

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES DIXMIER

## Sur la représentation régulière d'un groupe localement compact connexe

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 3 (1969), p. 423-436

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1969\\_4\\_2\\_3\\_423\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_3_423_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LA REPRÉSENTATION RÉGULIÈRE D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT CONNEXE

PAR JACQUES DIXMIER.

---

Soient  $G$  un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar invariante à gauche,  $\pi$  la représentation régulière de  $G$  dans  $L^2(G)$  et  $A$  l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(G)$ . Si  $G$  est unimodulaire, R. Godement et I. E. Segal ont démontré, simultanément et indépendamment, que  $A$  est semi-finie ([13], [22]). Si  $G$  n'est pas unimodulaire, on connaît des exemples où  $A$  n'est pas semi-finie; toutefois, R. Godement et I. E. Segal ont conjecturé que  $A$  est encore semi-finie lorsque  $G$  est *connexe*. Cette conjecture vient d'être établie par L. Pukanszky [20] lorsque  $G$  est un groupe de Lie résoluble. Nous allons dans le présent article établir la conjecture générale :

**THÉORÈME.** — *Soient  $G$  un groupe localement compact connexe,  $\pi$  sa représentation régulière. L'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(G)$  est semi-finie.*

L'essentiel du travail concerne le cas où  $G$  est un groupe de Lie. La méthode est une extension naturelle de celle de Pukanszky, que cet auteur a bien voulu nous communiquer avant publication. (Il faut noter que, pour  $G$  groupe de Lie résoluble, Pukanszky obtient son théorème comme corollaire de résultats beaucoup plus précis qui ne sont pas généralisés ici.)

**QUELQUES NOTATIONS.** — Soient  $G$  un groupe de Lie réel,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie, et  $g \in G$ . On note  $\text{Ad } g$  l'opération adjointe de  $g$  dans  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{n}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  et si  $G$  est connexe, on note  $\text{Ad}(g; \mathfrak{n})$  la restriction de  $\text{Ad } g$  à  $\mathfrak{n}$ .

Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie, et  $x \in \mathfrak{g}$ . On note  $\text{ad } x$  l'opération adjointe de  $x$  dans  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{n}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , on note  $\text{ad}(x; \mathfrak{n})$  la restriction de  $\text{ad } x$  à  $\mathfrak{n}$ .

Soient  $B$  un espace borélien,  $R$  une relation d'équivalence dans  $B$ . On dit que  $R$  est régulière si  $B/R$  est dénombrablement séparé. Soit  $G$  un groupe opérant dans  $B$  par automorphismes de la structure borélienne. On dit que  $G$  opère régulièrement dans  $B$  si la relation d'équivalence définie par  $G$  dans  $B$  est régulière.

Soit  $G$  un groupe topologique. On note  $\text{Aut}(G)$  le groupe des automorphismes de  $G$ ,  $\text{Int}(G)$  le groupe des automorphismes intérieurs de  $G$ .

On recommande la lecture de l'introduction à [1].

## 1. LE NILRADICALISÉ D'UN GROUPE DE LIE.

1.1. LEMME. — Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique  $o$ ,  $\mathfrak{r}$  son radical. Si  $\mathfrak{r}$  est nilpotent,  $\mathfrak{g}$  est unimodulaire.

Si  $x \in \mathfrak{r}$ ,  $(\text{ad } x)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$ , donc  $\text{ad } x$  est nilpotent et par suite  $\text{tr}(\text{ad } x) = 0$ . Soit  $\mathfrak{l}$  une section de Levi de  $\mathfrak{g}$ . On a  $\mathfrak{l} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ , donc  $\text{tr}(\text{ad } y) = 0$  pour tout  $y \in \mathfrak{l}$ . Or,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{r}$ .

1.2. LEMME. — Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique  $o$ ,  $\mathfrak{n}$  son plus grand idéal nilpotent. Posons  $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$ .

- (i)  $\mathfrak{h}$  est un idéal caractéristique de  $\mathfrak{g}$  tel que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  soit commutatif.
  - (ii) Le radical de  $\mathfrak{h}$  est  $\mathfrak{n}$ .
  - (iii)  $\mathfrak{h}$  est unimodulaire.
  - (iv) Pour toute section de Levi  $\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{g}$ , on a  $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$ .
- (i) est évident.

Soient  $\mathfrak{l}$  une section de Levi de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{r}$  le radical de  $\mathfrak{g}$ . On a  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$  ([4], p. 81, prop. 6 et p. 64, remarque 2). Donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} + \mathfrak{n} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + \mathfrak{l} + \mathfrak{n} \\ &= ([\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + [\mathfrak{l}, \mathfrak{r}]) + [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] + \mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{l}] + \mathfrak{n} \\ &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n} = \mathfrak{h} \supset [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] + \mathfrak{n} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}, \end{aligned}$$

ce qui prouve (iv) et (ii). Enfin, (iii) résulte de (ii) et du lemme 1.1.

1.3. DÉFINITION. — Dans les conditions du lemme 1.2, on dira que  $\mathfrak{h}$  est le nilradicalisé de  $\mathfrak{g}$ .

1.4. LEMME. — Soient  $G$  un groupe de Lie réel simplement connexe,  $Z$  son centre,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie,  $\mathfrak{h}$  le nilradicalisé de  $\mathfrak{g}$ ,  $H$  le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  (de sorte que  $H$  est fermé distingué dans  $G$ ),  $\varphi$  le morphisme canonique de  $G$  sur  $G/H$ . Alors  $\varphi(Z)$  est discret dans  $G/H$ .

(La démonstration suivante, plus simple que ma démonstration initiale, est due à A. Borel.)

Posons  $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$  conformément aux notations de 1.2. Alors  $\text{ad}(\mathfrak{n}; \mathfrak{g})$  est algébrique parce que les éléments de  $\text{ad}(\mathfrak{n}; \mathfrak{g})$  sont nilpotents ([6], p. 123,

prop. 14), et  $\text{ad}(\mathfrak{l}; \mathfrak{g})$  est algébrique parce que  $\mathfrak{l} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  ([5], p. 177, th. 15), donc  $\text{ad}(\mathfrak{h}; \mathfrak{g})$  est algébrique ([5], p. 175, th. 14). Donc  $\text{Ad}(H; \mathfrak{g})$  est fermé dans le groupe linéaire de  $\mathfrak{g}$ . Par suite  $HZ$ , qui est l'image réciproque de  $\text{Ad}(H; \mathfrak{g})$  par  $\text{Ad}$ , est fermé dans  $G$ . Il en résulte que  $\varphi(Z)$  est fermé dans  $G/H$ . Mais l'algèbre de Lie de  $Z$  est contenue dans  $\mathfrak{u}$ . L'algèbre de Lie de  $\varphi(Z)$  est donc  $\{0\}$ , d'où le lemme.

