers.*

Démonstration. — En utilisant les notations de la proposition 7, nous avons $h = \lambda_m$, $k + 1 = \lambda_{m+1} - \lambda_m$. Il s'ensuit que $\dfrac{h}{k+1}$ est borné par $\dfrac{1}{K-1}$, et par conséquent que $\mu = \left[\dfrac{h}{k+1} - \dfrac{1}{v} + 1\right]$ est borné également.

Il existe donc une puissance q^M de q telle que $q^M F(X)$ soit à coefficients entiers et la démonstration se termine exactement comme celle de la proposition 6, basée sur la factorialité de $A[[X]]$.

7. Résultats topologiques. — Nous revenons maintenant au cas où A est euclidien, en nous plaçant dans l'anneau $K[[X]]$, muni de la topologie X-adique.

Proposition 8. — *Chaque famille* Φ_q *est fermée.*

Démonstration. — Considérons une suite $\left\{ F^{(n)}(X) = \sum_0^\infty a_k^{(n)} X^k \right\}$ de séries formelles appartenant à la famille Φ_q et convergeant vers une limite $F(X) = \sum_0^\infty a_k X^k$. Remarquons que la convergence de la suite $\{F^n(X)\}$ vers $F(X)$ s'exprime simplement par le fait que les coefficients $a_k^{(n)}$ deviennent égaux aux a_k à partir d'un certain rang :

$$a_k^{(n)} = a_k \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq s \quad \text{quand} \quad n \geq n(s).$$

Écartons préalablement le cas trivial où la limite $F(X)$ serait à coefficients tous entiers : on aurait en effet $F(X) \in \Phi_1$, et par conséquent, $F(X) \in \Phi_q$ quel que soit l'entier q. La série $F(X)$ possède donc la même propriété que celle que nous avons constatée pour les séries de Φ_q lors de la démonstration du lemme 1 : il existe un indice λ fini ($\lambda \geqq 0$) tel que

$$a_k \in A \quad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq \lambda - 1 \quad \text{et} \quad a_\lambda = a'_\lambda + \frac{q'}{q}.$$

En définissant le rang n_0 par la condition

$$n \geqq n_0 \Rightarrow a_k^{(n)} = a_k \quad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq \lambda,$$

nous pouvons alors appliquer le lemme 1 aux séries $F^{(n)}(X)$, $n \geqq n_0$:

$$F^{(n)}(X) = P^\star(X) + \frac{X^\lambda}{G^{(n)}(X)}, \quad \text{où} \quad G^{(n)}(X) \in \Phi_{q'}, \quad \text{avec} \quad |q'| < |q|,$$

avec la double certitude, et que $P^\star(X)$ reste fixe, et que q' reste fixe également. Et nous avons la relation immédiate

$$[F^{(n)}(X) \to F(X)] \Leftrightarrow [G^{(n)}(X) \to G(X)],$$

$G(X)$ étant reliée à $F(X)$ par la même transformation homographique

$$F(X) = P^\star(X) + \frac{X^\lambda}{G(X)}.$$

Or, par ailleurs, nous avons la propriété suivante, qui a lieu lorsque $F(X)$ et $G(X)$ sont toujours reliées par cette transformation :

$$\left.\begin{array}{r} F(X) \in \Phi_q \\ a_\lambda = a'_\lambda + \dfrac{q'}{q} \\ a_0, \ldots, a_{\lambda-1}, a'_\lambda \in A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} G(X) \in \Phi_{q'} \\ G(0) = \dfrac{q}{q'} \end{array}\right.$$

L'implication $\Rightarrow$ résulte du lemme 1, et l'implication $\Leftarrow$ de l'expression de la transformation homographique :

$$F(X) = \frac{P^\star(X)\, V(X) + X^\lambda W(X)}{V(X)},$$

où $\dfrac{V(X)}{W(X)} = G(0)$ avec $V(0) = q$. Si donc chaque famille $\Phi_{q'}$, où $|q'| < |q|$, est fermée, nous avons démontré que Φ_q était fermée aussi.

Pour terminer ce raisonnement par récurrence, il ne nous reste plus qu'à montrer que Φ_1 est fermée, ce qui est évident (si une série à coefficients entiers possède une limite, cette limite est également à coefficients entiers, i. e. appartient à Φ_1).

Remarque. — Il est possible, bien sûr, que la limite $F(X)$ appartienne à une famille $\Phi_{q'}$, q' diviseur de q, sans qu'aucune des séries $F^{(n)}(X)$ n'appartienne à la famille $\Phi_{q'}$.

Cas non euclidien. — Nous avons remarqué que la convergence de la suite $\{F^{(n)}(X)\}$ se traduisait par l'égalité, à partir d'un certain rang, des coefficients avec ceux de la série limite. Cela montre que les propriétés arithmétiques énoncées dans la proposition 2 se conservent lors du passage à la limite :

PROPOSITION 9. — *Si nous supposons que l'anneau* A *est seulement principal, et si nous définissons* $\Phi_q^\star \subset \Phi_q$ *comme la sous-famille des séries* $F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$ *telles que* $(U(0), V(0)) = 1$, *alors chaque sous-famille* $\Phi_q^\star$ *est fermée.*

Il est d'ailleurs très probable que dans ce cas également, les familles Φ_q elles-mêmes sont fermées.

Une question ouverte est de savoir pour quels anneaux exactement les familles Φ_q sont ou non fermées (le chapitre suivant étudiant cette question pour une catégorie assez particulière d'anneaux).

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE CERTAINES SOUS-FAMILLES DANS UN CAS PARTICULIER.

8. FORME RÉDUITE DES SÉRIES DE $\mathfrak{Q}$. — Nous ne supposons plus maintenant aucune propriété particulière pour l'anneau A (toujours commutatif intègre); ce ne sera qu'au fil de ce chapitre que des restrictions seront posées.

Séries réduites dans $A[[X]]$, *formes réduites dans* $\mathfrak{Q}$. — Nous désignerons par $\mathcal{R}(q) = \{c_0 = 0, c_1, \ldots, c_j, \ldots\}$ un système de représentants dans A du quotient A/qA et nous dirons qu'une série $B(X) = \sum_0^\infty b_k X^k \in A[[X]]$ est réduite si $b_k \in \mathcal{R}(b_0)$ pour tout $k \geqq 1$.

Étant donnée une série $F(X) \in \Phi_q$, nous dirons que l'expression $\frac{U(X)}{V(X)} = F(X)$ est sous forme réduite si le dénominateur $V(X)$ est une série réduite.

LEMME 2. — *Étant donnée une série quelconque* $B(X) \in A[[X]]$, *il est toujours possible de trouver un élément inversible* $E(X)$ [*i. e.* $E(0) = 1$ *ou entier associé de* A] *tel que* $E(X)\,B(X)$ *soit une série réduite.*

($E(X)\,B(X)$ est alors appelée réduite de $B(X)$.)

Démonstration. — Supposons que nous ayons déterminé n éléments de A : $e_0 = 1$, e_1, ..., e_{n-1}, tels que

$$(1 + e_1 X + \ldots + e_{n-1} X^{n-1}) B(X) = \sum_0^\infty \alpha_k X^k,$$

avec

$$\alpha_k \in \mathcal{R}(b_0) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq k \leqq n-1,$$

et considérons le produit

$$(1 + e_1 X + \ldots + e_{n-1} X^{n-1} + e_n X^n) B(X) = \sum_0^\infty \alpha'_k X^k.$$

Nous avons $\alpha'_k = \alpha_k$ pour $1 \leqq k \leqq n-1$ et $\alpha'_n = \alpha_n + e_n b_0$. Si nous choisissons pour α'_k le représentant dans $\mathcal{R}(b_0)$ de la classe de α_k, il nous est alors possible de déterminer e_n : en effet, $\alpha'_k - \alpha_k \in b_0 A$, soit $\alpha'_k - \alpha_k = e_n b_0$. Donc $\alpha'_k \in \mathcal{R}(b_0)$ pour $1 \leqq k \leqq n$.