L. Pukanszky me signale qu'il a obtenu il y a longtemps, mais non publié, la proposition suivante :

1.5. PROPOSITION (L. Pukanszky). — Soient  $G$  un groupe de Lie réel connexe,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie,  $\mathfrak{h}$  le nilradicalisé de  $\mathfrak{g}$ ,  $H$  le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Alors  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ .

Soient  $G_1$  le revêtement universel de  $G$ ,  $Z$  le centre de  $G_1$ ,  $\pi$  le morphisme canonique de  $G_1$  sur  $G$ ,  $K$  le noyau de  $\pi$ . L'algèbre de Lie de  $G_1$  est  $\mathfrak{g}$ . Soit  $H_1$  le sous-groupe analytique de  $G_1$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . On a  $H = \pi(H_1)$ , donc  $\pi^{-1}(H) = \pi^{-1}(\pi(H_1)) = H_1K$ . Soit  $\varphi$  le morphisme canonique de  $G_1$  sur  $G_1/H_1$ . Alors  $\varphi(Z)$  est discret dans  $G_1/H_1$  (lemme 1.4). Donc  $\varphi(K)$  est discret dans  $G_1/H_1$  et par suite fermé dans  $G_1/H_1$ . Donc  $H_1K = \varphi^{-1}(\varphi(K))$  est fermé dans  $G_1$ . Cela prouve que  $H$  est fermé dans  $G$ .

1.6. DÉFINITION. — Dans les conditions de la proposition 1.5, on dira que  $H$  est le nilradicalisé de  $G$ .

1.7. PROPOSITION. — Soient  $G$  un groupe de Lie réel connexe,  $H$  son nilradicalisé.

(i)  $H$  est un sous-groupe de Lie fermé connexe distingué de  $G$ , tel que  $G/H$  soit commutatif.

(ii) Le radical de  $H$  est nilpotent.

(iii)  $H$  est unimodulaire.

Cela résulte de la proposition 1.5 et du lemme 1.2.

## 2. DEUX CRITÈRES POUR QU'UN GROUPE SOIT DE TYPE I.

2.1. Pour  $G$  résoluble, la proposition suivante se trouve dans [21], 2.2.

PROPOSITION. — Soient  $G$  un groupe de Lie réel,  $G_0$  sa composante neutre. On suppose que  $G$  est localement isomorphe à un groupe algébrique linéaire réel, et que  $G/G_0$  est fini. Alors  $G$  est de type I.

La proposition est évidente si  $\dim G = 0$ . Supposons-la établie pour les groupes de dimension  $< \dim G$ .

Soient  $G_1$  un groupe algébrique linéaire réel tel que  $G$  soit localement isomorphe à  $G_1$ . Soit  $G_2$  la composante neutre de  $G_1$ . Soit  $G_3$  le revê-

tement universel de  $G_2$ . Soit  $\pi$  une représentation unitaire factorielle fortement continue de  $G_3$  dans un espace hilbertien séparable. Nous allons prouver que  $\pi$  est de type I. Il en résultera que  $G_3$  est de type I, donc que  $G_0$ , qui est isomorphe à un quotient de  $G_3$ , est de type I, donc que  $G$  est de type I ([7], lemme 3). Désormais, on ne parlera plus de  $G$  ni de  $G_0$ .

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G_1$ ; c'est une algèbre de Lie algébrique, qui s'identifie à l'algèbre de Lie de  $G_2$  et de  $G_3$ . Il existe un idéal  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{g}$ , formé d'endomorphismes nilpotents, tel que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$  soit réductive ([6], p. 107, th. 3). Le sous-groupe analytique  $N$  de  $G_1$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}$  est fermé, simplement connexe et nilpotent ([6], p. 123, prop. 14). Soient  $\mathfrak{a}$  un idéal commutatif de  $\mathfrak{g}$  contenu dans  $\mathfrak{n}$ , et  $A$  le sous-groupe analytique de  $G_1$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$ ; ce sous-groupe est fermé, simplement connexe, distingué et commutatif; soient  $\mathfrak{a}^*$  l'espace vectoriel dual de  $\mathfrak{a}$  et  $\hat{A}$  le groupe des caractères de  $A$ . Pour tout  $x \in G_1$ , soient  $\rho(x)$  l'application  $a \mapsto xax^{-1}$  de  $A$  dans  $A$ ,  $\rho'(x)$  l'automorphisme de  $\hat{A}$  dual de  $\rho(x)$ ,  $\sigma(x) = \text{Ad}(x; \mathfrak{a})$ , et  $\sigma'(x)$  le contragrédient de  $\sigma(x)$ . Alors l'application exponentielle de  $\mathfrak{a}$  sur  $A$  est un isomorphisme  $\varphi$  de groupes topologiques qui transforme  $\sigma(x)$  en  $\rho(x)$ ; donc l'isomorphisme dual de  $\varphi$  transforme  $\sigma'(x)$  en  $\rho'(x)$ . Comme l'application  $x \mapsto \sigma'(x)$  est une représentation rationnelle de  $G_1$ ,  $G_2$  opère régulièrement dans  $\mathfrak{a}^*$  d'après un théorème de C. Chevalley (pour une esquisse de démonstration, cf. [8], p. 183). Donc  $G_2$  opère régulièrement dans  $\hat{A}$ . Or les automorphismes de  $A$  définis par les éléments de  $G_3$  sont les mêmes que les automorphismes de  $A$  définis par les éléments de  $G_2$ . Donc  $G_3$  opère régulièrement dans  $\hat{A}$ . Il résulte de là ([18], p. 302, th. 9.1) que  $\pi|_A$  est concentrée sur une  $G_3$ -orbite  $\Omega$ . (Le dernier alinéa recopie à peu de chose près [7], p. 326, l. 15-37.)