L'élément inversible cherché $E(X)$ peut ainsi se déterminer de proche en proche.

Corollaire. — *Étant donnée une série quelconque* $F(X) \in \Phi_q$, *il est toujours possible d'en trouver une expression sous forme réduite.*

En effet, on connaît une expression $F(X) = \dfrac{U(X)}{V(X)}$ [avec $V(0) = q$] et il existe $E(X)$ telle que $E(X)\,V(X)$ soit réduite. Alors $\dfrac{E(X)\,U(X)}{E(X)\,V(X)} = \dfrac{U'(X)}{V'(X)}$ est l'expression recherchée.

Remarque. — Rien n'indique *a priori* que l'expression sous forme réduite de $F(X)$ soit unique. Il en sera néanmoins ainsi lorsque, $A[[X]]$ étant factoriel (si A est principal, par exemple), l'expression de $F(X)$ dans Φ_q sera irréductible [i. e. $F(X)$ appartient à Φ_q sans appartenir à aucune $\Phi_{q'}$, q' diviseur de q]. En effet, les seuls dénominateurs possibles des expressions de $F(X)$ dans Φ_q sont alors de la forme $D(X)\,V(X)$, avec $D(0)$ inversible dans A. Et s'il existait deux dénominateurs réduits différents, $V'_1(X)$ et $V'_2(X)$, on devrait avoir

$$V'_1(X) = D_1(X)\,V(X) \qquad \text{et} \qquad V'_2(X) = D_2(X)\,V(X),$$

d'où l'on déduirait

$$\frac{V'_1(X)}{V'_2(X)} = \frac{D_1(X)}{D_2(X)} \in A[[X]],$$

ce qui est impossible. On constate, en effet, en considérant le premier coefficient par où elles diffèrent, que deux séries réduites (de même terme constant) différentes ne peuvent avoir leur quotient à coefficients tous entiers.

9. SOUS-FAMILLES DE Φ_q. — *Sous-familles* $\Phi_{q,r_1,\ldots,r_n}$. — Si q est un entier non nul, et $r_1, \ldots, r_n$ des éléments fixés de $\mathcal{R}(q)$, nous désignerons par $\Phi_{q,r_1,\ldots,r_n}$ la sous-famille de Φ_q formée par les séries $F(X)$ telles que, pour une expression au moins $\frac{U(X)}{V(X)} = F(X)$, le dénominateur $V(X)$ ait pour réduite la série

$$E(X)\,V(X) = q + r_1 X + \ldots + r_n X^n + v'_{n+1} X^{n+1} + \ldots,$$

les coefficients d'indice supérieur à n étant quelconques.

Certaines questions peuvent se poser à propos de ces familles, notamment en ce qui concerne leurs intersections ou réunions. Ces questions paraissent fort malaisées à étudier; nous esquisserons néanmoins l'étude de l'une d'elles afin de donner une idée des résultats qu'on pourrait obtenir.

Nous observerons tout d'abord que pour une série :

$$F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}, \qquad \text{avec} \quad V(X) = q + v_1 X + v_2 X^2 + \ldots,$$

l'appartenance à la sous-famille Φ_{q,r_1} équivaut à la congruence

$$v_1 - r_1 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} q).$$

Dès qu'on aborde les indices suivants, les conditions sur les coefficients de $V(X)$ deviennent vite compliquées et assez peu maniables; par exemple, l'appartenance à la sous-famille Φ_{q,r_1,r_2} équivaut aux deux congruences :

$$\begin{aligned} v_1 - r_1 &\equiv 0 && (\operatorname{mod} q), \\ q(v_2 - r_2) &\equiv r_1(v_1 - r_1) && (\operatorname{mod} q^2). \end{aligned}$$

Aussi nous bornerons-nous au cas le plus simple, l'appartenance d'une série à deux sous-familles $\Phi_{q,r}$ et $\Phi_{q,r'}$.

En effectuant le produit

$$(q_1 + \rho X + \ldots)(d + \lambda X + \ldots) = q_1 d + (q_1 \lambda + d\rho) X + \ldots,$$

nous constatons que la sous-famille $\Phi_{q_1,\rho}$ est contenue dans toute sous-famille $\Phi_{q,r}$ vérifiant

$$\begin{gathered} q = q_1 d, \\ r \equiv q_1 \lambda + d\rho \qquad (\operatorname{mod} q_1 d) \\ (d \text{ et } \lambda \text{ entiers quelconques}). \end{gathered}$$

En supposant pour simplifier que A est un anneau factoriel, nous en déduisons que

$$\Phi_{q_1,\rho} \subset \Phi_{q,r} \cap \Phi_{q,r'} \implies q_1 \mid (q,\, r - r').$$

En prenant alors pour q_1 un diviseur de $(q, r - r')$, nous pouvons chercher les solutions en $(\rho, \lambda, \lambda')$ des deux congruences

$$r \equiv q_1\lambda + d\rho \qquad (\operatorname{mod} q_1 d),$$
$$r' \equiv q_1\lambda' + d\rho \qquad (\operatorname{mod} q_1 d).$$

Et, après avoir remarqué que $q_1 \mid r - r'$ entraîné l'existence d'une solution en (λ') de la seconde congruence correspondant à chaque solution en (ρ, λ) de la première, nous pouvons donner le résultat suivant :

$$\Phi_{q,r} \cap \Phi_{q,r'} = \bigcup_{\substack{q_1 \mid (q,\, r-r') \\ \left(q_1, \frac{q}{q_1}\right) \mid r}} \ \bigcup_{\substack{\rho \text{ tel que} \\ q_1 \left| r - \frac{q}{q_1}\rho \right.}} \Phi_{q_1, \rho},$$

en notant que cette intersection n'est jamais vide, car toute famille ou sous-famille contient Φ_1.

Indiquons enfin une autre voie d'approche de cette question : l'étude de la factorisation des éléments non diviseurs de zéro de l'anneau $A[[X]]/X^m A[[X]]$.

Sous-familles $\Phi_q(d_1, \ldots, d_h)$. — Nous partirons ici de la remarque suivante : si nous effectuons le produit $W(X) = E(X)\, V(X)$ de la série $V(X)$, possédant la propriété que d divise ses coefficients $v_0, v_1, \ldots, v_m$, par une série inversible $E(X)$, nous constatons que la série $W(X)$ possède la même propriété, d divisant ses coefficients $w_0, w_1, \ldots, w_m$; nous avons, en outre :

$$w_{m+1} - v_{m+1} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} d).$$

Cette propriété est particulièrement intéressante, car elle se manifeste de la même façon sur une série et sur sa réduite, rendant inutile le recours explicite à cette dernière.