*Premier cas.* — Supposons qu'on puisse choisir  $\mathfrak{a}$  de manière que  $\Omega$  ne soit pas réduite à un point. Soit  $\omega \in \Omega$ . Soient  $S_1, S_2, S_3$  les stabilisateurs de  $\omega$  dans  $G_1, G_2, G_3$ . Alors  $S_1$  est algébrique ([6], p. 28, cor. 2). Les

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & K & & \\ & & & & \downarrow & & \\ S_6 & \rightarrow & S_7 & \rightarrow & S_5 & \rightarrow & S_3 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & S_4 & \rightarrow & S_2 & \rightarrow & S_1 \end{array}$$

groupes  $S_1$  et  $S_2$  ont même composante neutre  $S_4$ . Soit  $\tau$  le morphisme canonique de  $G_3$  sur  $G_2$ . On a  $S_3 = \tau^{-1}(S_2)$ ; soient  $S_5 = \tau^{-1}(S_4)$ ,  $S_6$  la composante neutre de  $S_5$ , et  $K = \text{Ker } \tau \subset S_5$ . On a  $\tau(S_6) = S_4$ , donc  $S_5 = S_6 K$ . Le groupe  $K$  est commutatif de type fini, donc il existe un sous-groupe  $S_7$  de  $S_5$  tel que  $S_7 \supset S_6$ , que  $S_7/S_6$  soit fini, et que  $K/(K \cap S_7)$  soit isomorphe à  $\mathbf{Z}^n$ ; alors il existe un sous-groupe  $K'$  de  $K$ , isomorphe à  $\mathbf{Z}^n$ , tel que  $K' \cap S_7 = \{e\}$  et tel que toute classe de  $S_5$  modulo  $S_7$  ren-

contre  $K'$ ; comme  $K$  est central dans  $G_3$ , on a  $S_3 = S_7 \times K'$ . Comme  $\Omega \neq \{\omega\}$ , on a  $\dim S_3 < \dim G_3$ , donc  $\dim S_1 < \dim G_1$ . D'autre part,  $S_6$  est localement isomorphe à  $S_4$  donc à  $S_1$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $S_7$  est de type I. Donc  $S_3 = S_7 \times K'$  est de type I ([16], p. 200, cor.). Or  $S_1/S_4$  est fini, donc  $S_2/S_4$  est fini, donc  $S_3/S_5$ , qui est isomorphe à  $S_2/S_4$ , est fini. Donc  $S_3$  est de type I ([7], lemme 3). Or ([18], p. 297, th. 8.1) la représentation  $\pi$  est de même type qu'une représentation unitaire fortement continue de  $S_3$ . Ainsi,  $\pi$  est de type I.

*Deuxième cas.* — Supposons que, pour tout idéal commutatif  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{g}$  contenu dans  $\mathfrak{n}$ ,  $\pi|_A$  soit scalaire. On prouve alors que  $\pi$  est de type I, à peu près exactement comme dans [7], depuis la p. 327, l. 14 jusqu'à la p. 328, l. 2.

2.2. *Remarque.* — Il est prouvé dans [7] que la composante neutre d'un groupe algébrique linéaire réel est de type I. Mais rappelons qu'on peut construire deux groupes de Lie connexes localement isomorphes dont l'un est de type I et l'autre pas.

2.3. PROPOSITION. — Soit  $H$  un groupe de Lie réel connexe dont le radical  $N$  est nilpotent.

- (i)  $H$  est de type I.
- (ii) L'action de  $H$  dans  $\hat{N}$  est régulière.

Soient  $\mathfrak{h}$  l'algèbre de Lie de  $H$ ,  $\mathfrak{n}$  le radical de  $\mathfrak{h}$ . Par hypothèse,  $\mathfrak{n}$  est nilpotent. D'après le théorème d'Ado, il existe un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie tel que  $\mathfrak{g}$  s'identifie à une sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{L}(V)$ , et que les éléments de  $\mathfrak{n}$  soient des endomorphismes nilpotents de  $V$ . Alors  $\mathfrak{n}$  est algébrique ([6], p. 123, prop. 14) donc  $\mathfrak{h}$  est algébrique ([6], p. 129, prop. 19). Soit  $H_1 \subset GL(V)$  un groupe algébrique d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Alors  $H$  est localement isomorphe à  $H_1$  donc de type I (prop. 2.1). Soit  $H_2$  la composante neutre de  $H_1$ . On a  $\text{Ad}(H; \mathfrak{n}) = \text{Ad}(H_2; \mathfrak{n})$ . D'après le théorème de Chevalley déjà utilisé,  $H_2$  opère régulièrement dans le dual  $\mathfrak{n}^*$  de  $\mathfrak{n}$ . Donc  $H$  opère régulièrement dans  $\mathfrak{n}^*$ . Or l'espace borélien  $\hat{N}$  s'identifie d'après la théorie de Kirillov à une partie fermée de  $\mathfrak{n}^*$  stable pour l'action de  $H$ , donc  $H$  opère régulièrement dans  $\hat{N}$ .

### 3. EXISTENCE DE MESURES INVARIANTES.

3.1. LEMME. — Soient  $K$  un groupe localement compact séparable commutatif,  $\chi$  un caractère continu  $> 0$  de  $K$ ,  $S$  un espace borélien standard. On suppose que  $K$  opère régulièrement dans  $S$  par une application borélienne  $(k, s) \mapsto ks$  de  $K \times S$  dans  $S$ . Soit  $\mu$  une mesure positive  $\sigma$ -finie sur  $S$ . On suppose que  $k(\mu) = \chi(k)\mu$  pour tout  $k \in K$ . Alors il existe une fonction

borélienne  $m$  sur  $S$ , telle que  $m(s) > 0$  presque partout et telle que, pour tout  $k \in K$ , on ait  $m(ks) = \chi(k) m(s)$  presque partout.

a. Soit  $\pi$  l'application canonique de  $S$  sur  $S/K$ . Soient  $\nu$  une mesure positive finie équivalente à  $\mu$ , et  $\nu' = \pi(\nu)$ . D'après [17], p. 143, th. 6.2, il existe une partie borélienne  $\nu'$ -négligeable de  $S/K$  de complémentaire standard. On peut donc supposer désormais que  $S/K$  est standard. D'après [17], p. 143, th. 6.3, il existe une partie borélienne  $\nu'$ -négligeable  $N$  de  $S/K$  et une application borélienne  $\varphi$  de  $(S/K) - N$  dans  $S$  telle que  $\varphi(x) \in x$  pour tout  $x \in (S/K) - N$ . En remplaçant  $S$  par  $S - \pi^{-1}(N)$ , on peut donc supposer désormais que  $\varphi$  est définie dans  $S/K$  tout entier. D'après [17], p. 139, th. 3.2,  $T = \varphi(S/K)$  est une partie borélienne standard de  $S$ . Soit  $\psi$  l'application  $(k, t) \mapsto kt$  de  $K \times T$  dans  $S$ . Cette application est borélienne surjective. Soit  $R$  la relation d'équivalence définie par  $\psi$  dans  $K \times T$ , et munissons  $(K \times T)/R$  de la structure borélienne quotient de celle de  $K \times T$ . Alors la bijection  $\psi'$  de  $(K \times T)/R$  sur  $S$  déduite de  $\psi$  par passage au quotient est borélienne. Donc  $(K \times T)/R$  est dénombrablement séparé et par suite analytique ([17], p. 141, cor.). D'après [17], p. 140, th. 4.2,  $\psi'$  est un isomorphisme borélien. Ainsi  $S$  s'identifie à  $(K \times T)/R$  muni de la structure borélienne quotient.