Considérant alors une suite de diviseurs « emboîtés » de q :

$$d_1 \mid q, \quad d_2 \mid d_1, \quad \ldots, \quad d_h \mid d_{h-1} \qquad (d_h \text{ non inversible}),$$

nous désignerons par $\Phi_q(d_1, \ldots, d_h)$ la sous-famille $\subset \Phi_q$ des séries $F(X)$ telles que, pour une expression au moins $\frac{U(X)}{V(X)} = F(X)$, le dénominateur $V(X)$ satisfasse à

$$v_0 = q, \quad d_1 \mid v_1, \quad \ldots, \quad d_h \mid v_h.$$

Ces sous-familles sont réunions (finies) de sous-familles du type étudié au début de ce paragraphe :

$$\Phi_q(d_1, \ldots, d_h) = \bigcup_{d_1 \mid r_1, \ldots, d_h \mid r_h} \Phi_{q, r_1, \ldots, r_h}.$$

La remarque faite sur la congruence entre w_{m+1} et v_{m+1} nous conduit à distinguer deux nouvelles sous-familles au sein de chaque $\Phi_q(d_1, \ldots, d_h)$, caractérisées respectivement par v_{h+1} premier ou non premier avec d_h; nous les désignerons par $\Phi'_q(d_1, \ldots, d_h)$ et $\Phi''_q(d_1, \ldots, d_h)$.

Les mêmes questions que précédemment se posent encore ici. Nous traiterons la plus simple d'entre elles, en supposant également que A est un anneau factoriel :

$$\Phi'_q \cap \Phi''_q = \bigcup_{\substack{q_1 \mid q \\ \left(q_1, \frac{q}{q_1}\right) = 1}} \Phi'_{q_1}.$$

(Φ_1 figure dans cette réunion; nous pouvons d'ailleurs convenir que $\Phi'_1 = \Phi''_1 = \Phi_1$.)

Pour démontrer ce résultat, nous remarquerons d'abord que

$$\Phi'_q \cap \Phi''_q = \bigcup_{(q,r)=1,\,(q,r')\neq 1} (\Phi_{q,r} \cap \Phi_{q,r'}).$$

Chaque terme est réunion de $\Phi_{q_1,\rho}$, et nous devons avoir, d'après l'étude précédente, $\left(q_1, \frac{q}{q_1}\right) \Big| r$; cette relation, jointe à $(q, r) = 1$, entraîne $\left(q_1, \frac{q}{q_1}\right) = 1$. Cela étant posé, on vérifiera aisément, en considérant les produits

$$(q_1 + \rho X + \ldots)\,(d + \lambda X + \ldots) = q_1 d + (q_1 \lambda + d\rho)\,X + \ldots,$$

que

$$(q_1, \rho) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{q_1,\rho} \subset \Phi'_q \cap \Phi''_q,$$
$$(q_1, \rho) \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{q_1,\rho} \not\subset \Phi'_q \cap \Phi''_q,$$

ce qui termine notre démonstration, car Φ'_{q_1} est précisément la réunion des $\Phi_{q_1,\rho}$ tels que $(q_1, \rho) = 1$.

10. Résultats topologiques. — Nous serons obligés, dans ce dernier paragraphe, de faire une restriction essentielle. Nous supposerons que dans A tout idéal principal est de norme finie [i. e. Card $(A/qA) < \infty$ pour tout entier q].

En nous plaçant de nouveau dans l'anneau $K[[X]]$ muni de la topologie X-adique, nous pouvons étendre la proposition 8 :

Proposition 10. — *Chaque sous-famille $\Phi_{q,r_1,\ldots,r_n}$ est fermée.*

Il en est donc de même pour toute réunion finie de ces sous-familles. Un cas particulier est le suivant :

Corollaire. — *Chaque sous-famille $\Phi_q(d_1, \ldots, d_h)$, $\Phi'_q(d_1, \ldots, d_h)$, $\Phi''_q(d_1, \ldots, d_h)$ est fermée.*

Démonstration. — Nous utiliserons le résultat suivant (Bourbaki [3 *a*], 10-1) : si G est un groupe topologique (noté multiplicativement), et si B et C sont deux parties de G, B fermée et C compacte, alors le produit BC est fermé.

Or le groupe multiplicatif $\mathcal{H}^\star = S^{-1}\mathfrak{D} - \{o\}$ est un groupe topologique (relativement à la topologie X-adique). Dans ce groupe, la partie $B = A[[X]] (= \Phi_1)$ est fermée, nous l'avons déjà remarqué. Par ailleurs, la partie $C_{q, r_1, \ldots, r_n}$, formée des séries réduites commençant par

$$q + r_1 X + \ldots + r_n X^n,$$

est compacte, cela résulte immédiatement de l'hypothèse faite,

$$\operatorname{Card}(\mathcal{R}(q)) < \infty.$$

La partie $C = (C_{q, r_1, \ldots, r_n})^{-1}$ est donc compacte également.

Il ne nous reste plus qu'à montrer qu'on a

$$\Phi_{q, r_1, \ldots, r_n} = BC,$$

ce qui est une simple conséquence du corollaire du lemme 2, qui énonce que toute série de Φ_q possède une expression sous forme réduite.

DEUXIÈME PARTIE.

FRACTIONS RATIONNELLES ET ENSEMBLES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES.

CHAPITRE IV.

Fractions rationnelles dans l'anneau $\mathfrak{Q}$.

11. Généralisation du lemme de Fatou. — Le problème qui se pose ici est de savoir si une fraction rationnelle de $A(X)$, qu'on sait par ailleurs appartenir à une famille Φ_q, possède dans cette famille Φ_q une représentation comme quotient de polynômes et non plus seulement de séries formelles.

Nous savons que cette représentation comme quotient de polynômes est possible dans la famille Φ_1, grâce à un lemme, démontré par P. Fatou [9] dans le cas particulier $A = \mathbf{Z}$, et que nous allons rappeler ici, avec une démonstration classique qui suppose que A soit un anneau factoriel. Ce lemme a été généralisé ultérieurement (C. Pisot [13]) au cas où A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques; nous laisserons d'ailleurs de côté ce cas, pour lequel nous n'avons pas pu étendre aux familles Φ_q ce lemme de Fatou.

Lemme 3. — *L'anneau* A *étant supposé factoriel, soit* $F(X)$ *une fraction rationnelle du corps* $A(X)$. *Si* $F(X)$ *est à coefficients tous entiers* [*nous dirons : si* $F(X) \in \Phi_1$], *et si l'on écrit* $F(X) = \frac{U^\star(X)}{V^\star(X)}$ *comme quotient de deux polynômes premiers entre eux dans* $A[X]$, *alors* $v_0^\star = V^\star(0)$ *est inversible dans* A.

(Il en résulte en particulier qu'on peut choisir une représentation avec $V^\star(X)$ tel que $v_0^\star = 1$.)

Démonstration. — Soit donc

$$F(X) = \frac{U^\star(X)}{V^\star(X)}, \qquad F(X) \in A[[X]].$$

Nous avons supposé que les polynômes $U^\star(X)$ et $V^\star(X)$ étaient premiers entre eux (dans $A[X]$ donc dans $K[X]$, en raison du théorème de Gauss, valable lorsque A est factoriel). Nous savons que l'anneau de polynômes $K[X]$ est euclidien; ainsi donc, $U^\star(X)$ et $V^\star(X)$ vérifient une identité de Bezout que nous pourrons écrire, après multiplication par un entier convenable :

$$A^*(X)\,U^*(X)+B^*(X)\,V^*(X)=d, \qquad \text{avec} \quad A^*(X),\,B^*(X)\in A[X] \qquad \text{et} \qquad d\in A.$$

Nous en déduisons alors

$$G(X)=A^*(X)\,F(X)+B^*(X)=A^*(X)\frac{U^*(X)}{V^*(X)}+B^*(X)=\frac{d}{V^*(X)}\in A[[X]].$$

Mettons maintenant en évidence des polynômes ou séries primitifs $U_1^*(X)$, $V_1^*(X)$, $F_1(X)$, $G_1(X)$ tels que

$$U^*(X)=a\,U_1^*(X), \qquad V^*(X)=b\,V_1^*(X),$$
$$F(X)=f\,F_1(X), \qquad G(X)=g\,G_1(X)$$

(remarquons que a et b sont premiers entre eux, car $U^*(X)$ et $V^*(X)$ étaient premiers entre eux dans $A[X]$). Le produit $V_1^*(X)\,G_1(X)$ est primitif, de sorte que

$$d=\varepsilon b g \qquad (\varepsilon \text{ inversible dans } A).$$

Nous utilisons ici le lemme de Gauss : *Si* $S(X)$, $T(X)$ *sont des séries primitives, et si* $s\,S(X)=t\,T(X)$, *avec* s, $t\in A$, *alors* s *et* t *sont associés dans* A, et non le fait (faux en général), que $A[[X]]$ soit factoriel.