b. Il existe sur  $S$  une topologie d'espace localement compact polonais telle que : 1° la structure borélienne donnée soit la structure borélienne sous-jacente à la topologie; 2°  $\mu$  soit une mesure de Radon. D'après [2], p. 68, prop. 3, la relation d'équivalence définie par  $K$  dans  $S$  est  $\mu$ -mesurable. Donc ([2], p. 67, prop. 2 et p. 64, th. 2) il existe, pour tout  $y \in S/K$ , une mesure positive  $\sigma$ -finie  $\mu_y$  sur  $\pi^{-1}(y)$  telle que

$$\int_S f(s) d\mu(s) = \int_{S/K} d\nu'(y) \int_{\pi^{-1}(y)} f(s) d\mu_y(s)$$

pour toute fonction borélienne positive  $f$  sur  $S$ . En outre, si  $(\mu'_y)_{y \in S/K}$  est une autre famille de mesures avec les mêmes propriétés, on a  $\mu'_y = \mu_y$  presque partout pour  $\nu'$  sur  $S/K$ .

Soit  $k \in K$ . On a, pour toute fonction borélienne positive  $f$  sur  $S$ ,

$$\begin{aligned} \chi(k) \int_S f(s) d\mu(s) &= \int_S f(s) d(k\mu)(s) \\ &= \int_S f(ks) d\mu(s) = \int_{S/K} d\nu'(y) \int_{\pi^{-1}(y)} f(ks) d\mu_y(s). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_S f(s) d\mu(s) &= \int_{S/K} d\nu'(y) \int_{\pi^{-1}(y)} f(ks) \chi(k)^{-1} d\mu_y(s) \\ &= \int_{S/K} d\nu'(y) \int_{\pi^{-1}(y)} f(s) \chi(k)^{-1} dk\mu_y(s). \end{aligned}$$

Il existe donc une partie borélienne  $\nu'$ -négligeable  $N_k$  de  $S/K$  telle que

$$y \notin N_k \Rightarrow k(\mu_y) = \chi(k)\mu_y.$$

Soit  $(k_1, k_2, \dots)$  une suite dense dans  $K$ . Soit  $N$  la réunion,  $\nu'$ -négligeable, des  $N_{k_i}$ . On a

$$y \notin N \Rightarrow k_i(\mu_y) = \chi(k_i)\mu_y \text{ pour tout } i.$$

Or il existe sur  $\pi^{-1}(y)$  une structure d'espace homogène de  $K$  telle que la structure borélienne de  $\pi^{-1}(y)$  soit sous-jacente à la topologie de cet espace homogène ([1], p. 16, prop. 3.7). Alors  $k \mapsto k(\mu_y)$  est une fonction vaguement continue de  $k$ . Donc

$$y \notin N \Rightarrow k(\mu_y) = \chi(k)\mu_y \text{ pour tout } k \in K.$$

En remplaçant  $S$  par  $S - \pi^{-1}(N)$ , on est ramené à prouver le lemme quand  $N = \emptyset$ .

c. Soient  $(k_1, t_1) \in K \times T$ ,  $(k_2, t_2) \in K \times T$  tels que  $\psi(k_1, t_1) = \psi(k_2, t_2)$ , c'est-à-dire  $k_1 t_1 = k_2 t_2$ . Cela entraîne  $t_1 = t_2$  et  $k_2^{-1} k_1(t_1) = t_1$ . Comme  $K$  est commutatif,  $k_2^{-1} k_1$  laisse fixes tous les points de  $K t_1$ . Donc, si  $y = \pi(t_1)$ , on a  $(k_2^{-1} k_1)(\mu_y) = \mu_y$  et par suite  $\chi(k_2^{-1} k_1) = 1$ ,  $\chi(k_1) = \chi(k_2)$ . Compte tenu de la conclusion de (a), il existe une fonction borélienne  $m$  sur  $S$  telle que  $m(kt) = \chi(k)$  pour tout  $(k, t) \in K \times T$ , d'où  $m(s) > 0$  pour tout  $s \in S$ . Si  $k, k' \in K$ , et  $t \in T$ , on a

$$m(k(k't)) = m((kk')t) = \chi(kk') = \chi(k)\chi(k') = \chi(k)m(k't)$$

donc  $m(ks) = \chi(k)m(s)$  pour tout  $(k, s) \in K \times S$ .

3.2. *Remarque.* — La conclusion du lemme 3.1 peut s'exprimer en disant que la mesure  $m \cdot \mu$  est positive, équivalente à  $\mu$ , et *invariante* par  $K$  (d'où le titre du paragraphe). Toutefois, c'est sous la forme 3.1 que nous utiliserons le résultat.

#### 4. QUELQUES LEMMES.

4.1. DÉFINITION. — Soient  $H$  un groupe localement compact séparable,  $N$  un sous-groupe fermé distingué de type I de  $H$ ,  $A$  une partie de  $\hat{N}$ . On notera  $\hat{H}_A$  l'ensemble des  $\pi \in \hat{H}$  tels que  $\pi|_N$  soit concentré sur  $A$ .

4.2. LEMME. — Soient  $H$  un groupe localement compact séparable,  $N$  un sous-groupe fermé distingué de type I de  $H$ ,  $A$  une partie de  $\hat{N}$ .

- (i) Si  $A$  est fermée dans  $\hat{N}$ ,  $\hat{H}_A$  est fermée dans  $\hat{H}$ .
- (ii) Si  $A$  est ouverte dans  $\hat{N}$  et stable pour l'action de  $H$ ,  $\hat{H}_A$  est ouverte dans  $\hat{H}$ .
- (iii) Si  $A$  est ouverte dans son adhérence relativement à  $\hat{N}$  et stable pour l'action de  $H$ ,  $\hat{H}_A$  est ouverte dans son adhérence relativement à  $\hat{H}$ .