Il s'ensuit immédiatement que $V_1^*(X)\,G_1(X)=\varepsilon$, donc que $V_1^*(0)=\eta$, inversible dans A. Revenons alors à l'égalité

$$V^*(X)\,F(X)=U^*(X),$$

soit

$$bfV_1^*(X)\,F_1(X)=aU_1^*(X).$$

a et b étant premiers entre eux, comme nous l'avons remarqué, a et f sont alors associés, et b est donc inversible. $V^*(0)=b\eta$ est alors également inversible.

Nous possédons maintenant le point de départ de la récurrence qui nous permettra d'établir le résultat suivant :

Proposition 11. — *L'anneau* A *étant supposé euclidien, soit* $F(X)$ *une fraction rationnelle du corps* $A(X)$. *Si* $F(X)$ *appartient à la famille* Φ_q, *et si l'on écrit* $F(X)=\dfrac{U^*(X)}{V^*(X)}$ *comme quotient de deux polynômes premiers entre eux dans* $A[X]$, *alors* $v_0^*=V^*(0)$ *est un diviseur (strict ou non) de* q.

[Il est équivalent de dire : on peut choisir une représentation avec $V^*(X)$ tel que $v_0^*=q$, si l'on n'impose plus à $U^*(X)$ et $V^*(X)$ d'être premiers entre eux dans $A[X]$; c'est d'ailleurs la forme sous laquelle nous effectuerons la démonstration. Il est encore équivalent de dire : si de plus $F(X)$ n'appartient à aucune famille $\Phi_{q'}$, q' diviseur strict de q, v_0^* est associé à q.]

Démonstration. — Nous ferons porter la récurrence sur le stathme de l'entier q et supposerons donc que cette proposition a été démontrée pour toutes les familles $\Phi_{q'}$, vérifiant $|q'|<|q|$.

Soit donc

$$F(X)=\frac{U(X)}{V(X)}, \qquad U(X),\ V(X)\in A[[X]], \qquad V(o)=q.$$

Nous pouvons écarter les séries $F(X)$ à coefficients tous entiers, pour lesquelles la proposition est trivialement vraie. Le lemme 1 s'applique alors à $F(X)$, et nous écrirons donc

$$F(X)=P^{*}(X)+X^{\lambda}\frac{W(X)}{V(X)}, \qquad \text{avec} \quad \frac{V(X)}{W(X)}\in\Phi_{q'}(|q'|<|q|) \qquad \text{et} \qquad \frac{V(o)}{W(o)}=\frac{q}{q'}.$$

Mais $\dfrac{V(X)}{W(X)}=\dfrac{X^{\lambda}}{F(X)-P^{*}(X)}$ est une fraction rationnelle et, d'après ce que nous avons posé lors de notre hypothèse de récurrence, il existe deux polynômes, $V^{\star}(X)$ et $W^{\star}(X)$, avec $W^{\star}(o)=q'$, tels que

$$\frac{V(X)}{W(X)}=\frac{V^{\star}(X)}{W^{\star}(X)},$$

d'où nous déduisons immédiatement

$$F(X)=\frac{P^{\star}(X)\,V^{\star}(X)+X^{\lambda}W^{\star}(X)}{V^{\star}(X)}.$$

Mais nous avions $W^{\star}(o)=W(o)=q'$, ce qui entraîne $V^{\star}(o)=V(o)=q$, et démontre notre proposition pour la famille Φ_{q}.

12. Étude relative aux sous-familles. — La proposition que nous venons d'obtenir peut être particularisée aux sous-familles définies au paragraphe 9.

Proposition 12. — *L'anneau* A *étant supposé euclidien, soit* $F(X)=\dfrac{U^{\star}(X)}{V^{\star}(X)}$ *une fraction rationnelle du corps* $A(X)$. *Si* $F(X)$ *appartient à la sous-famille* $\Phi_{q,r_1,\ldots,r_n}$, *alors on peut choisir les polynômes* $U^{\star}(X)$ *et* $V^{\star}(X)$ *de telle sorte que* $V^{\star}(X)$ *soit « réduit jusqu'au rang n » :*

$$V^{\star}(X)=q+r_1X+\ldots+r_nX^n+v^{\star}_{n+1}X^{n+1}+\ldots.$$

[On pourrait aussi bien imposer à $V^{\star}(o)$ d'avoir ses $n+1$ premiers coefficients égaux à ceux d'une série de la forme

$$E(X)\,B(X)=(1+e_1X+\ldots)\,(q+r_1X+\ldots+r_nX^n+\ldots)].$$

Démonstration. — D'après la remarque faite au début du paragraphe 6, $F(X)$ appartient à une famille Φ_{q_1}(q_1 diviseur de q) minimale [i. e. $F(X)\notin\Phi_{q_2}$,

q_2 diviseur non trivial de q_1] et toute expression de $F(X)$ dans Φ_{q_1} est irréductible. D'après la proposition 11, il existe une telle expression comme quotient de polynômes :

$$F(X) = \frac{U_1^\star(X)}{V_1^\star(X)} \qquad \text{avec} \quad V_1^\star(0) = q_1.$$

Toute autre expression $\frac{U(X)}{V(X)} = F(X)$ vérifie alors

$$U(X) = U_1^\star(X)\, D(X) \qquad \text{et} \qquad V(X) = V_1^\star(X)\, D(X).$$

Il en est ainsi, en particulier, de l'expression sous forme réduite de $F(X)$ dans $\Phi_{q, r_1, \ldots, r_n}$. Si nous appelons alors $D^\star(X)$ le polynôme obtenu en amputant la série $D(X)$ de ses termes de degré supérieur à n, il est manifeste que les $n+1$ premiers coefficients du polynôme $V^\star(X) = V_1^\star(X)\, D(X)$ seront les mêmes que ceux de la série $V(X)$, soient $q, r_1, \ldots, r_n$. Nous avons donc bien obtenu l'expression cherchée

$$F(X) = \frac{U^\star(X)}{V^\star(X)} = \frac{U_1^\star(X)\, D^\star(X)}{V_1^\star(X)\, D^\star(X)}.$$

Corollaire. — *Si* $F(X) = \frac{U^\star(X)}{V^\star(X)}$, *fraction rationnelle du corps* $A(X)$, *appartient à la famille* $\Phi_q(d_1, \ldots, d_h)$ [*resp.* $\Phi'_q(d_1, \ldots, d_h)$, *resp.* $\Phi''_q(d_1, \ldots, d_h)$], *alors on peut choisir les polynômes* $U^\star(X)$ *et* $V^\star(X)$ *de telle sorte que si*

$$V^\star(X) = v_0^\star + v_1^\star X + \ldots + v_h^\star X^h + v_{h+1}^\star X^{h+1} + \ldots,$$

on ait

$$v_0^\star = q, \qquad d_1 \mid v_1^\star, \quad \ldots, \quad d_h \mid v_h^\star$$

[*resp. et de plus* $(d_h, v_{h+1}^\star) = 1$, *resp. et de plus* $(d_h, v_{h+1}^\star) \neq 1$].