(i) Supposons  $A$  fermée dans  $\hat{N}$ . Soit  $\pi \in \hat{H}$  un point adhérent à  $\hat{H}_A$ . Alors  $\pi|N$  est faiblement contenu dans  $\hat{H}_A|N$  ([9], p. 371, cor.) donc dans  $A$ . Soient  $\mu$  une mesure positive sur  $\hat{N}$  dont la classe est associée à  $\pi|N$ , et  $S$  le support (fermé) de  $\mu$ . Si  $\sigma \in S$ ,  $\sigma$  est faiblement contenue dans  $\pi|N$  ([10], p. 252, lemme 3.1), donc  $\sigma \in A$ . Ainsi,  $\mu$  est concentrée sur  $A$ , et  $\pi \in \hat{H}_A$ . Donc  $\hat{H}_A$  est fermée dans  $\hat{H}$ .

(ii) Supposons  $A$  ouverte dans  $\hat{N}$  et stable pour l'action de  $H$ . Si  $\pi \in \hat{H}$ , la classe de mesure associée à  $\pi|N$  est concentrée soit sur  $A$  soit sur  $\hat{N} - A$  ([18], p. 295, th. 7.6). Donc  $\hat{H} - \hat{H}_A$  est l'ensemble des  $\pi \in \hat{H}$  tels que  $\pi|N$  soit concentré sur  $\hat{N} - A$  et par suite est fermé dans  $\hat{H}$  d'après (i).

(iii) Soit  $B$  l'adhérence de  $A$  dans  $\hat{N}$ . Supposons  $A$  ouverte dans  $B$  et stable pour l'action de  $H$ . Comme  $\hat{N}$  est un  $H$ -espace topologique ([12], p. 889, lemma 1.3),  $B$  est stable pour l'action de  $H$ . Il existe une partie ouverte  $C$  de  $\hat{N}$  telle que  $A = B \cap C$ . Pour tout  $h \in H$ , on a  $A = hA = B \cap hC$ , donc  $A = B \cap \left( \bigcup_{h \in H} hC \right)$ . On peut donc supposer que  $C$  est stable pour l'action de  $H$ . Alors  $\hat{H}_B$  est fermée d'après (i),  $\hat{H}_C$  est ouverte d'après (ii), et  $\hat{H}_A = \hat{H}_B \cap \hat{H}_C$ .

4.3. LEMME. — Soient  $H$  un groupe localement compact séparable de type I,  $N$  un sous-groupe fermé distingué de type I de  $H$ . Soit  $B$  un groupe localement compact. Pour tout  $b \in B$ , soit  $\rho(b)$  un automorphisme de  $H$  laissant stable  $N$ . On suppose que  $\rho$  est un morphisme de  $B$  dans  $\text{Aut}(H)$ , que l'application  $(b, h) \mapsto \rho(b)h$  de  $B \times H$  dans  $H$  est continue, et que  $\rho(B) \supset \text{Int}(H)$ .

On fait d'autre part les hypothèses suivantes :

- a.  $H$  opère régulièrement dans  $\hat{N}$ .
  - b.  $B$  opère régulièrement dans  $\hat{N}$ .
  - c. Pour toute  $B$ -orbite  $\Omega$  dans  $\hat{N}$ ,  $B$  opère régulièrement dans  $\hat{H}_\Omega$ .
- Alors  $B$  opère régulièrement dans  $\hat{H}$ .

Soit  $\pi \in \hat{H}$ . Puisque  $H$  opère régulièrement dans  $\hat{N}$ ,  $\pi|N$  est concentrée sur une  $H$ -orbite  $\Phi$  dans  $\hat{N}$  ([18], p. 302, th. 9.1). Soit  $\Omega = \bigcup_{b \in B} b\Phi$ . Puisque  $\rho(B) \supset \text{Int}(H)$ ,  $\Omega$  est une  $B$ -orbite dans  $\hat{N}$ . D'après [12], p. 889, lemma 1.3,  $\hat{N}$  est un  $H$ -espace topologique et un  $B$ -espace topologique, et  $\hat{H}$  est un  $B$ -espace topologique. Puisque  $B$  opère régulièrement dans  $\hat{N}$ ,  $\Omega$  est ouverte dans son adhérence relativement à  $\hat{N}$  ([11], p. 124, th. 1). D'après le lemme 4.2 (iii),  $\hat{H}_\Omega$  est ouverte dans son adhérence relativement à  $\hat{H}$ . Donc  $\hat{H}_\Omega$  est localement quasi-compacte et est « almost Hausdorff » au sens de [11]. On a  $\pi \in \hat{H}_\Omega$ , et  $B$  opère régulièrement dans  $\hat{H}_\Omega$  par hypothèse. Donc  $B\pi$  est ouverte dans son adhérence relativement à  $\hat{H}_\Omega$ .

([11], *loc. cit.*). Il existe des parties ouvertes  $U, U'$  et des parties fermées  $F, F'$  de  $\hat{H}$  telles que  $\hat{H}_\Omega = U \cap F$  et  $B\pi = \hat{H}_\Omega \cap U' \cap F'$ . Donc

$$B\pi = (U \cap U') \cap (F \cap F'),$$

de sorte que  $B\pi$  est ouverte dans son adhérence relativement à  $\hat{H}$ . Par suite,  $B$  opère régulièrement dans  $\hat{H}$  ([11], *loc. cit.*).

4.4. LEMME. — Soient  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $\mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{L}(V)$ ,  $\mathfrak{n}$  son plus grand idéal nilpotent,  $\mathfrak{h}$  son nilradicalisé. Soient  $\mathfrak{a}$  la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de  $\mathcal{L}(V)$  contenant  $\mathfrak{g}$ , et  $\mathfrak{r}$  le radical de  $\mathfrak{a}$ . On a  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ .

On sait que  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  ([5], p. 173, th. 13). Donc, si  $\mathfrak{l}$  est une section de Levi de  $\mathfrak{a}$ , on a

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{h} \supset \mathfrak{r} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{r} + [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \supset \mathfrak{r} + \mathfrak{l} = \mathfrak{a},$$

d'où  $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ . D'autre part,  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{a}]$  est un idéal résoluble de  $\mathfrak{a}$  contenu dans  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  donc dans  $\mathfrak{h}$ , de sorte que  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{n}$ .

4.5. — LEMME. — On utilise les notations du lemme 4.4. On suppose de plus que les éléments de  $\mathfrak{n}$  sont nilpotents, de sorte que  $\mathfrak{h}$  est algébrique. Soient  $G$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $H$  son nilradicalisé,  $N$  le radical de  $H$ . Soit  $A \subset GL(V)$  le groupe algébrique irréductible d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$ . Il existe des sous-groupes de Lie fermés  $B, C$  de  $A$  possédant les propriétés suivantes :

(i) Si  $b \in B$ , il existe un automorphisme  $\rho(b)$ , évidemment unique, de  $H$ , tel que l'automorphisme correspondant de  $\mathfrak{h}$  soit  $\text{Ad}(b; \mathfrak{h})$ .