CHAPITRE V.

Rappel sur les nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

13. Définition de l'ensemble S. — Nous dirons qu'un nombre réel θ appartient à l'ensemble S si :

— θ est entier algébrique (sur $\mathbf{Z}$);

— $\theta > 1$, ses conjugués autres que lui-même vérifiant $|\theta_j| < 1$ $(j = 2, 3, \ldots, s)$.

Cet ensemble S possède un grand nombre de propriétés remarquables, tant en lui-même qu'en ce qui concerne ses applications. La propriété qui nous intéressera pour la suite de ce travail est celle-ci : l'ensemble S est fermé (R. Salem [15]).

Fractions rationnelles associées. — Nous dirons qu'une fraction rationnelle $f(z) = \frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ appartient à la famille $\mathcal{F}$ si :

— $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$ appartiennent à $\mathbf{Z}[z]$, le dénominateur vérifiant $Q^\star(0) = 1$ [i. e. les inverses des pôles de $f(z)$ sont des entiers algébriques];

— $f(z)$ possède un pôle unique (réel positif) dans le disque $|z| < 1$ de $\mathbf{C}$;

— $|f(z)| \leq 1$ sur le cercle unité $|z| = 1$.

On voit immédiatement que le pôle intérieur au disque unité d'une fraction rationnelle de $\mathcal{F}$ est l'inverse d'un nombre θ de S; inversement, on peut toujours associer à un nombre θ de S une fraction rationnelle de $\mathcal{F}$, en prenant pour $A^\star(z)$ le polynôme minimal de θ, et pour $Q^\star(z)$ son réciproque (sauf pour certains nombres quadratiques, mais une étude directe permet de leur associer également une fraction rationnelle de $\mathcal{F}$).

L'étude de cette famille $\mathcal{F}$ permet de démontrer simplement et rapidement que S est fermé. Signalons enfin que cette même méthode permet de caractériser S′ et tous les dérivés successifs de S, ainsi que de déterminer les plus petits éléments de S, S′ et S″ (J. Dufresnoy et C. Pisot [8]; Mme M. Grandet [10]).

14. Généralisations. — Il est possible de généraliser les ensembles S des nombres de Pisot-Vijayaraghavan dans diverses directions. Nous présenterons ici deux de ces possibilités dont nous effectuerons ensuite une synthèse partielle : soit ne plus imposer au nombre algébrique θ d'être entier, soit ne plus lui imposer d'être entier sur $\mathbf{Z}$ et prendre son polynôme minimal dans $A[z]$, A anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques.

Ensembles S_q. — q étant un entier rationnel fixé, nous dirons qu'un nombre réel θ appartient à l'ensemble S_q si :

— $\frac{1}{\theta}$ est la seule racine située dans le disque $|z| < 1$ d'un polynôme $Q^\star(z)$ appartenant à $\mathbf{Z}[z]$ et vérifiant $Q^\star(0) = q$;

— il existe un polynôme $A^\star(z)$ appartenant à $\mathbf{Z}[z]$ et vérifiant :

$$A^\star\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0, \qquad |A^\star(0)| \geq |q|,$$

$$|A^\star(z)| \leq |Q^\star(z)| \quad \text{sur le cercle unité } |z| = 1.$$

Cela revient à définir $\frac{1}{\theta}$ comme l'unique pôle intérieur au disque unité d'une fraction rationnelle appartenant à une certaine famille déterminée par les conditions ci-dessus.

Les ensembles S_q sont fermés et les plus petits éléments de S_q et de S'_q ont été déterminés (C. Pisot [14], M. Amara [1]).

Ensembles S (K). — K étant un corps quadratique imaginaire et A_K l'anneau de ses entiers, nous dirons qu'un nombre θ appartient à l'ensemble S(K) si :

— θ est entier algébrique sur A_K;

— $|\theta| > 1$, ses conjugués autres que lui-même vérifiant $|\theta_j| < 1$ $(j = 2, 3, \ldots, s)$.

Les ensembles S(K) sont fermés et leur plus petit élément déterminé (Mme M. Grandet [11]).

CHAPITRE VI.

Ensembles fermés de nombres algébriques.

15. Définitions. — A partir de maintenant et jusqu'au terme de cette étude, K désignera, soit le corps **Q** des rationnels, soit l'un des cinq corps quadratiques imaginaires euclidiens, et A_K l'anneau des entiers de K (on se convaincra aisément que, si le corps K n'était pas imaginaire, les démonstrations qui suivent seraient en défaut, en raison de l'existence de points d'accumulation à distance finie des éléments de A_K).

Nous redonnerons à la notation $|a|$ sa signification usuelle de valeur absolue.

Ensembles $S_q(K)$ *et sous-ensembles* $S_q(d_1, \ldots, d_h; K)$. — q étant un entier fixé de A_K, nous dirons qu'un nombre θ appartient à l'ensemble $S_q(K)$ si :

— $\frac{1}{\theta}$ est la seule racine située dans le disque $|z| < 1$ d'un polynôme $Q^\star(z)$ appartenant à $A_K[z]$ et vérifiant $Q^\star(0) = q$;

— il existe un polynôme $A^\star(z)$ appartenant à $A_K[z]$ et vérifiant

$$A^\star\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0, \qquad |A^\star(0)| \geqq |q|,$$

$$|A^\star(z)| \leqq |Q^\star(z)| \quad \text{sur le cercle unité } |z| = 1.$$

Étant donné une suite de diviseurs « emboîtés » de q :

$$d_1 \mid q, \quad d_2 \mid d_1, \quad \ldots, \quad d_h \mid d_{h-1} \qquad (d_h \text{ non inversible}),$$

nous dirons qu'un nombre θ appartient à l'ensemble $S_q(d_1, \ldots, d_h; K)$ si :

— θ appartenant à $S_q(K)$, le polynôme

$$Q^\star(z) = q_0^\star + q_1^\star z + \ldots + q_h^\star z^h + \ldots + q_s^\star z^s$$

dont $\frac{1}{\theta}$ est racine satisfait à la condition

$$q_0^\star = q, \qquad d_1 \mid q_1^\star, \quad \ldots, \quad d_h \mid q_h^\star.$$

Nous remarquerons qu'il n'est pas exigé que le polynôme $Q^\star(z)$ soit irréductible, ni qu'il soit primitif [ce qui entraîne d'ailleurs $S_{q'}(K) \subset S_q(K)$ lorsque q' est un diviseur de q].

Familles $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ *et sous-familles* $\mathcal{F}_\delta(S_q(d_1, \ldots, d_h; K))$. — q étant un entier fixé de A_K, nous dirons qu'une fraction rationnelle $f(z) = \dfrac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ appartient à la famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ si :

— $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$ appartiennent à $A_K[z]$, le dénominateur vérifiant $Q^\star(0) = q$;

— $f(z)$ possède un pôle unique dans le disque $|z| < 1$, pôle situé dans la couronne $0 < \delta \leqq |z| < 1$;

— $|f(0)| \geqq 1$ et $|f(z)| \leqq 1$ sur le cercle unité $|z| = 1$.

Étant donné comme précédemment une suite de diviseurs « emboîtés » de q, nous dirons qu'une fraction rationnelle $f(z)$ appartient à la famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(d_1, \ldots, d_h; K))$ si :

— $f(z)$ appartenant à $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$, son dénominateur $Q^\star(z)$ satisfait à la condition

$$q_0^\star = q, \qquad d_1 \mid q_1^\star, \quad \ldots, \quad d_h \mid q_h^\star.$$

Remarque 1. — En procédant comme au paragraphe 9, nous pourrions également définir des sous-familles $\mathcal{F}'_\delta(\ldots)$ et $\mathcal{F}''_\delta(\ldots)$ ainsi que des sous-ensembles correspondants de nombres algébriques. Afin de ne pas alourdir cette étude, nous laisserons de côté de telles sous-familles; rappelons d'ailleurs que ce sont des réunions finies de sous-familles $\mathcal{F}_\delta(S_q(d_1, \ldots, d_h; K))$.

Remarque 2. — La correspondance entre les éléments θ des ensembles $S_q(K)$ et de leurs sous-ensembles, et les pôles $\frac{1}{\theta}$ intérieurs au disque unité des fractions rationnelles des familles $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ et de leurs sous-familles, sera étudiée ultérieurement. Nous constaterons d'ailleurs que c'est une question très délicate à traiter.

16. Familles compactes de fractions rationnelles. — Avant d'aborder l'étude de notre résultat principal, nous avons besoin d'établir que les éléments θ des ensembles $S_q(K)$ ne peuvent pas, en valeur absolue, être « trop » voisins de 1 :

Lemme 4. — *Tous les éléments* θ *d'un ensemble* $S_q(K)$ *vérifient*

$$|\theta| > 1 + \frac{1}{4|q|^2}.$$

Démonstration. — Soient θ un nombre de $S_q(K)$, $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$ les deux polynômes de $A_K[z]$ qui interviennent dans sa définition. La fraction $\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ est alors méromorphe $\left(\text{de pôle } \frac{1}{\theta}\right)$ dans $|z| \leqq 1$ et bornée par 1 sur $|z| = 1$. Donc la fraction

$$\varphi(z) = \frac{1 - \theta z}{\bar{\theta} - z} \frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$$

est holomorphe et bornée par 1 dans tout le disque $|z| \leqq 1$. Nous avons en particulier

$$|\varphi(0)| = \left|\frac{1}{\bar{\theta}}\right| \times \left|\frac{A^\star(0)}{q}\right| \leqq 1.$$

Mais $A(0)$ est un entier de K, et tout entier r de K vérifie $|r|^2 \in \mathbf{N}$, d'où nous déduisons, car $|A^\star(0)| \geqq q$:

$$\begin{aligned} &\textbf{ou} \quad |A^\star(0)| = |q| \\ &\textbf{ou} \quad |A^\star(0)|^2 \geqq |q|^2 + 1. \end{aligned}$$

Supposons alors que $|\theta| \leqq 1 + \frac{1}{3|q|^2}$; la relation $|\varphi(0)| \leqq 1$ entraîne

$$\left|\frac{A^\star(0)}{q}\right| \leqq 1 + \frac{1}{3|q|^2},$$

soit

$$\left|\frac{A^\star(0)}{q}\right|^2 \leqq \left(1 + \frac{1}{3|q|^2}\right)^2 < 1 + \frac{1}{|q|^2},$$

ou encore

$$|A^\star(0)|^2 < |q|^2 + 1.$$

Notre majoration de $|\theta|$ entraîne donc $|A(0)| = |q|$, et nous poserons $A(0) = q$, après avoir éventuellement remplacé $A^\star(z)$ par $\varepsilon A^\star(z)$ ou $\varepsilon \overline{A^\star}(z)$ (ε étant un élément convenable du groupe des unités de A_K). Nous aurons alors

$$\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)} = \frac{q + a_1^\star z + \ldots}{q + q_1^\star z + \ldots} = 1 + \frac{r}{q} z + \ldots,$$

avec $r \in A_K$ et $r \neq 0$ (*voir*, par exemple, C. Pisot [14], corollaire, p. 178), c'est-à-dire $|r| \geqq 1$. Si nous appliquons maintenant le lemme de Schwarz à

$$\varphi(z) = \frac{1}{\bar{\theta}} + \left(\frac{r}{q\bar{\theta}} + \frac{1}{\bar{\theta}^2} - \frac{\theta}{\bar{\theta}}\right) z + \ldots,$$

nous obtenons

$$\left|\frac{1}{z} \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{1 - \overline{\varphi(0)}\,\varphi(z)}\right| \leqq 1 \qquad \text{dans } |z| \leqq 1,$$

soit, pour $z = 0$:

$$\left|\frac{\frac{r}{q\bar{\theta}} + \frac{1}{\bar{\theta}^2} - \frac{\theta}{\bar{\theta}}}{1 - \frac{1}{\theta\bar{\theta}}}\right| \leqq 1.$$

ou

$$\left|\frac{r}{q\bar{\theta}\left(1-\frac{1}{|\theta|^2}\right)}-\frac{\theta}{\bar{\theta}}\right|\leqq 1.$$

Supposons alors que $|\theta|\leqq 1+\frac{1}{4|q|}$; nous en déduisons

$$|\theta|-\frac{1}{|\theta|}<\frac{1}{2|q|}, \qquad \text{soit} \qquad \left|\frac{1}{\bar{\theta}\left(1-\frac{1}{|\theta|^2}\right)}\right|>2|q|,$$

et enfin

$$\left|\frac{r}{q\bar{\theta}\left(1-\frac{1}{|\theta|^2}\right)}\right|>\left|\frac{r}{q}\right|.2|q|=2|r|\geqq 2.$$

Mais $\left|\frac{\theta}{\bar{\theta}}\right|=1$, de sorte que l'inégalité précédente :

$$\left|\frac{r}{q\bar{\theta}\left(1-\frac{1}{|\theta|^2}\right)}-\frac{\theta}{\bar{\theta}}\right|\leqq 1,$$

est impossible. Il n'existe donc pas de $\theta\in S_q(K)$ tel que

$$\theta\leqq 1+\frac{1}{4|q|^2}\leqq \min\left(1+\frac{1}{3|q|^2}, 1+\frac{1}{4|q|}\right),$$

ce qui démontre notre lemme.

PROPOSITION 13. — *Dans l'espace des applications du disque $|z|<1$ dans la sphère de Riemann, muni de la topologie de la convergence compacte, chaque famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ est compacte.*

Démonstration. — Nous procéderons en trois étapes. Suivant M. Pisot [14], nous montrerons que, si l'on supprime la condition arithmétique $Q^\star(0)=q$, les familles $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ sont des familles normales (au sens de M. Montel) de fonctions méromorphes, puis que ces familles sont fermées, donc compactes. Nous montrerons enfin que toute fonction limite possède bien la propriété $Q^\star(0)=q$.

Soit donc $\{f_n(z)\}$ une suite infinie de fractions rationnelles appartenant à la famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ et désignons par $\left\{\frac{1}{\theta_n}\right\}$ les pôles intérieurs au cercle unité correspondants. Posons

$$\varphi_n(z)=\frac{1-\theta_n z}{\bar{\theta}_n-z}f_n(z).$$

Nous obtenons ainsi une famille $\{\varphi_n(z)\}$ de fonctions holomorphes et bornées par 1 dans le disque $|z|\leqq 1$. Les familles $\left\{\frac{1-\theta_n z}{\bar{\theta}_n-z}\right\}$ et $\{\varphi_n(z)\}$

sont des familles normales de fonctions holomorphes dans le cercle unité dont on peut extraire des suites partielles convergeant, et même convergeant simultanément. Ce sont maintenant ces suites partielles que nous considérerons (en conservant la même notation indicée par n).