(ii) Pour tout  $g \in G$ , soit  $\sigma(g)$  l'automorphisme  $h \mapsto ghg^{-1}$  de  $H$ . Alors  $\sigma(G) \subset \rho(B)$ .

(iii)  $\rho(B)$  laisse stable  $N$  et opère régulièrement dans  $\hat{N}$ .

(iv) Le groupe d'automorphismes de  $\hat{H}$  défini par  $\rho(B)$  est commutatif.

(v)  $C \subset B$ , et  $\rho(B) = \sigma(H) \cdot \rho(C)$ .

(vi) Pour tout  $c \in C$  et tout  $h \in H$ , on a  $\rho(c)h \in hN$ .

Soit  $H_1$  le sous-groupe algébrique irréductible de  $A$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Soient  $H_2$  la composante neutre de  $H_1$ ,  $H_3$  le revêtement universel de  $H_2$ ,  $\eta$  le morphisme canonique de  $H_3$  sur  $H_2$ . Comme  $H$  et  $H_3$  ont même algèbre de Lie,  $H_3$  est aussi le revêtement universel de  $H$ ; soient  $\theta$  le morphisme canonique de  $H_3$  sur  $H$ , et  $K = \text{Ker } \theta \subset H_3$ .

Comme  $\mathfrak{h} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ ,  $H_1$  est distingué dans  $A$ . Pour tout  $a \in A$ , soit  $\rho_1(a)$  l'automorphisme  $h_1 \mapsto ah_1a^{-1}$  de  $H_1$ ; soit  $\rho_2(a)$  la restriction de  $\rho_1(a)$  à  $H_2$ ; soit  $\rho_3(a)$  l'automorphisme de  $H_3$  qui définit  $\rho_2(a)$  par passage au quotient. L'application  $(a, h_1) \mapsto \rho_1(a)h_1$  de  $A \times H_1$  dans  $H_1$

est rationnelle. Donc l'ensemble  $B'$  des  $a \in A$  tels que  $\rho_1(a)$  laisse fixe chaque point de  $\eta(K)$  est un sous-groupe algébrique de  $A$ . Soit  $B$  la composante neutre de  $B'$ . Montrons que  $B$  possède les propriétés (i) à (iv) du lemme.

Pour tout  $k \in K$ , on a  $\rho_1(B') \eta(k) = \{\eta(k)\}$ , donc  $\rho_3(B') k \subset k \cdot (\text{Ker } \eta)$ ; comme  $\rho_3(B) k$  est connexe, on a  $\rho_3(B) k = \{k\}$ . Donc, pour tout  $b \in B$ , il existe un automorphisme  $\rho(b)$  de  $H$  qui a même application tangente en  $e$  que  $\rho_1(b)$ ; cette application tangente est  $\text{Ad}(b; \mathfrak{h})$ . Cela prouve (i).

Soit  $x \in \mathfrak{g}$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\exp_A \lambda x$  et  $\exp_G \lambda x$  ont la même opération adjointe dans  $\mathfrak{h}$ , à savoir  $\exp \text{ad}(\lambda x; \mathfrak{h})$ . Donc  $\rho_3(\exp_A \lambda x)$  définit par passage au quotient l'automorphisme  $\sigma(\exp_G \lambda x)$  de  $H$ . Par suite,  $\exp_A \lambda x \in B'$ , de sorte que  $\exp_A x \in B$ ; en outre,  $\rho(\exp_A x) = \sigma(\exp_G x)$ . Ainsi,  $\sigma(\exp_G x) \subset \rho(B)$ . Comme  $G$  est connexe, on en déduit que  $\sigma(G) \subset \rho(B)$ . Cela prouve (ii). On voit en même temps que  $\exp_A(\mathfrak{g}) \subset B$ . Donc  $H_2 \subset B$ .

Comme  $\mathfrak{n}$  est un idéal caractéristique de  $\mathfrak{h}$ ,  $\rho(B)$  laisse stable  $N$ . L'opération adjointe de  $B'$  dans  $\mathfrak{n}$  est rationnelle, donc la relation d'équivalence définie par  $B$  dans  $\mathfrak{n}^*$  est régulière (théorème de Chevalley); donc  $\rho(B)$  opère régulièrement dans  $\hat{N}$  (qui s'identifie comme espace borélien à une partie fermée de  $\mathfrak{n}^*$ ). Cela prouve (iii).

Soit  $B_1$  le groupe des commutateurs de  $B$ . On a  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ , donc tout élément de  $\rho(B_1)$  est de la forme  $\sigma(h)$  avec un  $h \in H$ . Or l'action de  $H$  sur  $\hat{H}$  est triviale. Donc l'action de  $\rho(B_1)$  sur  $\hat{H}$  est triviale. Cela prouve (iv).

Soient  $R$  le radical de  $A$  et  $C = R \cap B$ . Alors  $C$  est un sous-groupe de Lie fermé de  $A$ . Prouvons (v) et (vi). Puisque  $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$  (lemme 4.4), tout élément de  $B$  suffisamment voisin de  $e$  est de la forme  $rh$  avec  $r \in R$ ,  $h \in H_2 \subset B$ , d'où  $r \in R \cap B = C$ . Comme  $B$  est connexe,  $B = H_2 C$ , d'où  $\rho(B) = \rho(H_2) \rho(C) = \sigma(H) \rho(C)$ . Cela prouve (v).

On a  $[\mathfrak{r}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{u}$  (lemme 4.4). Soit  $N_1$  le sous-groupe de Lie connexe de  $A$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}$ . Soit  $r \in R$ . Pour tout  $h \in H_2$ , on a  $rhr^{-1} \in hN_1$ . Si de plus  $r \in B$ , on a donc  $\rho(r)h' \in h'N$  pour tout  $h'$  dans  $H$  suffisamment voisin de  $e$ . Comme  $H$  est connexe, on voit que  $\rho(r)h' \in h'N$  pour tout  $h' \in H$ . Cela prouve (vi).