D'après la définition de $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ et le lemme 4, les pôles $\frac{1}{\theta_n}$ restent dans une couronne

$$0 < \delta \leqq |z| \leqq \frac{1}{1 + \frac{1}{4|q|^2}} < 1,$$

et les fonctions $\frac{1 - \theta_n z}{\bar{\theta}_n - z}$ tendent donc vers une limite

$$\frac{1 - \theta z}{\bar{\theta} - z},$$

cependant que les fonctions $\varphi_n(z)$ tendent également vers une limite que nous noterons $\varphi(z)$. Posant alors

$$f(z) = \frac{\bar{\theta} - z}{1 - \theta z} \varphi(z),$$

nous allons montrer que le produit par $\varphi(z)$ ne peut pas faire disparaître le pôle $\frac{1}{\theta}$. En effet, la propriété $|f_n(0)| \geqq 1$ entraîne $|f(0)| \geqq 1$ et donc, ou $f(z)$ possède un pôle intérieur au cercle unité, ou $f(z)$ est une constante de module égal à 1, éventualité exclue par la propriété

$$f_n(z) = u_0^{(n)} + u_1^{(n)} z + \ldots, \qquad \text{avec} \quad u_1^{(n)} \neq 0$$

(*voir* démonstration du lemme 4), qui entraîne

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots, \qquad \text{avec} \quad u_1 \neq 0.$$

Nous avons ainsi établi que les fractions rationnelles $\{f_n(z)\}$ forment une famille normale de fonctions holomorphes. Nous voulons montrer que chaque famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ est fermée. Mais nous avons déjà vu que la limite (sur la sphère de Riemann) $f(z)$ d'une suite $\{f_n(z)\}$ possède dans le disque $|z| < 1$ le pôle unique $\frac{1}{\theta}$ tel que $\delta \leqq \left|\frac{1}{\theta}\right|$, que cette limite vérifie $|f(0)| \geqq 1$ et aussi (d'après sa construction que nous venons d'effectuer) $|f(z)| \leqq 1$ sur le cercle unité $|z| = 1$. Il reste encore à démontrer que $f(z)$ est une fraction rationnelle.

Considérons alors les déterminants de Kronecker $K_p(f)$. Comme $f(z)$ est à caractéristique bornée dans $|z| \leqq 1$ $\left[\text{en effet } f(z) = \frac{(\bar{\theta} - z)\varphi(z)}{1 - \theta z},\right]$ nous avons (*voir* § 3) :

$$\lim_{p \to \infty} |K_p(f)|^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Or, la famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ étant formée de fractions rationnelles qui appartiennent, en tant que séries formelles, à la famille Φ_q, la limite $f(z)$ de la suite $\{f_n(z)\}$ appartient également à la famille Φ_q (proposition 8) et ses déterminants de Kronecker vérifient donc $K_p(f) = \frac{\text{entier}}{q^{2p+1}}\cdot$ Comme tout entier r non nul de A_K vérifie $|r| \geqq 1$, on voit immédiatement qu'il est impossible d'avoir $\lim |K_p(f)|^{\frac{1}{p}} = 0$ si $K_p(f)$ n'est pas nul pour $p \geqq p_0$. Et cela est précisément une caractérisation de Kronecker des fractions rationnelles (que nous avons rappelée au paragraphe 3).

Nous terminerons cette démonstration en montrant qu'il est bien possible d'écrire :

$$f(z) = \frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)},$$

avec

$$A^\star(z),\ Q^\star(z) \in A_K[z] \qquad \text{et} \qquad Q^\star(0) = q.$$

Nous avons déjà remarqué que la limite $f(z)$ appartient à la famille Φ_q. Et comme cette limite est une fraction rationnelle, notre généralisation du lemme de Fatou (proposition 11) montre que nous pouvons écrire $f(z) = \frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ avec les conditions désirées.

Proposition 14. — *Dans l'espace des applications du disque $|z| < 1$ dans la sphère de Riemann, muni de la topologie de la convergence compacte, chaque famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(d_1, \ldots, d_h; K))$ est compacte.*

Nous pouvons montrer, exactement de la même manière que pour la proposition précédente, qu'aux conditions arithmétiques sur le dénominateur près, les familles $\mathcal{F}_\delta(S_q(d_1, \ldots, d_h; K))$ sont des familles compactes de fractions rationnelles méromorphes.

Nous terminerons alors la démonstration en utilisant maintenant le corollaire de la proposition 10 : la famille $\Phi_q(d_1, \ldots, d_h)$ est fermée (en effet, tout idéal dans A_K est de norme finie), et le corollaire de la proposition 12 : on peut écrire $f(z) = \frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ avec les conditions désirées.

Remarque. — Certaines familles ou sous-familles $\mathcal{F}_\delta(\ldots)$ peuvent être vides $\left(\text{en particulier si } \delta \geqq \frac{1}{1 + \frac{1}{4|q|^2}}\right)$ ou n'avoir qu'un nombre fini d'éléments; cela est sans importance pour les propositions 13 et 14, qui deviennent simplement triviales.

17. Application aux ensembles $S_q(K)$. — Le problème, que nous avons déjà signalé, est d'étudier la correspondance entre les nombres $\theta \in S_q(K)$ et les nombres $\frac{1}{\theta}$ pôles des fractions $f(z) \in \mathcal{F}_\delta(S_q(K))$.

D'après les propriétés mêmes des deux polynômes de $A_K[z]$, $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$, qui interviennent dans la définition d'un nombre θ de $S_q(K)$, il s'ensuit que la fraction rationnelle $f(z)=\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$, de pôle $\frac{1}{\theta}$ intérieur au disque unité, appartient à toute famille $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$ telle que $\delta\leqq\frac{1}{|\theta|}$.

Soit inversement $f(z)=\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ une fraction rationnelle de $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$. $Q^\star(z)$ peut posséder dans $|z|\leqq 1$ des zéros autres que l'unique pôle $\frac{1}{\theta}$ de $f(z)$, mais ce sont alors aussi des zéros de $A^\star(z)$. Cette circonstance peut être éliminée en divisant $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$ par leur p. g. c. d. Les nouveaux numérateur et dénominateur de $f(z)$ sont des polynômes de $A_K[z]$ (théorème de Gauss) et vérifient les conditions requises pour que θ appartienne à $S_q(K)$, sauf peut-être $Q^\star(0)=q$. Mais le terme constant du nouveau dénominateur est alors un diviseur q' de q, et nous avons vu que $S_{q'}(K)\subset S_q(K)$.

Proposition 15. — *L'ensemble* $S_q(K)$ *est fermé.*

Démonstration. — Soit une suite $\{\theta_n\}$ d'éléments de $S_q(K)$, admettant une limite θ'. Alors cette suite est bornée et il existe $\delta>0$ tel que $|\theta_n|\leqq\frac{1}{\delta}$ pour tout n. Associons aux θ_n des fractions rationnelles correspondantes de $\mathcal{F}_\delta(S_q(K))$. D'après la proposition 13, elles admettent une limite, et le pôle intérieur au disque unité de cette limite ne peut être que $\frac{1}{\theta'}$, ainsi qu'il résulte de la démonstration de la proposition 13. L'étude faite au début de ce paragraphe montre qu'alors $\theta'\in S_q(K)$, ce qui termine notre démonstration.