4.6. LEMME. — *On conserve les notations des lemmes 4.4 et 4.5. Si  $B$  et  $C$  possèdent les propriétés du lemme 4.5, alors  $B$  opère régulièrement dans  $\hat{H}$ .*

Montrons qu'on peut appliquer le lemme 4.3. D'abord,  $H$  est localement compact séparable,  $N$  est fermé distingué dans  $H$ ,  $H$  et  $N$  sont de type I (prop. 2.3). Le groupe  $B$  est localement compact,  $\rho(B)$  laisse stable  $N$ ,  $\rho$  est un morphisme de  $B$  dans  $\text{Aut}(H)$ . L'application  $(b, x) \mapsto \text{Ad}(b; \mathfrak{h})x$  de  $B \times \mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{h}$  est continue, donc l'application

$(b, h) \mapsto \rho(b)h$  de  $B \times H$  dans  $H$  est continue en  $(e, e)$  et par suite partout. On a  $\rho(B) \supset \text{Int}(H)$  d'après le lemme 4.5 (ii). Le groupe  $H$  opère régulièrement dans  $\hat{N}$  (prop. 2.3). Le groupe  $B$  opère régulièrement dans  $\hat{N}$  [lemme 4.5 (iii)]. Soit  $\Omega$  une  $B$ -orbite dans  $\hat{N}$ . Il nous suffit maintenant de prouver que  $\rho(B)$  opère régulièrement dans  $\hat{H}_\Omega$ ; comme  $H$  opère trivialement dans  $\hat{H}$ , il suffit même, d'après le lemme 4.5 (v), de prouver que  $\rho(C)$  opère régulièrement dans  $\hat{H}_\Omega$ .

Soit  $\omega \in \Omega$ . Le stabilisateur  $S$  de  $\omega$  dans  $H$  est un sous-groupe fermé de  $H$  ([1], p. 16, prop. 3.7) contenant  $N$ . Soit  $\alpha$  un 2-cocycle de Mackey, obstruction pour l'extension de  $\omega$  à  $S$ . Pour tout  $c \in C$ , le stabilisateur de  $c\omega$  dans  $H$  est  $\rho(c)(S)$  donc est égal à  $S$  d'après le lemme 4.5 (vi); comme 2-cocycle de Mackey relatif à  $c\omega$ , on peut prendre le transformé de  $\alpha$  par  $\rho(c)|_S$ , et ce transformé est égal à  $\alpha$  d'après le lemme 4.5 (vi) puisque  $\alpha$  est trivial sur  $N$ . Soit  $\beta$  le 2-cocycle de  $S/N$  déduit de  $\alpha$  par passage au quotient.

Soit  $(S/N, \beta)^\wedge$  l'espace borélien des  $\beta$ -représentations unitaires irréductibles de  $S/N$ . D'après [18], p. 300, th. 8.3, il existe une bijection canonique

$$\Phi: C\omega \times (S/N, \beta)^\wedge \rightarrow \hat{S}_{c\omega}.$$

D'autre part, d'après le lemme 4.5 (v), on a  $\Omega = B\omega = HC\omega$ , donc ([18], p. 297, th. 8.1) l'opération d'induction est une bijection

$$\Psi: \hat{S}_{c\omega} \rightarrow \hat{H}_\Omega.$$

Puisque  $H$  est de type I,  $(S/N, \beta)$  est de type I ([18], p. 302, th. 8.4), donc  $(S/N, \beta)^\wedge$  est standard. Les orbites de  $C$  dans  $\mathfrak{n}^*$  sont des réunions dénombrables d'ensembles compacts donc sont boréliennes; il résulte de là que  $C\omega$  est une partie borélienne de  $\hat{N}$ . On est dans les conditions d'application de [1], p. 107, th. 7 (le rôle de  $H$  dans cet énoncé étant tenu ici par  $B$ ); on en conclut que  $\hat{S}_{c\omega}$  est standard et que  $\Phi$  est un isomorphisme borélien. D'après [10], p. 257, th. 4.1,  $\Psi$  est continue. D'après [17], p. 139, th. 3.2,  $\Psi$  est un isomorphisme borélien.

L'action de  $\rho(C)$  sur  $\hat{H}_\Omega$  s'effectue par transport de structure. Transformant cette action par  $\Psi \circ \Phi$ , on obtient l'action de  $\rho(C)$  sur  $C\omega \times (S/N, \beta)^\wedge$  par transport de structure, c'est-à-dire l'application

$$(\rho(c), (c'\omega, \lambda)) \rightarrow (cc'\omega, \lambda).$$

Il est clair que  $\rho(C)$  opère régulièrement dans  $C\omega \times (S/N, \beta)^\wedge$  donc dans  $\hat{H}_\Omega$  puisque  $\Psi \circ \Phi$  est un isomorphisme borélien.

## 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

5.1. LEMME (L. Pukanszky). — Soient  $G$  un groupe localement compact séparable,  $\Delta$  sa fonction module,  $\pi$  sa représentation régulière,  $H$  un sous-

groupe fermé distingué unimodulaire de type I de  $G$ , tel que  $G/H$  soit unimodulaire. Soit  $\mu$  la mesure de Plancherel sur  $\hat{H}$ . On suppose qu'il existe une fonction borélienne  $m$  sur  $\hat{H}$ , telle que  $m(s) > 0$  presque partout et telle que, pour tout  $g \in G$ , on ait  $m(gs) = \Delta(g) m(s)$  presque partout. Alors l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(G)$  est semi-finie.

Cf. [20], lemme 2'.

5.2. LEMME. — Soit  $G$  un groupe de Lie réel connexe,  $\pi$  sa représentation régulière. L'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(G)$  est semi-finie.

Soit  $\Delta$  la fonction module de  $G$ . Soit  $H$  le nilradicalisé de  $G$ . C'est un sous-groupe distingué fermé unimodulaire de  $G$  tel que  $G/H$  soit commutatif (prop. 1.7); ce sous-groupe est de type I (prop. 1.7 et 2.3). Soit  $\nu$  une mesure de Haar de  $H$ , et  $\mu$  la mesure de Plancherel correspondante sur  $\hat{H}$ .

Soient  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{n}$  son plus grand idéal nilpotent. Il existe un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie et une identification de  $\mathfrak{g}$  à une sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{L}(V)$  telle que les éléments de  $\mathfrak{n}$  soient nilpotents. Introduisons alors toutes les notations des lemmes 4.4 et 4.5.