Cas des sous-ensembles $S_q(d_1, \ldots, d_h; K)$. — Nous pouvons refaire ici la même étude et tirer les mêmes conclusions à une exception près : en divisant $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$ par leur p. g. c. d., nous faisons disparaître les conditions arithmétiques de divisibilité que satisfont les premiers coefficients de $Q^\star(z)$. Tout le problème est le suivant :

Soient trois polynômes de $A_K[z]$:

$$Q'^\star(z)=\sum_0^\infty q_k'^\star z^k,\qquad B^\star(z)=\sum_0^\infty b_k^\star z^k,\qquad Q^\star(z)=\sum_0^\infty q_k^\star z^k,$$

tels que $Q^\star(z)=Q'^\star(z)\,B^\star(z)$; nous savons que :

— $Q'^\star(z)$ possède un zéro unique $\frac{1}{\theta}$ dans le disque $|z|\leqq 1$;

— $Q^\star(z)$ vérifie les propriétés arithmétiques imposées (i. e. $q_0^\star=q$, $d_1\,|\,q_1^\star$, $\ldots$, $d_h\,|\,q_h^\star$);

et nous cherchons un polynôme de $A_K[z]$, $C^\star(z) = \sum_0^\infty c_k^\star z^k$, qui soit tel que :

— il ne possède aucun zéro dans le disque $|z| \leqq 1$ (ce qui entraînera que le produit $Q'^\star(z)\, C^\star(z) = Q_1^\star(z)$ possédera le zéro unique $\frac{1}{\theta}$ dans $|z| \leqq 1$);

— le produit $Q_1^\star(z)$ vérifie les mêmes propriétés arithmétiques imposées.

D'après l'étude faite au paragraphe 9 sur les sous-familles $\Phi_q(d_1, \ldots, d_h)$, nous pourrons construire des polynômes $C^\star(z)$ ayant les propriétés arithmétiques voulues en les prenant de la forme

$$C^\star(z) = b_0^\star + c_1^\star(E)\, z + \ldots + C_h^\star(E)\, z^h + C_{h+1}^\star z^{h+1} + \ldots,$$

où les $h+1$ premiers coefficients sont les mêmes que ceux d'un produit $B^\star(z)\, E(z)$, avec $E(z) = 1 + e_1 z + \ldots$; les coefficients de rang supérieur à h de $C^\star(z)$ étant arbitraires.

La question est maintenant de savoir si, en jouant convenablement sur le « facteur arithmétique » $E(z)$, ainsi que sur les coefficients de rang supérieur à h, il est possible d'obtenir un polynôme $C^\star(z)$ sans zéro intérieur au disque unité. Nous n'apporterons pas de réponse pour le cas général et nous nous contenterons de conjecturer que cela est toujours possible.

Remarque. — Si nous avons $Q'^\star(z) = Q^\star(z)$, ce polynôme lui-même satisfait aux conditions arithmétiques imposées, de sorte que nous pouvons énoncer : chaque ensemble dérivé $S'_q(d_1, \ldots, d_h; K)$ est contenu dans la réunion

$$S_q(d_1, \ldots, d_h; K) \cup \left(\bigcup_{\delta \mid q} S_\delta(K) \right);$$

nous pouvons préciser un peu plus et dire qu'il est contenu dans la réunion

$$S_q(d_1, \ldots, d_h; K) \cup \left(\bigcup_{\delta \mid q} S'_\delta(K) \right).$$

En effet, la caractérisation de l'ensemble dérivé S' [si $\theta \in S'$, il existe une fraction rationnelle associée $\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ de $\mathcal{F}$ telle que $|A^\star(z)| < |Q^\star(z)|$ sur le cercle unité $|z| = 1$, sauf en un nombre fini de points où l'égalité des modules a lieu] est immédiatement généralisable aux ensembles dérivés S'_q (avec, bien sûr, la condition supplémentaire $|A^\star(0)| \geqq |Q^\star(0)|$). Ces deux propriétés qui caractérisent les ensembles dérivés S'_q demeurent évidemment lorsqu'on divise $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$ par un diviseur commun, ce qui a précisément été fait dans la question qui nous occupe ici.

Cas particulier. — Nous terminerons cette étude en donnant le résultat relatif aux sous-ensembles les plus simples :

PROPOSITION 16. — *Chaque sous-ensemble* $S_q(d; K)$ *est fermé.*

Démonstration. — Le cas $Q'^{\star}(z) = Q^{\star}(z)$ étant trivial, nous l'avons vu, supposons donc que $q_0'^{\star}$ soit un diviseur strict de $q_0^{\star}$: $q_0^{\star} = q_0'^{\star} b_0^{\star}$. Il nous faut alors trouver un polynôme

$$b_0^{\star} + c_1^{\star}(E) z + c_2^{\star} z^2 + \ldots$$

convenable, où $c_1^{\star}(E)$ est de la forme $b_1^{\star} + b_0^{\star} e_1$. Cela ne présente aucune difficulté car nous sommes dans un anneau euclidien A_K (la valeur absolue usuelle étant une fonction croissante du stathme euclidien). Il existe toujours un entier e_1 tel que

$$|b_1^{\star} + b_0^{\star} e_1| < |b_0^{\star}|,$$

et nous prendrons

$$C^{\star}(z) = b_0^{\star} + (b_1^{\star} + b_0^{\star} e_1) z,$$

qui ne possède qu'un seul zéro, situé dans $|z| > 1$.

Remarque. — Un autre cas particulier très simple pourrait être imaginé : si, parmi les nombres θ appartenant à un sous-ensemble $S_q(d_1, \ldots, d_h; K)$, on ne conserve que ceux tels qu'il existe un polynôme $A^{\star}(z)$ vérifiant les conditions de la définition de ces sous-ensembles, et vérifiant la condition supplémentaire $(A^{\star}(0), q) = 1$, alors ce nouvel ensemble est fermé.

En effet, les polynômes $A^{\star}(z)$ et $Q^{\star}(z)$ ne peuvent avoir pour p. g. c. d. qu'un polynôme de la forme $1 + rz + \ldots$, et, après division par ce p. g. c. d., le dénominateur aura toujours q pour terme constant, et vérifiera donc toutes les conditions imposées.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. AMARA, *Ensembles fermés de nombres algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 83, 1966, p. 215-270).

[2] É. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1903.

[3 *a*] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématiques, topologie générale, fascicule de résultats*, Hermann, Paris, 1964.

[3 *b*] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématiques, algèbre commutative*; chap. 7 : *diviseurs*, Hermann, Paris, 1965.

[4] D. CANTOR, *Power series with integral coefficients* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 69, 1963, p. 362-366).

[5] F. DRESS, *Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières à coefficients entiers* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 4338-4340).

[6] F. DRESS, *Déterminants de Hankel et quotients de séries formelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 263, série A, 1966, p. 433-435).

[7] F. DRESS, *Familles fermées de séries formelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 263, série A, 1966, p. 489-491).

[8] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 72, 1955, p. 62-92).

[9] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta Math.*, t. 30, 1906, p. 335-400).

[10] Mme M. Grandet, *Sur un ensemble d'entiers algébriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 1542-1543).

[11] Mme M. Grandet, *Ensembles fermés d'entiers algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 82, 1965, p. 1-33) (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1965).

[12] J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* (*J. Math. pures et appl.*, 4e série, t. 8, 1892, p. 101-186) (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1892).

[13] C. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques* (*Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa*, série 2, vol. 7, 1938, p. 205-248) (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1938).

[14] C. Pisot, *Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 81, 1964, p. 165-188).

[15] R. Salem, *A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan* (*Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 103-108).

[16] P. Samuel, *Anneaux factoriels*, vol. 1, Sociedade de matematica de São Paulo, São Paulo, 1963.

(Manuscrit reçu en Avril 1967).