Soit  $B_1$  le groupe des commutateurs de  $B$ . Pour  $b \in B_1$ ,  $\rho(b)$  opère trivialement dans  $\hat{H}$  [lemme 4.5 (iv)]. Le stabilisateur de tout point de  $\hat{H}$  dans  $B$  est fermé ([1], p. 16, prop. 3.7). Donc  $\rho(\overline{B}_1)$  opère trivialement dans  $\hat{H}$ . Soit  $K = B/\overline{B}_1$ . C'est un groupe localement compact séparable commutatif. Il opère régulièrement dans  $\hat{H}$  (lemme 4.6). Il existe un caractère continu  $\chi > 0$  de  $B$  tel que  $\rho(b)\nu = \chi(b)^{-1}\nu$  pour tout  $b \in B$ , d'où  $\rho(b)\mu = \chi(b)\mu$  pour tout  $b \in B$ . D'après le lemme 3.1, il existe une fonction borélienne  $m$  sur  $\hat{H}$ , telle que  $m(s) > 0$  presque partout, et telle que, pour tout  $b \in B$ , on ait  $m(bs) = \chi(b) m(s)$  presque partout. Soit  $g \in G$ . Il existe  $b \in B$  tel que  $\sigma(g) = \rho(b)$ . Alors

$$\chi(b)^{-1}\nu = \rho(b)\nu = \sigma(g)\nu = (\text{mod } \sigma(g))^{-1}\nu = \Delta(g)\nu \quad ([3], \text{ p. 61, cor.}),$$

donc  $\chi(b)^{-1} = \Delta(g)$ . Ainsi, pour  $g \in G$ , on a  $m(gs)^{-1} = \Delta(g) m(s)^{-1}$  presque partout. D'après le lemme 5.1,  $\pi(G)$  engendre une algèbre de von Neumann semi-finie.

5.3. LEMME. — Soient  $G$  un groupe localement compact connexe,  $K$  un sous-groupe distingué compact de  $G$ ,  $\rho$  une représentation unitaire irréductible (de dimension finie) de  $K$ ,  $\sigma$  la représentation unitaire de  $G$  induite par  $\rho$ . On suppose que  $G/K$  est un groupe de Lie. Alors l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\sigma(G)$  est semi-finie.

Soit  $K' = \text{Ker } \rho$ . Comme  $G$  est connexe,  $K'$  est distingué dans  $G$  ([14], p. 515, th. 3). Soit  $\rho'$  la représentation de  $K/K'$  déduite de  $\rho$  par passage au quotient. Soit  $\sigma'$  la représentation unitaire de  $G/K'$  induite

par  $\rho'$ . Alors  $\sigma'$  est la représentation déduite de  $\sigma$  par passage au quotient. Comme  $\rho'$  est une sous-représentation de la représentation régulière de  $K/K'$ ,  $\sigma'$  est une sous-représentation de la représentation régulière de  $G/K'$ , ([15], p. 113, th. 4.2 et p. 123, th. 10.1). Or  $G/K$  et  $K/K'$  sont des groupes de Lie, donc  $G/K'$  est un groupe de Lie, connexe puisque  $G$  est connexe. Donc l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\sigma(G) = \sigma'(G/K')$  est semi-finie (lemme 5.2).

5.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — D'après [19], p. 175, theorem, il existe un sous-groupe distingué compact  $K$  de  $G$  tel que  $G/K$  soit un groupe de Lie. Soit  $\rho$  la représentation régulière gauche de  $K$ . On a  $\rho = \bigoplus_{i \in I} \rho_i$ , où chaque  $\rho_i$  est irréductible. Soit  $\pi_i$  la représentation unitaire de  $G$  induite par  $\rho_i$ . D'après [15], *loc. cit.*, on a  $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ . D'après le lemme 5.3, l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi_i(G)$  est semi-finie. Donc l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(G)$  est semi-finie.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] L. AUSLANDER et C. C. MOORE, *Unitary representations of solvable Lie groups* (Mem. Amer. Math. Soc., n° 62, 1966).
- [2] N. BOURBAKI, *Intégration vectorielle* (Act. Sci. Ind., n° 1281, Paris, Hermann, 1959).
- [3] N. BOURBAKI, *Mesure de Haar* (Act. Sci. Ind., n° 1306, Paris, Hermann, 1963).
- [4] N. BOURBAKI, *Algèbres de Lie* (Act. Sci. Ind., n° 1285, Paris, Hermann, 1960).
- [5] C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie*, t. 2 (Act. Sci. Ind., n° 1152, Paris, Hermann, 1951).
- [6] C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie*, t. 3 (Act. Sci. Ind., n° 1226, Paris, Hermann, 1955).
- [7] J. DIXMIER, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques* (Ann. Inst. Fourier, t. 7, 1957, p. 315-328).
- [8] J. DIXMIER, *Représentations induites holomorphes des groupes résolubles algébriques* (Bull. Soc. math. Fr., t. 94, 1966, p. 181-206).
- [9] J. M. G. FELL, *The dual spaces of C\*-algebras* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 94, 1960, p. 365-403).
- [10] J. M. G. FELL, *Weak containment and induced representations of groups* (Can. J. Math., vol. 14, 1962, p. 237-268).
- [11] J. GLIMM, *Locally compact transformation groups* (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 101, 1961, p. 124-138).
- [12] J. GLIMM, *Families of induced representations* (Pacific J. Math., vol. 12, 1962, p. 885-911).
- [13] R. GODEMENT, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires* (J. Math. pures et appl., t. 30, 1951, p. 1-110).
- [14] K. IWASAWA, *On some types of topological groups* (Ann. Math., vol. 50, 1949, p. 507-558).
- [15] G. W. MACKEY, *Induced representations of locally compact groups* (Ann. Math., vol. 55, 1952, p. 101-139).
- [16] G. W. MACKEY, *Induced representations of locally compact groups, II, The Frobenius reciprocity theorem* (Ann. Math., vol. 58, 1953, p. 193-221).

- [17] G. W. MACKEY, *Borel structure in groups and their duals* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 85, 1957, p. 134-165).
- [18] G. W. MACKEY, *Unitary representations of group extensions* (*Acta Math.*, vol. 99, 1958, p. 265-311).
- [19] D. MONTGOMERY et L. ZIPPIN, *Topological transformation groups* (*Intersc. tracts in pure and appl. math.*, Interscience Publishers, New-York, 1955).
- [20] L. PUKANSZKY, *Sur la représentation régulière des groupes de Lie résolubles connexes*, I et II (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 1077-1079 et 1172-1173 et article à paraître).
- [21] L. PUKANSZKY, *Characters of algebraic solvable groups* (*J. Functional Analysis*, vol. 3, 1969, p. 435-494).
- [22] I. E. SEGAL, *An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups* (*Ann. Math.*, vol. 52, 1950, p. 272-292).

(Manuscrit reçu le 21 avril 1969.)

Jacques DIXMIER,  
64, rue Gay-Lussac,  
75-Paris, 5<sup>e</sup>.

